**Изучение теоремы Безу**

Бирюкова Марина Александровна, *учитель математики, ГБОУ лицей 1575*

Еще Эйнштейн утверждал, что в своей научной деятельности на постановку проблемного вопроса из часа работы им тратится 55 минут, а оставшихся пяти бывает достаточно для нахождения ответа. При выявлении проблемы и ее формулировке задействуются более обширные участки мозга, чем при ее решении, для этого требуется высокая степень обобщенности видения действительности, умение абстрагироваться от несущественных деталей, увидеть корни проблемы.

**Ход урока**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Возникновение проблемных ситуаций и постановка проблемы** | | |
| Учитель: | Сегодня мы с вами научимся решать уравнения высших степеней, а вот алгоритм их решения нужно будет вывести нам самим.  Решить уравнение: x3-5x2+8x-6=0 (1)  Возникает проблема: Мы понимаем, что было бы удобно представить левую часть равенства в виде произведения (оно будет равно 0). Нужно разложить многочлен 3 степени на множители. Но как?  Как разложить на множители многочлен х2+3х+2? | |
| **Актуализация прежних знаний учащихся** | | |
| Ученики: | Может помочь теорема Виета.  х2+3х+2 = (х+1)(х+2) | |
| Выступление учеников по подготов ленным заранее дома материалам. | Франсуа Виет родился в 1540 году во Франции. Отец Виета был прокурором. Сын выбрал профессию отца и стал юристом, окончив университет в Пуату. В 1563 году он оставляет юриспруденцию и становится учителем в знатной семье. Именно преподавание побудило в молодом юристе интерес к математике. Виет переезжает в Париж, где легче узнать о достижениях ведущих математиков Европы. С 1571 года Виет занимает важные государственные посты, но в 1584 году он был отстранен и выслан из Парижа. Теперь он имел возможность всерьез заняться математикой. В 1591 году он издает трактат "Введение в аналитическое искусство", где показал, что, оперируя с символами, можно получить результат, применимый к любым соответствующим величинам. Знаменитая теорема была обнародована в том же году. | |
| Выступление учеников по подготов ленным заранее дома материалам. | Теорема Виета: Числа х1 и х2 являются корнями приведенного квадратного уравнения х2+pх+q=0 тогда и только тогда, когда х1+х2= -p, х1х2=q.  Следствие: х2+pх+q=(х-х1)(х-х2).  Обобщенная теорема Виета: Числа х1 и х2 являются корнями квадратного уравнения ах2+bх+с=0 тогда и только тогда, когда х1+х2= -b/а, х1х2=с/а.  Следствие: ах2+bх+c=а(х-х1)(х-х2). | |
| Учитель: | Вспомните ситуации, в которых может использоваться теорема Виета. | |
| Ученики: | Проверка правильности найденных корней.  Определение знаков корней квадратного уравнения.  Устное нахождение целых корней приведенного квадратного уравнения.  Составление квадратных уравнений с заданными корнями.  Разложение квадратного трехчлена на множители.  А нам как раз необходимо разложить на множители многочлен  x3-5x2+8x-6. Для этого нужно найти корни многочлена. | |
| **Выдвижение предположений и обоснования гипотезы** | | |
| Учитель: | | Какое число называется корнем многочлена? |
| Ученики: | | Число c называется корнем многочлена f, если f(c)=0. |
| Учитель: | | Какой одночлен многочлена поможет нам подобрать корни многочлена? |
| Ученики: | | Свободный член.  x3-5x2+8x-6 (2)  http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif1; http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif2; http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif3; http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif6  Из всех делителей числа 6 только 3 является корнем многочлена. Т.е. один из множителей в разложении будет (х-3). Как найти другие множители? Разделим уголком.  x3-5x2+8x-6 | x-3  x3-3x2 х2-2х+2  -2х2+8х-6  -2х2+6х  2x-6  2x-6  0  Разделили без остатка. x3-5x2+8x-6=(x2-2x+2)(x-3)  Вернемся к уравнению (1): (x2-2x+2)(x-3)=0  x2-2x+2=0 - квадратное уравнение, корней не имеет, т.к. D<0.  Ответ: x=3. |
| Учитель: | | А мог получиться остаток при делении? Ответим на этот вопрос несколько позже. А сейчас найдите значение многочлена (2) при х=3. |
| Ученики: | | 33-532+83-6=27-45+24-6=0 |
| Учитель: | | Прошу обратить ваше внимание, что x=3-корень многочлена и остаток от деления многочлена на (х-3) равен 0.  х=2 - не является корнем уравнения (1).  Попробуем разделить многочлен (2) на (х-2). |
| Ученики: | | x3-5x2+8x-6 | x-2  x3-2x2 х2-3х+2  -3х2+8х-6  -2х2+6х  2x-6  2x-4  -2  Найдем значение многочлена (2) при х=2.  23-522+82-6=8-20+16-6=-2  Отметим, что x=2- не является корнем многочлена и остаток от деления многочлена на (х-2) равен значению многочлена при х=2.  Вот и ответ на вопрос об остатке. Да, остаток получился, при таком значении х, которое не является корнем многочлена. |
| Учитель: | | Задание по вариантам.  а) Найдите корень многочлена.  б) Выполните деление.  в) Найдите значение данного многочлена при заданных х.  а) x3 - 3x2 + 6x - 4  б) x3 - 3x2 + 6x - 4 на (х-1)  в) х=1  а)2x3 - x2 + x - 5  б) 2x3 - x2 + x - 5 на (х-1)  в) х=1  Замечаете ли вы ту же закономерность (речь идет о значении остатка и значении многочлена при различных значениях х)? |
| **Доказательство гипотезы** | | |
| Ученики: | | Да, закономерность присутствует.  Нужно попробовать записать её в общем виде.  Пусть f - многочлен, c - некоторое число.  Докажем следующие утверждения: 1. f делится на двучлен (x - c) тогда и только тогда, когда число c является его корнем. 2. Остаток от деления f на (x - c) равен f(c).  Доказательство. Сначала мы докажем второе утверждение. Для этого разделим f c остатком на (x - c): f = (x - c)q + r; по определению остатка, многочлен r либо равен 0, либо имеет степень, меньшую степени (x - c), т.е. меньшую 1. Но степень многочлена меньше 1 только в случае, когда она равна 0, и поэтому в обоих случаях r на самом деле является числом - нулем или отличным от нуля.  Подставив теперь в равенство f = (x - c)q + r значение x = c, мы получим f(с) = (с - c)q(с) + r = 0, так что действительно r = f(c), и первое утверждение тоже доказано.  Эту закономерность отметил и математик Безу. |
| Выступление учеников по подготов ленным заранее дома материалам. | | Этьен Безу- французский математик, член Парижской Академии Наук( с 1758 года ), родился в Немуре 31 марта 1730 года и умер 27 сентября 1783 года. С 1763 года Безу преподавал математику в училище гардемаринов, а с 1768 года и в королевском артиллерийском корпусе.  Основные работы Этьена Безу относятся к высшей алгебре, они посвящены созданию теории решения алгебраических уравнений. В теории решения систем линейных уравнений он содействовал возникновению теории определителей , развивал теорию исключения неизвестных из систем уравнений высших степеней, доказал теорему (впервые сформулированную К.Маклореном ) о том , что две кривые порядка m и n пересекаются не более чем в mn точках. Во Франции и за её границей вплоть до 1848 года был очень популярен его шеститомный "Курс математики ", написанный им в 1764-69 годах. Безу развил метод неопределённых множителей, в элементарной алгебре его именем назван способ решения систем уравнений, основанный на этом методе. |
|  | | Именем учёного названа одна из основных теорем алгебры - ТЕОРЕМА БЕЗУ: Остаток от деления многочлена Pn(x) на двучлен  (x - C) равен значению этого многочлена при x = C. И теорему эту мы только что доказали. |
| **Усвоение новых знаний и способов действия** | | |
|  | | Решить уравнение  х4 - x3 - 6x2 - x + 3 = 0.  Целые корни многочлена f = х4 - x3 - 6x2 - x + 3 должны быть делителями свободного члена, так что это могут быть числа  1, -1, 3, -3.  -1 - корень f , и в частном получается многочлен g = x3 - 2x2 - 4x +3.  -1 проверим еще раз: g(-1)?0.  g(3) = 0, и при делении g на (x - 3) получается многочлен x2- x - 1, корни которого (1+v5)/2 и (1-v5)/2.  Таким образом, многочлен f, а значит, и исходное уравнение имеет 4 корня: -1;3;(1+v5)/2;(1-v5)/2. |
|  | | Решить уравнение  x4+3x3-13x2-9x+30=0.  http://festival.1september.ru/articles/579433/Image593.gif1; http://festival.1september.ru/articles/579433/Image593.gif2, http://festival.1september.ru/articles/579433/Image593.gif3, http://festival.1september.ru/articles/579433/Image593.gif5, http://festival.1september.ru/articles/579433/Image593.gif6, http://festival.1september.ru/articles/579433/Image593.gif10.  (x-2)(x3+5x2-3x-15)=0  (x-2)(x+5)(x2-3)=0  Ответ: x1=2,x2=-5,x3,4=http://festival.1september.ru/articles/579433/Image595.gif. |
| Учитель: | | Теорема Безу дает возможность, найдя один корень многочлена, искать далее корни многочлена, степень которого на 1 меньше: если f(c) = 0, то f = (x - c)q, и остается решить уравнение q(x) = 0. Иногда этим приемом - он называется понижением степени - можно найти все корни многочлена. |
|  | | Решить уравнение  x6+x5-7x4-5x3+16x2+6x-12=0.  http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif1; http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif2; http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif3; http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif4; http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif6; http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gif12.  x6+x5-7x4-5x3+16x2+6x-12=(x-1)(x5+2x4-5x3-10x2+6x+12)  (x-1)(x5+2x4-5x3-10x2+6x+12)=0  (x-1)(x+2)(x4-5x2+6)=0  x4-5x2+6=0 - биквадратное уравнение, x1,2=http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gifhttp://festival.1september.ru/articles/579433/Image598.gif, x3,4=http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gifhttp://festival.1september.ru/articles/579433/Image599.gif.  Ответ: x1,2=http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gifhttp://festival.1september.ru/articles/579433/Image598.gif, x3,4=http://festival.1september.ru/articles/579433/Image591.gifhttp://festival.1september.ru/articles/579433/Image600.gif, x5=1,x6=-2. |
| Учитель: | | Следует отметить, что при решении уравнений с помощью теоремы Безу необходимо:   * найти все целые делители свободного члена; * из этих делителей найти хотя бы один корень уравнения (a); * левую часть уравнения разделить на (x-a); * записать в левой части уравнения произведение делителя и частного; * решить полученное уравнение. |
| **Формирование умений и навыков** | | |
|  | | Найти остаток от деления многочлена x3 - 3x2 + 6x - 5  на двучлен (x - 2) .  R = P3 (2) = 23 - 322 + 62 - 5 = 3 . |
|  | | Разложить на множители многочлен P(x) = x4 + 4x2 - 5.  Среди делителей свободного члена число 1 является корнем данного многочлена P(x) , а это значит , что P(x) делится на (x - 1) без остатка: P(x)/(x - 1) = x3 + x2 + 5x + 5  Значит P(x) = (x - 1)( x3 + x2 + 5x + 5).  Среди делителей свободного члена многочлена x3 + x2 + 5x + 5 x = -1 является его корнем , а это значит , что x3 + x2 + 5x + 5 делится на (x + 1) без остатка : (x3 + x2 + 5x + 5)/(x + 1) = x2 +5 ,  Значит x3 + x2 + 5x + 5 = (x +1)(x2 +5).Отсюда P(x) = (x - 1)(x +1)(x2 +5) .  (x2 + 5) на множители не раскладывается, т.к. действительных корней не имеет, поэтому P(x) далее на множители не раскладывается . |
| Учитель: | | Теорема Безу находит применение при рассмотрении одной из важнейших задач математики - решении уравнений. Существует несколько следствий из теоремы, которые помогают при решении практических задач. Из рассмотренных примеров можно сделать вывод, что теорема Безу находит применение при решении задач, связанных с делимостью многочленов, например, нахождение остатка при делении многочленов. Также, теорема работает при разложении многочленов на множители. |
| Учитель: | | Теорема Безу позволяет ответить и на важный теоретический вопрос - Сколько корней может иметь многочлен?  Д/З: Докажите утверждение: Многочлен степени n имеет не более n корней.  (Воспользуйтесь методом от противного) |

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:**

1. Кроль В.М. Психология и педагогика. - М.: Высшая школа. 2001.
2. Лептина И., Семенова Н. Применение эффективных технологий обучения // Учитель. 2003. №1.
3. Махмутов М.И. Организация проблемного обучения в школе. - М.: Педагогика. 1977.
4. Репкина Н.В. Что такое развивающее обучение? Научно-популярный очерк. Томск: Пеленг. 1993.
5. Столяренко Л.Д. Педагогика. - Ростов н/Д: Феникс. 2003.
6. Холодная М.А. Задачи интеллектуального воспитания учащихся в условиях современной школы // Сайт проекта "Математика, психология, интеллект", прямая ссылка – ГБОУ лицей 1575<http://fp.nsk.fio.ru/works/022/mpi/psihol_2_2.htm>
7. Хуторской А.В. Эвристическое обучение: Теория, методология, практика. - М.: Международная педагогическая академия. 1998.