XIII районная научно-практическая конференция молодых исследователей «Юность будущему»

Исследовательская работа

**Решение логарифмических неравенств методом рационализации**

Автор: ученица 11а класса

МБОУ «СОШ №3» Ильина Марина

Научный руководитель: учитель математики

МБОУ «СОШ №3»

Стрелкова Ольга Алексеевна

Вязники

2012г.

**Содержание**

Введение …………………………………………………………………….2

1. Теоретическое обоснование метода…………………………………….3

2. Примеры решения неравенств методом рационализации…………….6

3. Задания для самостоятельного решения……………………………….10

Заключение…………………………………………………………………11

Список использованной литературы……………………………………...12

**Введение**

Решение неравенств - важный раздел в математике. Успешное изучение математики невозможно без умения решать разнообразные неравенства, поэтому я решила взять в качестве темы научно-исследовательской работы один из способов решения неравенств – метод рационализации. В школьной программе он не изучается, но его применение значительно облегчает решение заданий ЕГЭ части С3, в частности логарифмических неравенств.

***Цель исследовательской работы:***

Изучение теоретического обоснования метода рационализации.

**Задачи:**

1. Изучить теоремы, которые позволяют заменять сложные выражения на более простые;
2. Рассмотреть примеры применения метода рационализации при решении логарифмических неравенств;
3. Найти примеры логарифмических неравенств, которые могут быть решены методом рационализации.

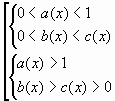
**Актуальность** работы заключается в том, что данный метод позволяет успешно решать логарифмические неравенства части С 3 ЕГЭ по математике.

**Теоретическое обоснование метода**

Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с переменным основанием логарифма. Так, неравенство вида



является стандартным школьным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:



Недостатком данного метода является необходимость решения семи неравенств, не считая двух систем и одной совокупности. Уже при данных квадратичных функциях решение совокупности может потребовать много времени. Можно предложить альтернативный, менее трудоемкий метод решения этого стандартного неравенства. Это метод рационализации неравенств, известный в математической литературе под названием декомпозиции.

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения F(x) на более простое выражение G(x), при котором неравенство G(x)0 равносильно неравенству F(x)0 в области определения выражения F(x).

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализующие выражения G, где u, v, , p, q - выражения с двумя переменными (u > 0; u ≠ 1; v > 0, > 0), *a -* фиксированное число (*a* > 0, *a* ≠ 1).



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Выражение F | Выражение G |
| 1 | - | (*а –1)(v – φ)* |
| 1a |  |  |
| 1б |  |  |
| 2 | - |  |
| 2a |  | ) |
| 2б |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 | ( |  |
| 4a |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |

**Доказательство**

1. Пусть  *logav - logaφ > 0*, то есть  *logav > logaφ,* причём *a > 0, a ≠ 1, v > 0,*

*φ > 0.*

Если 0 < *a* < 1, то по свойству убывающей логарифмической функции имеем *v < φ.* Значит, выполняется система неравенств

*a -1<0*

*v – φ < 0*

Откуда следует неравенство (*a – 1)(v – φ) > 0* верное на области определения выражения *F = logav - logaφ.*

Если *a > 1,* то *v > φ.* Следовательно, имеет место неравенство *(a – 1)(v – φ)> 0.* Обратно, если выполняется неравенство *(a – 1)(v – φ)> 0* на области допустимых значений *(a > 0, a ≠ 1, v > 0, φ > 0),* то оно на этой области равносильно совокупности двух систем.

*a – 1<0 a – 1 > 0*

*v – φ < 0 v – φ > 0*

Из каждой системы следует неравенство *logav > logaφ,* то есть *logav - logaφ > 0.*

Аналогично, рассматриваются неравенства F < 0, F ≤ 0, F ≥ 0.

2. Пусть некоторое число *а* > 0 и *а* ≠ 1, тогда имеем

*logu v- loguφ = *

Знак последнего выражения совпадает со знаком выражения

 или *(u-1)(v-φ) .*

3.Так как *loguv –logφv = ,*

то, используя замены 2а и 2б, получаем, что знак последнего выражения совпадает со знаком выражения *(φ - 1)(v - 1)(u - 1)(φ – u).*

4.Из неравенства *uv-uφ > 0* следует *uv > uφ.* Пусть число а > 1, тогда *loga uv > logauφ* или

*(u – φ)loga u > 0.*

Отсюда с учётом замены 1б и условия *a > 1* получаем

*(v – φ)(a – 1)(u – 1) > 0, (v – φ)(u – 1) > 0.* Аналогично, доказываются неравенства F < 0,

F ≤ 0, F ≥ 0.

1. Доказательство проводится аналогично доказательству 4.
2. Доказательство замены 6 следует из равносильности неравенств | p | > | q | и p2 > q2

( | p | < | q | и p2 < q2).

**Примеры решения неравенств методом рационализации**

**Пример 1.** Решите неравенство log 2x+3 x2 < 1.

**Решение.** Запишем неравенство в виде log2x+3x2 – 1< 0 и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

(2x + 2)(x2 – 2x – 3) < 0

2x + 3 > 0

x ≠ 0

(x + 1)(x + 1)(x – 3) < 0

x > 1,5

x ≠ 0

**Ответ:** (-1.5; -1) (-1; 0)  (0; 3).

**Пример 2.** Решите неравенство log|x+2|(4 + 7x – 2x2) ≤ 2.

**Решение.** Запишем нераенство в виде log|x + 2|(4 + 7x – 2x2) – log|x + 2|(x + 2)2 ≤ 0 и заменим равносильной системой, используя метод рационализации

(|x + 2| - 1)(4 + 7x – 2x2 – x2 – 4x – 4) ≤ 0

4 +7x - 2x2 > 0

x + 2 ≠ 0

((x + 2)2 – 1)(-3x2 + 3x) ≤ 0

(x + 0,5)(x – 4) < 0

x ≠ 2

x(x + 1)(x + 3)(x – 1) ≥ 0

(x + 0,5)(x – 4) < 0

x ≠ 2

+ - + - + *х*

● ● ● ●

-3 -1 0 1

+ - + *х*

° °

-0,5 4

**Ответ:** ( -0,5; 0]  [1; 4).

**Пример 3.** Решите неравенство  ≥ 0.

**Решение.** Заменим данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации



> 0

3 – x > 0

x > 0

x ≠ 3

x ≠ 1

(x – 3)(x – 1)(- 1) ≥ 0

(x – 1)(- 1) > 0

x > 0

x ≠ 3

x ≠ 1

(x – 1)(3 – x –x2) ≤ 0

(x – 1)(3 – x – 1) > 0

x < 3

x > 0

x ≠ 1



1 < x < 2

 < 2.

При решении неравенства (х – 1)(х – 2) < 0 системы учтены условия *x < 3, x > 0, x ≠ 1.* Условие *1 < x < 2* позволяет исключить множитель *x – 1 > 0* в первом неравенстве системы.

**Ответ:** .

**Пример 4.** Решите неравенство log12x2-41+35(3 – x) ≥ log2x2-5x+3(3- x).

**Решение.** Запишем неравенство в виде log12x2-41+35(3 – x) - log2x2-5x+3(3- x) ≥ 0 и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

(12x2 – 41x + 34)(2x2 – 5x + 2)(2 – x)(-10x2 + 36x – 32) ≥ 0

12x2 – 41x + 35 > 0

2x2 – 5x + 3 > 0

12x2 – 41x + 34 ≠ 0

2x2 – 5x + 2 ≠ 0

3 – x > 0

(x – 2)4(x - 

(x -  > 0

(x – 1)(x -  > 0

(x - 

(x – 2)(x - 

x < 3

Для решения первых трёх неравенств системы используем метод интервалов.

**Ответ:** 

**Пример 5.** Найдите все значения *а*, при которых неравенство loga(x2 + 4) > 1 выполняется для всех значений *х*.

**Решение.** Используя метод рационализации, запишем данное неравенство равносильной системой

*(а – 1)(х2 + 4 - а) > 0*

*a > 0*

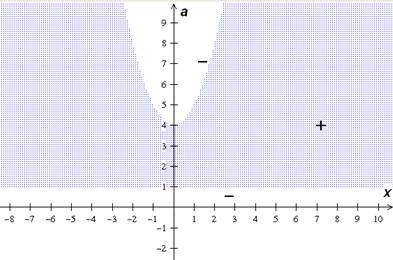
*a ≠ 1*

Для решения первого неравенства системы используем метод областей.

1. Обозначим F*(x,a) = (a – 1)( х2 + 4 - а).*
2. Для выражения F*(x,a)* переменные *х* и *а* принимают любые значения.
3. F*(x, a) = 0, (а – 1)(х2 + 4- а) = 0,* отсюда *а = 1* или  *а = х2 + 4.*
4. Имеем прямую и параболу, которые разбивают координатную плоскость на области, в каждой из которых выражение F*(x,a)* сохраняет знак.

Возьмём контрольную точку (0; 0). F*(0,0)= - 4< 0.* Ставим знак минус в области, содержащей точку (0; 0). В остальных областях расставляем знаки, используя правило знакочередования. Множество точек, координаты которых удовлетворяют первому неравенству системы, выделены цветом. Условия *а > 0, а ≠ 1* учтены. Проводя прямые, параллельные оси *Ох*, видим, что полностью прямые находятся в заштрихованной области при *а .*

**Ответ:** *.*



**Задания для самостоятельного решения**

1. Решите неравенство

.

Ответ: 

1. Решите неравенство

< 1.

Ответ: (log310; + ).

1. Решите неравенство

.

Ответ: .

1. Решите неравенство

.

Ответ: .

1. Решите неравенство

.

Ответ: .

**Заключение**



Считаю, что задачи, которые поставила перед собой при выполнении работы, достигнуты. Исследование имеет практическую пользу, так как предложенный в работе метод позволяет значительно упростить решение логарифмических неравенств. В результате количество вычислений, приводящих к ответу, уменьшается примерно в два раза, что экономит не только время, но и позволяет потенциально сделать меньше арифметических ошибок и ошибок «по невнимательности». Работа нашла своё применение и на уроках математики. Своими «находками» я поделилась с одноклассниками.

**Список использованной литературы**

1. Корянов А. Г., Прокофьев А. А. – Методы решения неравенств с одной переменной. – 2011.
2. Моденов В. П. – Пособие по математике. – 1972.
3. Ткачук В.В. - Математика абитуриенту. Москва: МЦНМО, 2008.