Список Тысячелетия.

1. Проблема Кука (сформулирована в 1971 году)

Допустим, что вы, находясь в большой компании, хотите убедиться, что там же находится ваш знакомый. Если вам скажут, что он сидит в углу, то достаточно будет доли секунды, чтобы, бросив взгляд, убедиться в истинности информации. В отсутствие этой информации вы будете вынуждены обойти всю комнату, рассматривая гостей. Это говорит о том, что решение какой-либо задачи часто занимает больше времени, чем проверка правильности решения.

Стивен Кук сформулировал проблему: может ли проверка правильности решения задачи быть более длительной, чем само получение решения, независимо от алгоритма проверки. Эта проблема также является одной из нерешенных задач из области логики и информатики. Ее решение могло бы революционным образом изменить основы криптографии, используемой при передаче и хранении данных.

2. Гипотеза Римана (сформулирована в 1859 году)

Некоторые целые числа не могут быть выражены как произведение двух меньших целых чисел, например 2, 3, 5, 7 и так далее. Такие числа называются простыми и играют важную роль в чистой математике и ее приложениях. Распределение простых чисел среди ряда всех натуральных чисел не подчиняется никакой закономерности. Однако немецкий математик Риман высказал предположение, касающееся свойств последовательности простых чисел. Если гипотеза Римана будет доказана, то это приведет к революционному изменению наших знаний в области шифрования и к невиданному прорыву в области безопасности Интернета.

3. Гипотеза Берча и Свиннертон-Дайера (сформулирована в 1960 году)

Связана с описанием множества решений некоторых алгебраических уравнений от нескольких переменных с целыми коэффициентами. Примером подобного уравнения является выражение x2 + y2 = z2. Эвклид дал полное описание решений этого уравнения, но для более сложных уравнений поиск решений становится чрезвычайно трудным.

4. Гипотеза Ходжа (сформулирована в 1941 году)

В ХХ веке математики открыли мощный метод исследования формы сложных объектов. Основная идея заключается в том, чтобы использовать вместо самого объекта простые «кирпичики», которые склеиваются между собой и образуют его подобие. Гипотеза Ходжа связана с некоторыми предположениями относительно свойств таких «кирпичиков» и объектов.

5. Уравнения Навье – Стокса (сформулированы в 1822 году)

Если плыть в лодке по озеру, то возникнут волны, а если лететь в самолете, в воздухе возникнут турбулентные потоки. Предполагается, что эти и другие явления описываются уравнениями, известными как уравнения Навье – Стокса. Решения этих уравнений неизвестны, и при этом даже неизвестно, как их решать. Необходимо показать, что решение существует и является достаточно гладкой функцией. Решение этой проблемы позволит существенно изменить способы проведения гидро- и аэродинамических расчетов.

6. Проблема Пуанкаре (сформулирована в 1904 году)

Если натянуть резиновую ленту на яблоко, то можно, медленно перемещая ленту без отрыва от поверхности, сжать ее до точки. С другой стороны, если ту же самую резиновую ленту соответствующим образом натянуть вокруг бублика, то никаким способом невозможно сжать ленту в точку, не разрывая ленту или не ломая бублик. Говорят, что поверхность яблока односвязна, а поверхность бублика – нет. Доказать, что односвязна только сфера, оказалось настолько трудно, что математики ищут правильный ответ до сих пор.

7. Уравнения Янга – Миллса (сформулированы в 1954 году)

Уравнения квантовой физики описывают мир элементарных частиц. Физики Янг и Миллс, обнаружив связь между геометрией и физикой элементарных частиц, написали свои уравнения. Тем самым они нашли путь к объединению теорий электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий. Из уравнений Янга – Миллса следовало существование частиц, которые действительно наблюдались в лабораториях во всем мире, поэтому теория Янга – Миллса принята большинством физиков несмотря на то, что в рамках этой теории до сих пор не удается предсказывать массы элементарных частиц.

Проблема Пуанкре.

Проблема Пуанкаре относится к области так называемой топологии многообразий – особым образом устроенных пространств, имеющих разную размерность. Двухмерные многообразия можно наглядно представить себе, например, на примере поверхности трехмерных тел – сферы (поверхности шара) или тора (поверхности бублика).

Легко вообразить, что произойдет с воздушным шариком, если его деформировать (изгибать, скручивать, тянуть, сжимать, пережимать, сдувать или надувать). Ясно, что при всех вышеперечисленных деформациях шарик будет изменять свою форму в широких пределах. Однако мы никогда не сможем превратить шарик в бублик (или наоборот) без нарушения непрерывности его поверхности, то есть не разрывая. В этом случае топологи говорят, что сфера (шарик) негомеоморфна тору (бублику). Это означает, что данные поверхности невозможно отобразить одну на другую. Говоря простым языком, сфера и тор различны по своим топологическим свойствам. А поверхность воздушного шарика при всевозможных его деформациях гомеоморфна сфере, равно как поверхность спасательного круга – тору. Иными словами, любая замкнутая двумерная поверхность, не имеющая сквозных отверстий, обладает теми же топологическими свойствами, что и двухмерная сфера.

Проблема Пуанкаре утверждает то же самое для трехмерных многообразий (для двухмерных многообразий, таких как сфера, это положение было доказано еще в XIX веке). Как заметил французский математик, одно из важнейших свойств двухмерной сферы состоит в том, что любая замкнутая петля (например, лассо), лежащая на ней, может быть стянута в одну точку, не покидая при этом поверхности. Для тора это справедливо не всегда: петля, проходящая через его отверстие, стянется в точку либо при разломе тора, либо при разрыве самой петли. В 1904 году Пуанкаре высказал предположение, что если петля может стягиваться в точку на замкнутой трехмерной поверхности, то такая поверхность гомеоморфна трехмерной сфере. Доказательство этой гипотезы оказалось чрезвычайно сложной задачей.

Сразу уточним: упомянутая нами формулировка проблемы Пуанкаре говорит вовсе не о трехмерном шаре, который мы можем представить себе без особого труда, а о трехмерной сфере, то есть о поверхности четырехмерного шара, который представить себе уже гораздо труднее. Но в конце 1950-х годов неожиданно выяснилось, что с многообразиями высоких размерностей работать гораздо легче, чем с трех- и четырехмерными. Очевидно, отсутствие наглядности – далеко не главная трудность, с которой сталкиваются математики в своих исследованиях.

Задача, подобная проблеме Пуанкаре, для размерностей 5 и выше была решена в 1960 году Стивеном Смэйлом (Stephen Smale), Джоном Стэллингсом (John Stallings) и Эндрю Уоллесом (Andrew Wallace). Подходы, использованные этими учеными, оказались, однако, неприменимы к четырехмерным многообразиям. Для них проблема Пуанкаре была доказана лишь в 1981 году Майклом Фридманом (Michael Freedman). Трехмерный же случай оказался самым сложным; его решение и предлагает Григорий Перельман.

Необходимо отметить, что у Перельмана есть соперник. В апреле 2002 года профессор математики британского университета Саутгемптон Мартин Данвуди предложил свой метод решения проблемы Пуанкаре и теперь ожидает вердикт от института Клэя.

Специалисты считают, что решение проблемы Пуанкаре позволит сделать серьезный шаг в математическом описании физических процессов в сложных трехмерных объектах и даст новый импульс развитию компьютерной топологии. Метод, который предлагает Григорий Перельман, приведет к открытию нового направления в геометрии и топологии. Петербургский математик вполне может претендовать на премию Филдса (аналог Нобелевской премии, которую по математике не присуждают).

Между тем, некоторые находят поведение Григория Перельмана странным. Вот что пишет британская газета «Гардиан»: «Скорее всего, подход Перельмана к разгадке проблемы Пуанкаре верный. Но не все так просто. Перельман не предоставляет доказательств того, что работа издана в качестве полноценной научной публикации (препринты таковой не считаются). А это необходимо, если человек хочет получить награду от института Клэя. Кроме того, он вообще не проявляет интереса к деньгам».

Видимо, для Григория Перельмана, как для настоящего ученого, деньги – не главное. За решение любой из так называемых «задач тысячелетия» истинный математик продаст душу дьяволу.