

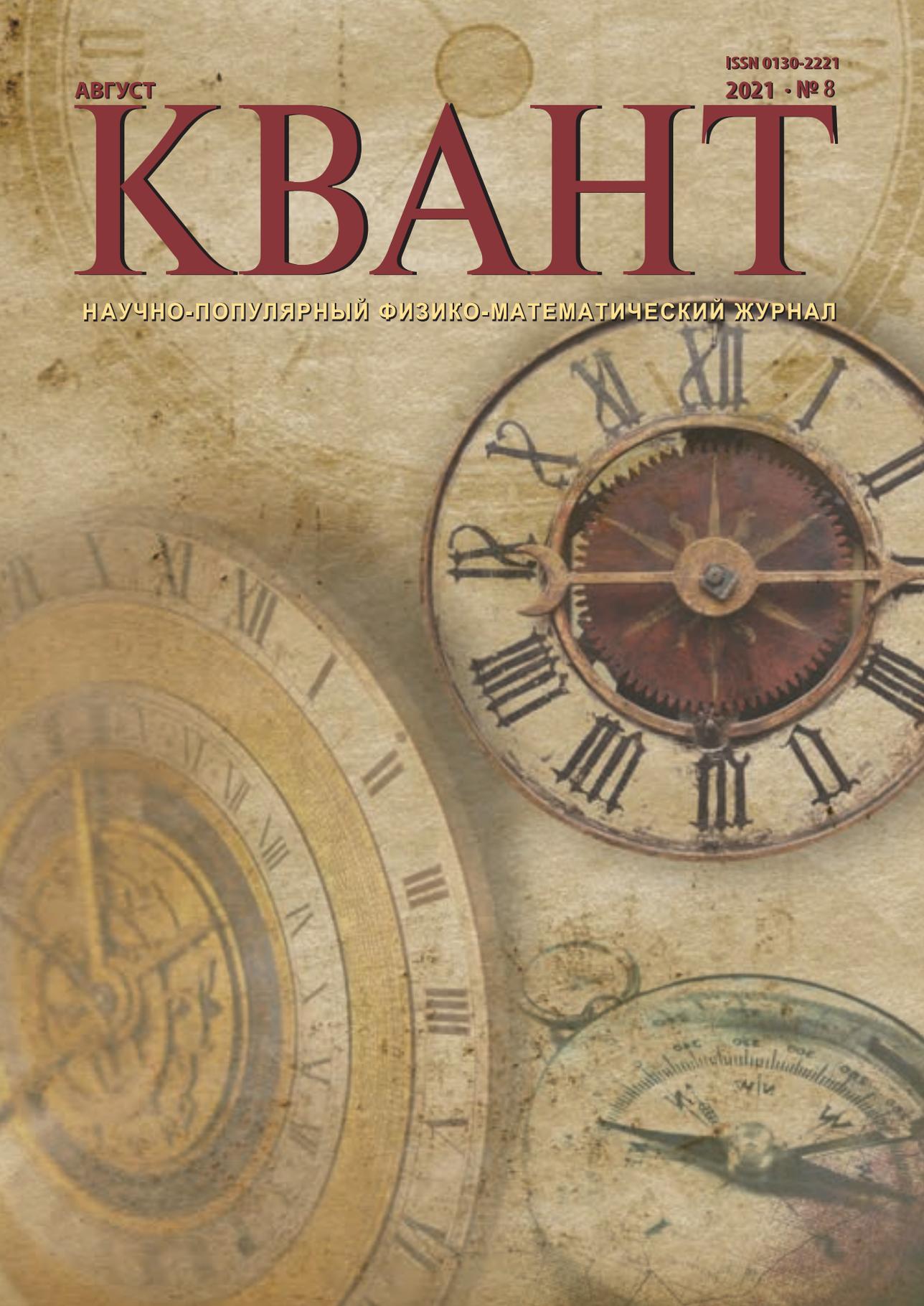
ISSN 0130-2221

2021 · № 8

АВГУСТ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# СТЕЛС ГОЛОВЛОМКА

В этой головоломке требуется упаковать все восемь деталей, которые вы видите на фотографии, в коробку 5×4×2. Одна из деталей (темная) своей формой напоминает известный американский бомбардировщик Б-2 «Спирит», который сконструирован по технологии «стелс», призванной снизить его заметность для радаров. Специальная форма фюзеляжа и крыльев, а также используемые радиопоглощающие материалы приводят к тому, что в сторону источника отражается крайне малая доля испущенного излучения.

Видимо, форма этой детали и подсказала автору, американскому изобретателю и мастеру работы с деревом Джеффри Басладински (Jeffrey Basladynski), название головоломки. В силу симметрии у нее есть решение, в котором темная деталь, «самолетик», будет полностью скрыта внутри коробки. В этом случае головоломка полностью оправдывает свое название: самолет действительно станет «стелсом».

Желаем успехов в решении!

*Е.Епифанов*



## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР  
А.А.Гайфуллин

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась,  
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДАГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР  
И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА  
А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Теория чисел в работах Чебышёва. *М.Королев*  
10 Поэзия и законы физики. *А.Стасенко*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 13 Задачи М2662–М2665, Ф2669–Ф2672  
14 Решения задач М2650–М2653, Ф2657–Ф2660

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 21 Задачи  
22 Таинственная шкала, или Небольшое  
расследование. *С.Дворянинов*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 25 «Не забудьте про часы!» *С.Парновский*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 27 Построение средней линии трапеции.  
*А.Грибалко*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 31 Энергия ионизации водородоподобных ионов.  
*С.Варламов*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Вычисления и оценки

## ОЛИМПИАДЫ

- 36 LXII Международная математическая  
олимпиада  
38 XXVIII Международная олимпиада школьников  
«Туймаада». Физика

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 41 Национальный исследовательский  
университет «МИЭТ».

- 46 Ответы, указания, решения

Нам пишут (12)

Вниманию наших читателей (20, 64)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье С.Парновского*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Теория чисел в работах Чебышёва

М.КОРОЛЕВ

**Х**АРАКТЕРНОЙ ЧЕРТОЙ МНОГИХ великих математиков прошлого была лаконичность. Число написанных ими работ могло быть небольшим, но каждая из них оказывалась настоящей сокровищницей идей, открывала новые направления в науке и обеспечивала широкое поле деятельности многим поколениям исследователей. К числу таких ученых принадлежит наш выдающийся соотечественник Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894). В этом очерке мы расскажем о его вкладе в один из красивейших разделов математики – теорию чисел.

## Функция, считающая простые числа

Важнейшим объектом в теории чисел была и остается функция  $\pi(x)$ , равная количеству простых чисел, не превосходящих  $x$ .<sup>1</sup> Теорема Евклида о том, что множество простых бесконечно, означает, что эта функция неограниченно возрастает с ростом  $x$ . Но вот вопрос: с какой скоростью она это делает?

Идея, лежащая в основе решета Эратосфена<sup>2</sup>, позволила Адриену Мари Лежандру (1752–1833) в конце XVIII столетия доказать, что отношение  $\pi(x)/x$  с ростом  $x$  приближается к нулю. Это означает, на-

пример, что простые числа встречаются в натуральном ряду гораздо реже, чем члены любой арифметической прогрессии. Но функций с таким свойством много. Какую следует предпочесть? Изучая таблицу простых чисел, не превосходящих миллиона, Лежандр заметил, что в ее пределах поведение  $\pi(x)$  хорошо описывается приближенной формулой

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - \alpha}, \text{ где } \alpha = 1,08366. \quad (1)$$

Как выяснилось позже, значение постоянной  $\alpha$  нуждается в небольшой поправке. Тем не менее, скорость роста  $\pi(x)$  была угадана верно. Еще более точное предположение высказал «король математиков» Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) в 1849 году в письме к немецкому астроному Иоганну Францу Энке (1791–1865), но это письмо долгое время не было известно научной общественности.

Этим, собственно, и ограничивались все наши знания о  $\pi(x)$  до появления работ Чебышёва. Функция, считающая простые числа, не спешила раскрывать свои тайны.

## Что мы знаем о $\pi(x)$ сейчас?

Чтобы рассказать о вкладе Чебышёва в изучение простых чисел, нам придется немного забежать вперед и сперва рассказать о том, что известно о  $\pi(x)$  сейчас. Оказывается, очень точным приближением к  $\pi(x)$  служит специальная функция  $\text{Li}(x)$ , которая называется *интегральным логарифмом*  $x$  (читается: «ли от икс»; рис.1). Слово «специальная» отражает здесь тот факт, что функция  $\text{Li}(x)$  не может быть выражена в виде конечной комбинации элементарных функций: многочленов, логарифмов, экспонент и радикалов. Однако составить представление о

<sup>1</sup> О простых числах,  $\pi(x)$  и упомянутых далее функциях  $\psi(x)$ ,  $\Lambda(n)$ , о дзета-функции Римана и ее нулях рассказывается в статье автора «Обманчивая простота простых чисел» («Квант» № 3 за 2020 г.).

<sup>2</sup> О решете Эратосфена и некоторых его свойствах можно прочитать, например, в статье А.Бендукидзе «О простых числах» («Квант» № 4 за 1973 г.) и А.Колмогорова «Решето Эратосфена» («Квант» № 1 за 1974 г.).

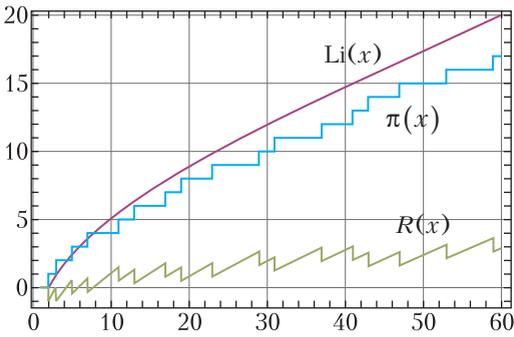


Рис. 1

том, как ведет себя этот загадочный интегральный логарифм, все-таки можно.

Представим себе, что число  $x$  достаточно велико. Тогда «первым приближением» к  $\text{Li}(x)$  служит дробь  $x/\ln x$ , а погрешность такого приближения

$$r_1(x) = \text{Li}(x) - \frac{x}{\ln x}$$

оценивается по модулю величиной  $c_1 x / (\ln x)^2$ , где  $c_1 > 0$  – некоторая постоянная. Можно указать «второе», «третье» и дальнейшие приближения:

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + r_2(x),$$

$$|r_2(x)| \leq \frac{c_2 x}{(\ln x)^3},$$

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{2x}{(\ln x)^3} + r_3(x),$$

$$|r_3(x)| \leq \frac{c_3 x}{(\ln x)^4},$$

...

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{1!x}{(\ln x)^2} + \frac{2!x}{(\ln x)^3} + \dots + \frac{(n-1)!x}{(\ln x)^n} + r_n(x),$$

$$|r_n(x)| \leq \frac{c_n x}{(\ln x)^{n+1}}.$$

Если  $x$  очень большое, то второе слагаемое в таких формулах поменьше первого, третье – поменьше второго и так далее.

Предположение Гаусса, собственно, в том и состояло, что  $\pi(x)$  с точностью до

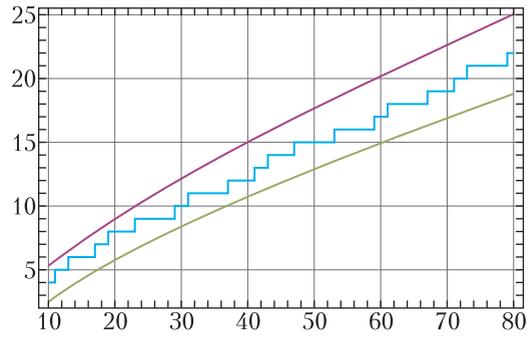


Рис. 2

членов меньшего порядка совпадает с  $\text{Li}(x)$ . Асимптотический закон распределения простых чисел (а.з.р.п.ч.) в современной форме утверждает, что разность  $R(x)$  между «счетчиком» простых чисел  $\pi(x)$  и интегральным логарифмом при всех достаточно больших  $x$  удовлетворяет неравенству

$$|R(x)| \leq x \exp\left\{-\frac{(\ln x)^{0,6}}{5(\ln \ln x)^{0,2}}\right\}.$$

Точность оценки  $R(x)$  зависит от наших знаний о местоположении так называемых комплексных нулей дзета-функции Римана. Несложно проверить (сделайте это!), что правая часть этого неравенства при неограниченном возрастании  $x$  растет медленнее всякой функции вида  $x/(\ln x)^N$ , где  $N > 1$  – любое заданное число.

Отметим, что простейшая форма а.з.р.п.ч. утверждает, что отношение  $\pi(x)$  к величине  $x/\ln x$  с ростом  $x$  неограниченно приближается к единице. Это означает, что для любого сколь угодно малого числа  $\epsilon > 0$  наступит такой момент  $x_0(\epsilon)$ , начиная с которого неравенства

$$(1 - \epsilon) \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < (1 + \epsilon) \frac{x}{\ln x} \quad (2)$$

будут выполняться для всех  $x$  без исключений (рис.2).

### Два мемуара о простых числах

Мировую известность Чебышёву принесли два его «мемуара» (так принято было называть тогда научные статьи): «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» (1848)

и «О простых числах» (1850). В первом было установлено следующее замечательное свойство функции  $\pi(x)$ . Оказывается, невозможно подобрать положительные постоянные  $N$  и  $\varepsilon$  так, чтобы график функции  $y = \pi(x)$  при всех достаточно больших  $x$  лежал либо целиком над графиком функции

$$y_1(x) = \text{Li}(x) + \frac{\varepsilon x}{(\ln x)^N},$$

либо целиком под графиком функции

$$y_2(x) = \text{Li}(x) - \frac{\varepsilon x}{(\ln x)^N}.$$

Иначе говоря, график  $y = \pi(x)$  время от времени обязан «возвращаться» в показанную на рисунке 3 полосу. Конечно, это

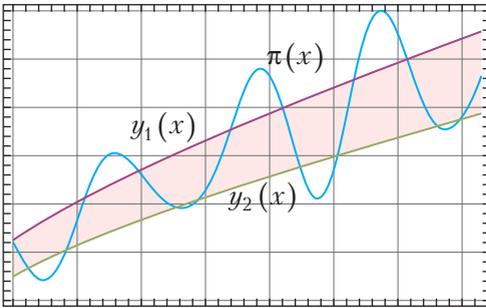


Рис. 3

еще не а.з.р.п.ч.: справедливость последнего означает, что график  $y = \pi(x)$  рано или поздно войдет в любую такую полосу и уже никогда из нее «не вырвется». Но это утверждение позволило Чебышёву строго доказать, что если предел отношения  $\pi(x)$  к  $x/\ln x$  все-таки существует<sup>3</sup>, то он обязательно равен единице. Кроме того, из результатов первого мемуара следовало, что предложенная Лежандром формула (1) не может представлять  $\pi(x)$  с точностью до слагаемого порядка  $x/(\ln x)^3$ : для этого значение  $\alpha$  в ней следовало бы заме-

нить единицей. Важно подчеркнуть: Чебышёв не смог доказать, что функция

$$y(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$$

аппроксимирует  $\pi(x)$  с указанной точностью, т.е. что

$$|\pi(x) - y(x)| \leq \frac{cx}{(\ln x)^3}$$

для некоторой положительной постоянной  $c$ , но доказал, что если бы такая аппроксимация существовала, то она совпала бы с  $y(x)$ .

Во втором мемуаре Чебышёв нашел границы для  $\pi(x)$ , подобные (2), но менее точные:

$$(a - \varepsilon) \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < (b + \varepsilon) \frac{x}{\ln x},$$

где  $a = 0,92129202\dots$  и

$$b = 1,10555042\dots, \quad (3)$$

в которых  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно маленькая константа, а  $x \geq x_0(\varepsilon)$ . Ниже мы докажем неравенства (3), правда, в несколько менее точной форме. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы связать поведение одной хорошо известной функции  $T(x)$  с введенной Чебышёвым функцией  $\psi(x)$ , которая как раз и отвечает за распределение простых чисел. Последняя с тех пор получила название функции Чебышёва.

### Доказательство теоремы Чебышёва

Для положительного  $x$  функция Чебышёва  $\psi(x)$  определяется как сумма по всем натуральным  $n \leq x$  значений величины  $\Lambda(n)$ , равной  $\ln p$ , если  $n$  есть степень простого числа  $p$ , и равной нулю в противном случае:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad (4)$$

(если  $0 < x < 2$ , то  $\psi(x)$  тождественно равна нулю). О роли, которую играют величины  $\psi(x)$  и  $\Lambda(n)$  в исследовании простых чисел, рассказывается в уже упоминавшейся статье автора. В ней же было уста-

<sup>3</sup> Именно существование такого предела и оставалось главной трудностью в доказательстве а.з.р.п.ч., которую с успехом независимо друг от друга преодолели в 1896 году Жак Саломон Адамар (1865–1963) и Шарль Жан де ла Валле Пуссен (1866–1962).

новлено одно очень полезное свойство  $\Lambda(n)$ . Оказывается, при любом  $n$  выполняется тождество

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d), \quad (5)$$

где символ  $d|n$  означает сумму по всем делителям числа  $n$ .

Следуя Чебышёву, для  $x \geq 2$  обозначим через  $T(x)$  сумму логарифмов всех натуральных чисел, не превосходящих  $x$ :

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \ln n. \quad (6)$$

Пользуясь тождеством (5), преобразуем  $T(x)$ . Прежде всего,

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Напомним, что запись  $d|n$  означает, что  $n = dm$ , где  $m$  – целое число. Переходя к суммированию по  $m$  и  $d$ , получим

$$T(x) = \sum_{dm \leq x} \Lambda(d) = \sum_{m \leq x} \sum_{d \leq x/m} \Lambda(d).$$

Зафиксируем какое-нибудь  $m$  во внешней сумме и приглядимся повнимательней к сумме по переменной  $d$ : да ведь это значение функции Чебышёва в точке  $x/m$ . Итак, нами доказано тождество

$$T(x) = \sum_{m \leq x} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots \quad (7)$$

Таким образом, величину  $T(x)$  можно восстановить по значениям  $\psi$ -функции в точках  $x/m$ ,  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Вот если бы удалось сделать обратное – выразить  $\psi$ -функцию через  $T(x)$ , хотя бы приближенно... Именно это и проделал Чебышёв.

Рассмотрим выражение

$$Q(x) = T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right).$$

Заменяя в правой части каждое из слагаемых по формуле (7), получим

$$Q(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \psi\left(\frac{x}{5}\right) + \dots - 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\psi\left(\frac{x}{4}\right) - 2\psi\left(\frac{x}{6}\right) - \dots =$$

$$= \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \psi\left(\frac{x}{5}\right) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \dots$$

Сгруппируем члены в правой части так: второй с третьим, четвертый с пятым и т.д.:

$$Q(x) = \psi(x) - \left(\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \left(\psi\left(\frac{x}{4}\right) - \psi\left(\frac{x}{5}\right)\right) - \dots$$

Однако  $\psi$  – неубывающая функция. Значит, каждое из выражений в скобках неотрицательно. Отсюда заключаем

$$\psi(x) \geq Q(x). \quad (8)$$

Иная группировка слагаемых приводит нас к такому неравенству:

$$Q(x) = \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \dots \geq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right). \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) играют в доказательстве теоремы Чебышёва ключевую роль.

Теперь настало время познакомиться поближе с функцией  $T(x)$ .

Пусть  $x \geq 2$ , а  $N$  – целая часть  $x$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ , так что  $N \leq x < N + 1$ . Тогда в сумме  $T(x)$  легко опознать логарифм факториала:

$$T(x) = \sum_{n=1}^N \ln n = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N) = \ln(N!).$$

Но для числа  $N!$  имеются весьма точные двусторонние неравенства<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Иногда эти неравенства заменяют одним соотношением

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\frac{\theta}{12N}}, \text{ где } 0 < \theta < 1,$$

которое называется формулой Стирлинга в честь шотландского математика Джеймса Стирлинга (1692–1770). Ее доказательство не так просто, и мы его не приводим. О числе « $e$ », входящем в эту формулу, читатель сможет узнать из статьи Е. Кузьмина, А. Ширшова «О числе  $e$ » («Квант» № 8 за 1979 г.).

$$\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N < N! < \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\frac{1}{12N}},$$

логарифмируя которые, получим оценки для  $T(x)$ :

$$\begin{aligned} N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln 2\pi < T(x) < \\ < N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12N}. \end{aligned}$$

Можно показать, что функция  $f(n) = u \ln u - u + \frac{1}{2} \ln u$  монотонно возрастает при  $u \geq 1$ . Поэтому, заменяя  $N$  на  $x$  и немного огрубляя получившуюся оценку, будем иметь:

$$\begin{aligned} T(x) < x \ln x - x + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{24} < \\ < x \ln x - x + \frac{1}{2} \ln x + 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим теперь, что

$$\ln(x-1) > \ln x - \frac{2}{x}. \quad (11)$$

Действительно, (11) равносильно неравенству  $(1-1/x)^x > e^{-2}$ , которое подстановкой  $x = 1+t$  сводится к неравенству  $(1+1/t)^{1+t} < e^2$ . Последнее же легко следует из соотношения  $(1+1/t)^t < e^5$ .<sup>5</sup> Поэтому, оценивая  $T(x)$  снизу с помощью (11), найдем

$$\begin{aligned} T(x) > (x-1) \ln(x-1) - (x-1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) + \\ + \frac{1}{2} \ln 2\pi > x \left( \ln x - \frac{2}{x} \right) - x - \frac{2}{x} \ln(x-1) + 1 > \\ > x \ln x - x - \frac{1}{2} x - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (10) и (12) уже нетрудно вывести (сделайте это самостоятельно) неравенства

$$x \ln 2 - 5 \ln x < Q(x) < x \ln 2 + 5 \ln x, \quad (13)$$

которые справедливы при всех  $x \geq 2$ .

<sup>5</sup> Согласно одному из возможных определений, число  $e$  – предел последовательности  $a_n = (1+1/n)^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , монотонное возрастание которой можно доказать «школьными» средствами. Монотонное возрастание функции  $(1+1/t)^t$  при  $t > 0$  является менее очевидным фактом и потому приводится здесь без доказательства.

Из (9) и (13) находим

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) < x \ln 2 + 5 \ln x.$$

Заменим в этом неравенстве величину  $x$  последовательно на  $x/2, x/4, x/8, \dots$  и выпишем получившиеся соотношения в столбик:

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) < x \ln 2 + 5 \ln x,$$

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^2}\right) < \frac{x}{2} \ln 2 + 5 \ln \frac{x}{2},$$

$$\psi\left(\frac{x}{2^2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^3}\right) < \frac{x}{2^2} \ln 2 + 5 \ln \frac{x}{2^2},$$

...

$$\psi\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^k}\right) < \frac{x}{2^{k-1}} \ln 2 + 5 \ln \frac{x}{2^{k-1}}.$$

Номер  $k$  шага, на котором следует остановиться, определим из условий  $1 \leq x/2^k < 2$ , так что  $k \leq \log_2 x$ . Сложив неравенства почленно и пользуясь тем, что  $\psi(x/2^k) = 0$ , найдем

$$\begin{aligned} \psi(x) < x \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) \ln 2 + \\ + 5k \ln x < 2(\ln 2)x + 8(\ln x)^2. \end{aligned}$$

Итак, для любого  $x \geq 2$  функция Чебышёва удовлетворяет неравенствам

$$x \ln 2 - 5 \ln x < \psi(x) < 2(\ln 2)x + 8(\ln x)^2.$$

Все, что нам осталось, – перейти от  $\psi(x)$  к  $\pi(x)$ . Но это делается с помощью тех рассуждений, что применялись при решении задачи 3 к предыдущей статье автора.<sup>6</sup> Так, для заданного  $\varepsilon > 0$  и всех  $x \geq x_0(\varepsilon)$  найдем:

$$(\ln 2 - \varepsilon) \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < (2 \ln 2 + \varepsilon) \frac{x}{\ln x}.$$

Почему найденные нами границы для  $\pi(x)$  уступают по точности неравенствам (3)? Дело в том, что сам Чебышёв в качестве  $Q(x)$  рассматривал более сложную комбинацию величин  $T(x)$ , а именно

$$T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right).$$

<sup>6</sup> См. «Квант», 2020, № 3, с. 57.

Поэтому получившиеся у него значения постоянных оказались равными<sup>7</sup>

$$a = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 3 + \frac{1}{5} \ln 5 - \frac{1}{30} \ln 30$$

$$\text{и } b = \frac{6}{5} a.$$

В 1881 году американский математик Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) путем довольно тонких и сложных вычислений, в основе которых лежал метод Чебышёва, доказал неравенства (3) с постоянными  $a = 0,956\dots$  и  $b = 1,045\dots$ . Вероятно, отчаявшись вывести а.з.р.п.ч. с помощью рассуждений такого рода, Сильвестр закончил свою статью словами: «...по-видимому, нам придется ждать рождения на свет такого человека, который бы настолько превосходил Чебышёва в проницательности и прозорливости, насколько сам Чебышёв превосходил в этих качествах обычный человеческий уровень». Спустя полтора десятка лет асимптотический закон был доказан, причем ключевую роль в этом сыграли дзета-функция Римана и ее нули. Но интерес к «элементарным» методам (т.е. не использующим средств теории функций комплексного переменного) исследования  $\pi(x)$  не иссяк. Просто теперь движущей силой стал поиск элементарного доказательства а.з.р.п.ч. Этот поиск увенчался успехом в 1948 году, когда Атле Сельберг (1917–2007) первым нашел такое доказательство. Сейчас элементарные методы занимают весьма важное место в арсенале современной теории чисел.

### Простые числа в последовательности «сдвинутых квадратов»

Что общего у простых чисел ряда

$$2, 5, 17, 37, 101, 197, \dots? \quad (14)$$

Приглядевшись к ним, можно увидеть, что все они – квадраты, «сдвинутые» на еди-

<sup>7</sup> Более подробно с выкладками можно ознакомиться по статье М. Башмакова «О постулате Бертрана» («Квант» № 5 за 1971 г.) или же по оригинальной работе П.Л. Чебышёва (Полное собрание сочинений П.Л. Чебышёва. Том I. Теория чисел. – М.-Л., Изд-во АН СССР, 1946. – С.191–208).

ницу вправо:

$$2 = 1^2 + 1, 5 = 2^2 + 1, 17 = 4^2 + 1, 37 = 6^2 + 1,$$

$$101 = 10^2 + 1, 197 = 14^2 + 1 \text{ и т.д.}$$

Конечна или нет эта последовательность? По-видимому, да, но точный ответ на этот вопрос не получен до сих пор.<sup>8</sup>

Если какая-то задача долго не поддается решению, то имеет смысл долгие немного «пошевелить» ее условие и рассмотреть близкую к ней, но более простую задачу. В нашем случае можно пойти по пути, который наметил Чебышёв.

Рассмотрим произведение

$$P(N) = \prod_{n \leq N} (n^2 + 1)$$

и обозначим через  $H(N)$  его наибольший простой делитель. Если последовательность (14) все же бесконечна, то ясно, что для бесконечного множества значений  $N$  будет выполнено неравенство  $H(N) = N^2 + 1 > N^2$ .

Можно ли что-то сказать о величине  $H(N)$  без каких-либо предположений о последовательности (14)? Оказывается, можно. И первым, кому это удалось, стал Чебышёв. После его кончины среди бумаг был обнаружен листок с наброском доказательства того факта, что отношение  $H(N)/N$  неограниченно возрастает с ростом  $N$  (фактически, из рассуждений Чебышёва следовала оценка вида  $H(N) \geq cN \ln N$ , где  $c > 0$  – постоянная). Восстановленное Андреем Андреевичем Марковым (1856–1922) полное доказательство этого утверждения было опубликовано в 1895 году.

Спустя некоторое время эта задача привлекла внимание ученых. Ею занимались Иван Иванович Иванов (1862–1939), Пал Эрдёш (1913–1996), Тригве Нагелл (1895–1988) и Кристофер Хооли (1928–2018), которому принадлежит первая (1967) оценка вида  $H(N) \geq N^{1+\beta-\epsilon} \ln N$  с  $\beta = 0,1$  (здесь  $\epsilon$  – сколь угодно малое положительное

<sup>8</sup> Составлена таблица всех простых чисел такого вида, не превосходящих  $10^{20}$ . Наибольшее из них – простое число  $p = (2k)^2 + 1$ , где  $k = 4999999978$ .

число). Результат Хооли впоследствии неоднократно уточнялся:  $\beta = 0,202468\dots$  (Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец, 1982),  $\beta = 0,2182\dots$  (Р. де ла Бретеш и С. Драпье, 2019),  $\beta = 0,279\dots$  (Й. Мерикоски, 2019).

### «Чебышёвское смещение»

Какие остатки дают простые числа при делении на 4? Если не брать в расчет двойку – единственное четное простое число, то такими остатками будут единица и тройка. Иначе говоря, все нечетные простые числа содержатся в двух арифметических прогрессиях:  $4n + 1$  и  $4n + 3$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Бесконечно или нет множество простых в каждой из них? Утвердительный ответ на этот вопрос дал еще в 1838 году Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859).

Более того, этот факт верен для всякой арифметической прогрессии  $qn + a$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , первый член и разность которой взаимно просты:  $(q, a) = 1$ . Количество таких прогрессий, отвечающих одной и той же разности  $q$ , совпадает со значением  $\varphi(q)$  функции Эйлера.<sup>9</sup> Оказывается, что простые числа распределены по таким прогрессиям более-менее равномерно. Если обозначить через  $\pi(x; q, a)$  количество простых  $p$ , не превосходящих  $x$  и имеющих вид  $p = qn + a$ , то в «первом приближении» эта величина ведет себя как  $\pi(x)/\varphi(q)$ . В частности,

$$\pi(x; 4, 1) \approx \frac{\pi(x)}{2} \text{ и } \pi(x; 4, 3) \approx \frac{\pi(x)}{2}.$$

Однако Чебышёв, исследуя поведение бесконечной суммы

$$\sum_{\substack{p \geq 3 \\ p - \text{ простое}}} (-1)^{(p+1)/2} e^{-px}$$

при положительном  $x$ , стремящемся к нулю, заметил, что простых вида  $4n + 3$  как будто бы все же «побольше», чем простых вида  $4n + 1$ .

<sup>9</sup> О функции Эйлера и ее свойствах можно узнать из статей С. Гиндикина «Малая теорема Ферма» («Квант» № 10 за 1972 г.) и А. Кириллова «О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числа Ферма» («Квант» № 7 за 1977 г. и № 6 за 1994 г.).

Чтобы понять глубинные причины такого «неравноправия» в мире простых чисел, математикам пришлось принять на веру, без доказательства, некоторые утверждения о нулях функций, подобных дзета-функции Римана  $\zeta(s)$ . Выяснилось, что хотя каждое из неравенств

$$\pi(x; 4, 3) > \pi(x; 4, 1), \quad \pi(x; 4, 1) > \pi(x; 4, 3)$$

может выполняться при сколь угодно больших  $x$ , первое выполняется «гораздо чаще».

Что это означает? Для количественной характеристики множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  решений этих неравенств математики придумали способ, суть которого заключается в следующем. Хорошо известна формула

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n} = \ln N + \rho(N),$$

где  $|\rho(N)| \leq 1$  при всех  $N \geq 1$ . Если переписать ее в виде

$$\frac{1}{\ln N} \sum_{n \leq N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{\rho(N)}{\ln N},$$

а затем устремить  $N$  к бесконечности, то правая часть будет приближаться к единице. Составим теперь выражения

$$\delta_{\mathcal{A}}(N) = \frac{1}{\ln N} \sum_{n \leq N, n \in \mathcal{A}} \frac{1}{n} \text{ и } \delta_{\mathcal{B}}(N) = \frac{1}{\ln N} \sum_{n \leq N, n \in \mathcal{B}} \frac{1}{n}$$

и станем следить, что будет происходить с ними, когда  $N$  неограниченно возрастает. Оказывается, что они приближаются к некоторым положительным величинам  $\delta_{\mathcal{A}}$ ,  $\delta_{\mathcal{B}}$ , сумма которых равна единице. Эти-то величины и было решено взять в качестве частоты выполнения соответствующих неравенств.<sup>10</sup> Кропотливые подсчеты, предпринятые М. Рубинштейном и П. Сарнаком (1994), показывают, что  $\delta_{\mathcal{A}} = 0,9959\dots$ , а  $\delta_{\mathcal{B}} = 0,0041\dots$

Еще более яркий пример чебышёвского смещения наблюдается в случае прогрессий  $3n + 2$  и  $3n + 1$ . Определяя  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  как множества тех чисел  $x > 0$ , для которых выполнены, соответственно, неравенства

$$\pi(x; 3, 2) > \pi(x; 3, 1), \quad \pi(x; 3, 1) > \pi(x; 3, 2),$$

будем иметь:  $\delta_{\mathcal{A}} = 0,9990\dots$ ,  $\delta_{\mathcal{B}} = 0,0001\dots$

<sup>10</sup> В оригинале вместо суммы по целочисленной переменной  $n$  использовался интеграл по «непрерывной» переменной  $x$ .

Аналоги этого замечательного явления были обнаружены и в более экзотических ситуациях, уже не связанных напрямую с простыми числами в прогрессиях.

**«Теория сравнений»  
и другие вопросы**

Напомним, что два целых числа  $a$  и  $b$  называются сравнимыми по модулю  $m \geq 2$ , если их разность делится на  $m$  без остатка.<sup>11</sup> Этот факт принято записывать в виде  $a \equiv b \pmod{m}$ . Такие выражения называются сравнениями.

Изучение свойств сравнений и составляет предмет теории, вынесенной в заголовок настоящего раздела. Особое место в этой теории уделяется вопросам разрешимости сравнений вида

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m}, \text{ где}$$

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

– многочлен с целыми коэффициентами, а  $x$  – переменная. Огромный вклад в теорию сравнений внесли Пьер Ферма (1601–1665), Леонард Эйлер (1707–1783), Жозеф Луи Лагранж (1736–1813), уже упоминавшиеся выше К.Ф.Гаусс, А.М.Легандр и другие ученые.

Однако долгое время не существовало курса, который с ясностью и полнотой излагал бы как основы, так и важнейшие достижения этой теории, такие, как, например, закон взаимности квадратичных вычетов. Чебышёв, глубоко изучив труды предшественников, создал такой курс (1848), обогатив теорию чисел многими методологическими находками. К слову, ряд теорем Чебышёва из «Теории сравнений» вошел впоследствии в широко известный учебник Ивана Матвеевича Виноградова (1891–1983) «Основы теории чисел».

В золотой фонд математики вошла и знаменитая теорема Чебышёва (1868) о том, что для любого иррационального числа  $a$  и произвольного вещественного числа  $b$  существует бесконечное множество пар целых чисел  $(x, y)$ , для которых

$$|ax + b - y| < \frac{2}{|x|}.$$

<sup>11</sup> О сравнениях можно прочесть в уже упоминавшейся статье С.Гиндикина.

Это утверждение нашло приложения в теории квадратичных форм и геометрии чисел.

Глубоко проанализировав и обобщив тождество Каталана<sup>12</sup>

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

Чебышёв нашел (1876) представление всякого вещественного числа  $a$  в виде бесконечной суммы дробей, знаменателями которых служат последовательные квадраты натуральных чисел:

$$a = \frac{\Delta_1(a)}{1^2} - \frac{\Delta_2(a)}{2^2} + \frac{\Delta_3(a)}{3^2} - \frac{\Delta_4(a)}{4^2} + \dots$$

где

$$\Delta_k(a) = 4[u] + (-1)^k \cdot (-1)^{[2u]}, \quad u = k \frac{6a + \pi^2}{24 \ln 2}.$$

Прочие теоретико-числовые работы Чебышёва посвящены изучению бинарных квадратичных форм вида  $x^2 \pm ay^2$ , а также задаче обращения бесконечных рядов вида

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + \dots + f(4x) + f(5x) + \dots,$$

$$F(x) = f(x) - f(2x) + f(3x) - \dots - f(4x) + f(5x) - \dots,$$

$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - \dots - f(7x) + f(9x) + \dots$$

(под обращением понимается выражение функции  $f(x)$  через  $F(x)$ ).

Научное наследие Пафнутия Львовича Чебышёва до сих пор не потеряло своей актуальности. «Читайте классиков, в них написано больше, чем в них написано», – призывал выдающийся советский математик Алексей Георгиевич Постников (1921–1995). Эти слова в полной мере можно отнести к работам Чебышёва. Нет сомнения, что они еще долго будут служить источником новых идей и вдохновения для будущих поколений математиков.

<sup>12</sup> Эжен Шарль Каталан (1814–1894) – бельгийский математик.

# Поэзия и законы физики

А. СТАСЕНКО

*Зачем от гор и мимо башен  
Летит орел, тяжел и страшен,  
На чахлый пень? Спроси его.  
Зачем арапа своего  
Младая любит Дездемона,  
Как месяц любит ночи мглу?  
Затем, что ветру и орлу  
И сердцу девы нет закона.*

А.С.Пушкин

**Э**ТИ СЛОВА, ВЛОЖЕННЫЕ ПОЭТОМ в уста итальянского импровизатора, не оставили равнодушным Законопослушного ученика. Да неужто так можно?

Он прежде всего вспомнил закон Даниэля Бернулли (1700–1782), открытый не одну сотню лет назад. Для текущей жидкости или газа плотностью  $\rho$  он выглядит совсем просто:

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gh = \text{const.}$$

Первое слагаемое – объемная плотность кинетической энергии, второе – давление  $p$ , его размерность  $\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$ , т.е. это тоже плотность энергии (потенциальной), так же как и последнее слагаемое. Если это уравнение продифференцировать в направлении движения  $x$ , да еще учесть, что скорость  $v = \frac{dx}{dt}$ , то получим

$$\rho v \frac{dv}{dx} = \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} - \rho g \frac{dh}{dx}, \quad (*)$$

где все слагаемые имеют размерность объемной плотности силы, т.е.  $\frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$ .

Но это же второй закон Исаака Ньютона (1643–1727) для единицы объема движущейся среды! Он повелевает газу или жидкости ускоряться в направлении падения давления. Он-то и вызывает и легкие бризы, и ураганы – из-за неравномерного

нагрева земной поверхности, и заставляет реки течь по ее наклону.

А вращение Земли привело к формулировке еще одного закона. Двигаясь, например, вдоль меридиана по направлению к экватору ( $v_\theta$ ), воздух атмосферы и вода в реке попадают на все более южные параллели (рис.1), где линейная скорость по-

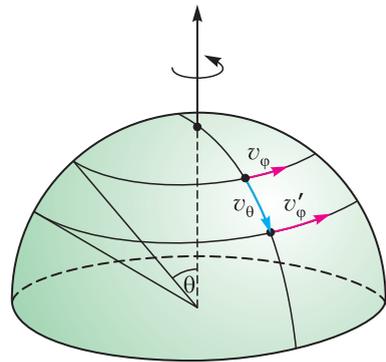


Рис. 1. Элемент массы воды при переходе на более южную параллель испытывает толчок справа; аналогично, воздух отклоняется вправо

верхности ( $v_\phi$ ) все больше и больше; таким образом, правый берег реки набегает на текущую с севера массу воды, имевшую меньшую переносную скорость. И тут возникает закон очень наблюдательного Карла Бэра (1792–1876): в северном полушарии у всех рек правые берега крутые. Но, по-видимому, еще раньше люди заметили, что города и крепости лучше строить на высоком берегу, а на противоположном – гулять по заливным лугам. И мореходы знали, что если стать лицом к ветру, то глаз тайфуна окажется справа.

Физики описывают движение тел силой Густава Кориолиса (1792–1843), действующей на движущееся тело во вращающейся системе координат, и силой Генриха Магнуса (1802–1870), действующей на вращающееся тело, поступательно движущееся в газообразной или жидкой среде.

Однако, сколько законов и сил вспомнилось нашему герою!

Для тех, кто не боится страшных слов, добавим еще кое-что об уравнении (\*). Оно записано для частного случая одномерного потока. В общем случае, конечно, в него должны войти изменения давления по трем координатным осям  $x, y, z$ . Тогда вместо  $\frac{dp}{dx}$  пишут  $\nabla p$ , где  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  — дифференциальный оператор, называемый также «оператор набла» ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы по осям  $x, y, z$  соответственно). Вспоминается физтеховская сказка «Как три вектора детерминант в ноль обратили», в которой фигурирует ужасная Набла-Яга.

Если этот оператор применить к скалярной функции, он называется градиентом этой функции, если к вектору — он превращается в дивергенцию этого вектора. А что такое давление? О нем закон статики Блеза Паскаля (1623–1662) гласит: давление, оказываемое на жидкость или газ, передается в любую точку без изменений во всех направлениях. Такого не скажешь ни о скаляре (например, о температуре, плотности), ни о векторе (например, о скорости, ускорении), который по определению имеет четкое направление. Значит, давление — не скаляр и не вектор, а (страшно сказать!) — тензор. А тогда  $\nabla p$  есть дивергенция тензора давления. Если вы объявите это в автобусе, вам уступят место.

А что же орел, упомянутый в эпиграфе? Неужто он не подчиняется никаким законам? Увы, чтобы держаться в воздухе, он должен любым способом направлять поток импульса воздуха, равный весу его тела, вниз. А для того чтобы как можно скорее добраться до конечной цели на земле (конечно, «чахлый пень» может подождать, но если это юркий заяц?), орел должен в свободном падении обеспечить минимум сопротивления воздуха. Для этого он складывает крылья и старается придать своему телу обтекаемую форму (рис.2).

Как известно, сила сопротивления, действующая на тело при его движении со скоростью  $v$  в среде плотностью  $\rho$ , равна  $\rho v^2 s_{\perp} c$ , где  $s_{\perp}$  — площадь поперечного сечения, а  $c$  — безразмерный коэффициент, зависящий от аэродинамического совершенства тела. При падении с большой высоты установившаяся скорость падения определяется равенством выше упомянутых сил:

$$mg = \rho v^2 s_{\perp} c.$$

Принимая для оценки, что орел превратился в шар, найдем

$$s_{\perp} = \pi r^2, \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r^3.$$

Последнее соотношение есть закон сохранения массы, здесь  $\rho_0$  — среднеобъемная плотность орла (не путать с плотностью воздуха  $\rho$ !). В результате для скорости  $v$  получим

$$v = \left( \frac{mg}{c \rho \pi \left( \frac{3}{4\pi} \frac{m}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для безразмерного коэффициента  $c$  можно принять значение  $\frac{1}{4}$ , близкое к тому, которое получил еще Исаак Ньютон. Оценив численно величину этой скорости, орел может рассчитать и время  $t = \frac{h}{v}$ , за которое он достигнет земли, падая с высоты  $h$ , например в километр.

Принимая для оценок массу «тяжелого и страшного» орла равной  $m = 10$  кг, среднюю плотность его тела  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воздуха  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>, найдем объем орла равным 10 л (типа хозяйственного ведра), радиус  $r = 0,134$  м и,

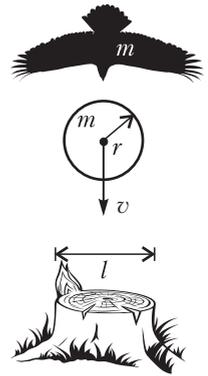


Рис. 2. Эволюция формы орла, избравшего цель

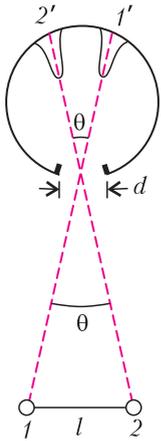


Рис. 3. Дифракция на входном зрачке глаза волн, идущих от двух точек объекта и попавших на сетчатку глаза

наконец, установившуюся скорость падения  $v = 85$  м/с. (В литературе даны значения 240–360 км/ч, т.е. 67–100 м/с.)

Но с какой высоты орел может заметить желанную цель? На этот вопрос отвечают законы волновой оптики. Для того чтобы с расстояния  $h$  различить (или «разрешить», как говорят физики) две точки предмета как отдельные, нужно учесть дифракцию света, поступающего от этих точек, на входном зрачке глаза. Этот дифракционный угол оценивается отношением дли-

ны волны света  $\lambda$  к диаметру зрачка  $d$  (рис.3):  $\sin \theta \sim \frac{\lambda}{d}$ . Принимая среднюю

длину волны видимого света равной  $\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , а диаметр зрачка орла  $d = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$ , получим  $\sin \theta \approx \theta \approx 5 \cdot 10^{-5}$ . Если размер предмета, который заинтересовал орла, равен  $l = 0,5 \text{ м}$ , то искомая высота составит  $h \sim \frac{l}{\theta} = 10^4 \text{ м} = 10 \text{ км}$ . Большой зрачок орла обеспечивает орлиное зрение. (Согласно опубликованным данным, беркут идентифицирует зайца на расстоянии до 2 км.) Конечно, нужно еще, чтобы эти два дифракционных пятна попали не на одну и ту же клетку сетчатки глаза, а, по крайней мере, на две соседние.

И, наконец, «сердце девы»... Тут наш законолюбивый герой задумался, но знающие люди подсказали, что в этом случае физика бессильна и следует обратиться к психопсихотерапии.

## НАМ ПИШУТ

В этом номере в рубрике «Нам пишут» мы публикуем интересный результат Рауфа Рагимова, учителя математического лицея №1 города Зардоб (Азербайджан). «Я уже 40 лет как ваш читатель. Каждый ваш номер жду с большим нетерпением», – добавляет теплые слова в адрес «Кванта» автор.

### Вокруг задачи М852

В «Задачнике «Кванта» в номере 3 за 1984 год была опубликована следующая задача.

**М852.** Пусть  $x, y, z$  – длины сторон треугольника. Докажите, что величина

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right|$$

меньше  $a) 1; b^*) 1/8$ .

В решении использовались следующие соображения. Во-первых, доказывалось, что сумма данных дробей равна их произведению. Далее, модуль разности двух сторон треугольника оценивался сверху третьей стороной, после чего применялось неравенство Коши.

Зададимся вопросом, можно ли улучшить предложенную оценку, если известно, что данный треугольник остроугольный или прямоугольный? Оказывается, можно получить оценку сверху  $1/16$ .

Чтобы доказать это, снова преобразуем сумму в произведение. Далее, используя неравенства на квадраты сторон, справедливые для неупоугольного треугольника:

$$a^2 \leq b^2 + c^2, \quad b^2 \leq c^2 + a^2, \quad c^2 \leq a^2 + b^2,$$

запишем

$$\begin{aligned} \frac{|a-b|}{a+b} \cdot \frac{|b-c|}{b+c} \cdot \frac{|c-a|}{c+a} &= \\ &= \frac{|a^2-b^2|}{(a+b)^2} \cdot \frac{|b^2-c^2|}{(b+c)^2} \cdot \frac{|c^2-a^2|}{(c+a)^2} \leq \\ &\leq \frac{c^2 a^2 b^2}{(a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2} \leq \\ &\leq \frac{a^2 b^2 c^2}{(2\sqrt{ab})^2 (2\sqrt{bc})^2 (2\sqrt{ca})^2} = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы использовали неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Из решения видно, что все неравенства одновременно не могут обращаться в равенства, поэтому интересно отыскать еще более точную оценку.

*Р. Рагимов*

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2663 предлагалась на XX Математической олимпиаде «Шелковый путь».

## Задачи M2662–M2665, Ф2669–Ф2672

**M2662.** В параллелограмме  $ABCD$  из его вершин внутрь него выпущены лучи (рис. 1).

Лучи, выходящие из вершин  $A$  и  $D$ , пересекаются в точке  $E$ , а лучи, выходящие из вершин  $B$  и  $C$ , – в точке  $F$ . Известно, что  $\angle BAE = \angle BCF$  и  $\angle CDE = \angle CBF$ . Докажите, что  $AB \parallel EF$ .

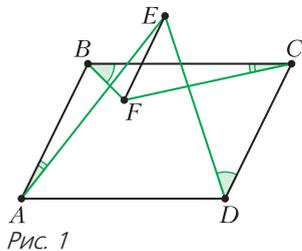


Рис. 1

В. Айзенштадт

**M2663.** Для каждого натурального  $m$  докажете неравенство  $\left\{ \sqrt{m} \right\} - \frac{1}{2} > \frac{1}{8(\sqrt{m} + 1)}$ .

А. Голованов

**M2664.** На плоскости дана точка  $O$ . Найдите все натуральные  $n$ , для которых можно покрасить  $n$  точек плоскости в красный цвет так, чтобы для любых двух красных точек  $A, B$  нашлась третья красная точка  $C$  такая, что  $O$  лежит строго внутри треугольника  $ABC$ .

Фольклор

**M2665.** Даны многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$ . На координатной плоскости отметили точки  $A_1(f(1); g(1)), A_2(f(2); g(2)), \dots, A_n(f(n); g(n))$ . Оказалось, что  $A_1A_2\dots A_n$  – правильный  $n$ -угольник. Докажите, что сте-

пень хотя бы одного из многочленов  $f$  и  $g$  не меньше чем  $n - 1$ .

В. Брагин

**Ф2669.** Девятиклассник Вася – большой любитель автогонок. В прошлом году Вася построил график зависимости средних скоростей автомобилей от времени прохождения дистанции  $s_1$  (рис. 2). В этом году соревнования проходили в другом городе, где длина трассы была  $s_2$ . Построив второй

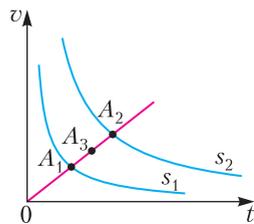


Рис. 2

график в тех же координатах, Вася, от нечего делать, провел прямую через начало координат, которая пересекла графики в точках  $A_1$  и  $A_2$ . У Васи возник вопрос: какой должна быть длина дистанции в следующем году, чтобы третий график прошел через точку  $A_3$ , находящуюся на середине отрезка  $A_1A_2$ ? Попробуйте и вы ответить на этот вопрос.

В. Гребень

**Ф2670.** Сплошной однородный диск, который лежит на гладкой поверхности, может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр, без трения. На краю диска стоит спортсмен. Система находится в покое. Спортсмен делает один прыжок по направлению против часовой стрелки, чтобы попасть на

другой край диска. Когда спортсмен приземлится на вращающийся диск, то окажется в той точке, где он прыгнул. При этом диск не успеет совершить полный оборот. Найдите отношение массы спортсмена к массе диска.

*Б. Мукушев*

**Ф2671.** К уединенному незаряженному плоскому конденсатору емкостью  $C$  снаружи подносят точечный заряд  $q$ , располагая его рядом с центром ближайшей пластины вдали от ее краев. Найдите напряжение на конденсаторе. Какую внешнюю силу и в какую сторону нужно прикладывать к точечному заряду, чтобы удерживать его в покое относительно неподвижного конденсатора, если дополнительно известны расстояние  $d$  между пластинами и расстояние  $a$  между точечным зарядом и ближайшей к нему пластиной?

*С. Крюков*

**Ф2672.** Если по обе стороны тонкой линзы находятся вещества с различными оптическими плотностями, причем меньшими, чем у материала, из которого изготовлена линза, то фокусные расстояния не будут равными. Например, линзу можно вмонтировать в боковую стенку аквариума с водой. При этом собирающая линза останется собирающей, а рассеивающая – рас-

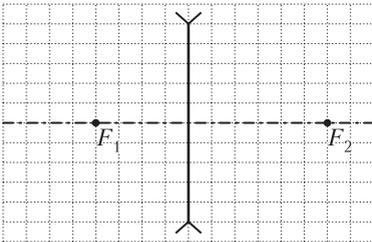


Рис. 3

сеивающей. Определите, с какой стороны линзы, показанной на рисунке 3, находится оптически более плотная среда.

*В. Гребень*

### Решения задач M2650–M2653, Ф2657–Ф2660

**M2650.** При каких натуральных  $n$  найдутся  $n$  последовательных натуральных чисел, произведение которых равно сум-

ме (может быть, других)  $n$  последовательных натуральных чисел?

**Ответ:** при нечетных  $n$ .

Рассмотрим сумму  $n$  последовательных натуральных чисел:

$$S = k + (k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + n - 1) = \\ = nk + (1 + 2 + \dots + (n - 1)) = nk + \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Произведение  $n$  последовательных целых чисел делится на  $n$ , значит, и  $S$  должно делиться на  $n$ , что неверно при четном  $n$ . Для нечетного  $n = 2m + 1$  можно, например, представить произведение  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2m + 1) = (2m + 1)!$  в виде суммы  $n$  последовательных натуральных чисел. Действительно, приравнивая  $S = (2m + 1)!$ , находим  $k + m = (2m)!$ , откуда  $k = (2m)! - m$ . В итоге  $((2m)! - m) + ((2m)! - m + 1) + \dots + ((2m)! + m) = (2m + 1)!$ .

*Б. Френкин*

**M2651.** В комнате находятся несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки – вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

Деление с остатком кучи конфет на  $k$  детей можно представлять себе так: мы раскладываем конфеты на  $k$  кучек, которые либо одинаковы (если остаток 0), либо в части кучек конфет на 1 больше, чем в остальных (количество таких кучек равно остатку).

Пусть первый ребенок разложит так конфеты на кучки, расположив кучи слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмет себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он девочка.

Когда зайдет следующий ребенок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и

число детей, и число куч уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмет правую кучу, а девочка – левую и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

*М. Дидин*

**M2652.** В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, ...,  $n$ , из которых  $k$  на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остается там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого  $k$  укажите наименьшее  $n$ , при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

**Ответ:**  $n = 100(m + 1)$  при  $k = 2m$  и  $n = 100(m + 1) + 1$  при  $k = 2m + 1$ .

Пусть  $k = 2m$  или  $k = 2m + 1$ .

*Алгоритм.* Пусть  $k$  четно. Мысленно разделим номера на 100 участков по  $m + 1$  номеров. Пусть  $i$ -й турист сначала проверяет все номера  $i$ -го участка, двигаясь слева направо, а потом проверяет номера  $(i + 1)$ -го участка, но справа налево (если  $i = 100$ , проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках всего  $k + 2$  номера.

В случае нечетного  $k$  разделим номера на 100 участков по  $m + 1$  номеров, а еще один последний номер объявим запасным. Пусть  $i$ -й турист сначала проверяет все номера  $i$ -го участка, двигаясь слева направо, потом идет в запасной номер, а затем проверяет номера  $(i + 1)$ -го участка, но справа налево. Снова никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как в объединении двух их участков и запасного номера всего  $k + 2$  номеров, а в запасном номере двое туристов также не встретятся (они могли бы оказаться только

после посещения  $2(m + 1) > k$  номеров, находящихся на ремонте, – противоречие). *Оценка.* Для того чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться в номер не на ремонте, он должен с самого начала иметь список из  $k + 1$  различных номеров, в которые будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (поскольку никакой информации о них мы не узнаем).

Подчеркнем в списке каждого туриста первые  $m + 1$  номеров. Все эти  $100(m + 1)$  подчеркнутых номеров различны. Действительно, в случае совпадения подчеркнутых номеров у двух туристов есть случай, в котором алгоритм не сработает – если все номера в их списках, предшествующие совпадающему (а таких номеров не больше  $m + m = 2m = k$ ), находятся на ремонте. Следовательно,  $n \geq 100(m + 1)$ . При четном  $k$  этой оценки достаточно.

В случае нечетного  $k$  поступим почти так же – подчеркнем в списке каждого туриста первые  $m + 1$  номеров, а кроме того, у одного из туристов подчеркнем  $(m + 2)$ -й номер в его списке. Утверждаем, что все  $100(m + 1) + 1$  подчеркнутых номеров различны. Действительно, в случае совпадения подчеркнутых номеров у двух туристов есть случай, в котором алгоритм не сработает – если все номера в их списках, предшествующие совпадающему (таких номеров не больше  $m + 1 + m = k$ ), находятся на ремонте. Следовательно,  $n \geq 100(m + 1) + 1$ .

*Ф. Ивлев*

**M2653\*.** Пусть  $p$  и  $q$  – взаимно простые натуральные числа. лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. Каждый раз она прыгает либо на  $p$  вправо, либо на  $q$  влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального  $d < p + q$  найдутся два числа, посещенные лягушкой и отличающиеся ровно на  $d$ .

Случай  $p = q = 1$  очевиден. Пусть  $p$  и  $q$  различны, и пусть  $p < q$ . Когда лягушка вернулась в 0, ее суммарное перемещение вправо равно суммарному перемещению

влево. Поэтому, так как  $p$  и  $q$  взаимно просты, лягушка сделала  $kq$  «коротких» прыжков вправо и  $kp$  «длинных» прыжков влево.

Известно, что при взаимно простых  $p$  и  $q$  можно представить  $d$  в виде  $d = ap - bq$  с целыми  $a$  и  $b$ . Это равенство, очевидно, сохранится, если одновременно увеличить (или уменьшить)  $a$  на  $q$  и  $b$  на  $p$ . Поэтому можно выбрать  $a$  натуральным и не превосходящим  $q$ . При этом  $b$  будет неотрицательным (иначе  $d \geq p + q$ ), и так как  $a \leq q$ , то  $b < p$  (ведь  $d > 0$ ). Поэтому  $a + b < p + q \leq k(p + q)$ .

Назовем каждую серию из  $a + b$  последовательных прыжков лягушки *окном*. Условно считаем, что за последним прыжком лягушки идет ее первый прыжок (как при движении по кругу), поэтому окно может состоять и из нескольких последних и первых прыжков. Тогда всего окон ровно  $k(p + q)$  штук.

Окно назовем  $t$ -окном, если за это окно лягушка сделала ровно  $t$  коротких прыжков (и  $a + b - t$  длинных). Нам достаточно найти  $a$ -окно – тогда перемещение лягушки за  $a + b$  прыжков такого окна составит  $d$ , а следовательно, тогда расстояние между числами, в которых лягушка находилась перед первым прыжком  $a$ -окна и после последнего прыжка  $a$ -окна, будет равно  $d$ .

Искомое  $a$ -окно найдется, если найдется  $t$ -окно для некоторого  $t \geq a$ , а также найдется  $t$ -окно для некоторого  $t \leq a$ . Действительно, можно сдвигать на одну позицию первое окно по кругу, пока не дойдем до второго. За каждый сдвиг число коротких прыжков  $t$  в окне каждый раз меняется не более чем на 1, поэтому будет момент, когда  $t = a$ .

Сложим число коротких прыжков во всех окнах – получим  $kq(a + b)$ , ведь каждый прыжок учли  $a + b$  раз. Окон  $k(p + q)$ , и в среднем на окно придется  $\frac{kq(a + b)}{k(p + q)}$  коротких прыжков. Это число равно

$$\frac{kq(a + b)}{k(p + q)} = \frac{qa + qb}{p + q} = \frac{pa + qa - d}{p + q} = a - \frac{d}{p + q},$$

что больше  $a - 1$  и меньше  $a$ . Значит, нужные нам окна с  $t \geq 1$  и  $t \leq a$  найдутся.

Н. Белухов

**Ф2657.** Наблюдениям за планетой Венера с Земли мешает ее близость на небе к Солнцу. Угол  $\varphi$  (рис. 1) между направле-

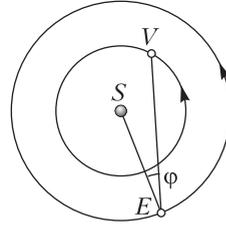


Рис. 1

ниями с Земли (E) на планету, в данном случае на Венеру (V), и на Солнце (S) называется элонгацией. Она бывает восточной и западной в зависимости от расположения планеты на небесной сфере относительно Солнца. Венеру в наибольшей западной элонгации можно наблюдать перед рассветом, а в наибольшей восточной – сразу после заката Солнца. Считается, что планета располагается западнее Солнца, если она появляется на небе раньше него. Наибольшее значение элонгации составляет около  $46,5^\circ$ , последний раз близкие значения наблюдались с 11 по 14 августа 2020 года, причем Венера была видна на рассвете. Орбиты Земли и Венеры можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости. Все планеты вращаются вокруг Солнца в одном направлении, Земля вращается вокруг своей оси в ту же сторону. Отклонение земной оси от перпендикуляра к плоскости вращения планет в данной задаче несущественно.

1) Найдите расстояние от Венеры до Солнца, если расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн км.

2) Когда примерно можно ожидать следующий наиболее подходящий для наблюдения Венеры момент?

1) Рассмотрим движение Венеры в системе отсчета, в которой неподвижными являются Солнце и

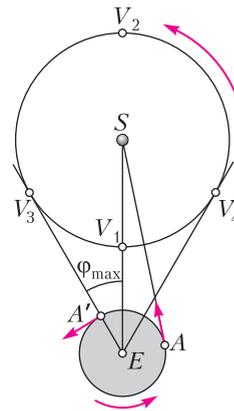


Рис. 2

Земля (рисунок 2 не соблюдает масштаб орбит и размеров планет и Солнца). Венера движется по прежней орбите. Точками  $S$ ,  $E$  и  $V$  (с разными индексами) обозначим положения Солнца, Земли и Венеры соответственно. Если северный полюс Земли (без учета того факта, что земная ось не перпендикулярна плоскости рисунка) обращен к нам, то вращение Земли происходит против часовой стрелки. Ближайшее положение планеты к Земле обозначено точкой  $V_1$ , а наиболее удаленное – точкой  $V_2$ , эти точки называются нижним и верхним соединением соответственно. Наибольшая элонгация достигается, когда прямая  $EV$  оказывается касательной к орбите Венеры, что дает две точки максимального угла отклонения –  $V_3$  и  $V_4$ . Выясним, какая из них соответствует восточной, а какая западной элонгации.

Как следует из направления вращения Земли, наблюдатель, располагающийся в точке  $A$  поверхности Земли, видит восход Солнца, поэтому направление из этой точки на Солнце задает направление на восток (отмечено стрелкой). Тогда можно установить направление на восток и в точке  $A'$  (также отмечено стрелкой). Если наблюдатель в точке  $A'$  поднимет голову и обнаружит Венеру в точке  $V_4$ , то планета окажется расположенной к западу от Солнца, поэтому эта точка соответствует западной элонгации. Правда, наблюдать Венеру в точке  $V_4$  лучше из точки  $A$ , когда Солнце еще только восходит и не засвечивает небо; при этом планета в точке максимальной западной элонгации оказывается на востоке для земного наблюдателя. Точка  $V_3$  является точкой максимальной восточной элонгации. Таким образом, в период с 11 по 14 августа 2020 года Венера находилась вблизи точки  $V_4$ .

Как следует из прямоугольного треугольника  $SEV_3$ ,  $\sin \varphi_{\max} = \frac{R_V}{R_E}$ , где  $R_E$  и  $R_V$  – радиусы орбит Земли и Венеры соответственно. Зная значение максимальной элонгации  $\varphi_{\max}$ , находим радиус орбиты Венеры:

$$R_V \approx 109 \text{ млн км.}$$

2) Для определения периода обращения Венеры, его еще называют *сидерическим* периодом, можно воспользоваться третьим законом Кеплера или же самостоятельно получить его для случая круговых орбит. Движение планеты вокруг Солнца происходит под действием взаимного тяготения планеты и Солнца. Сила притяжения планеты к Солнцу  $F = \frac{GMm}{R^2}$  сообщает ей центростремительное ускорение

$$a = \frac{GM}{R^2}, \text{ где } G \text{ – гравитационная постоянная, } M \text{ – масса Солнца, } m \text{ – масса планеты, } R \text{ – радиус круговой орбиты. Отсюда можно определить скорость движения планеты по орбите: } v = \sqrt{aR} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \text{ и период обращения вокруг Солнца:}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}, \text{ откуда следует, что величина } \frac{T^2}{R^3} \text{ определяется только массой Солнца и одинакова для всех планет. Остается воспользоваться известным значением периода обращения для Земли и получить продолжительность венерианского года:}$$

$$T_V = T_E \left( \frac{R_V}{R_E} \right)^{3/2} \approx 226 \text{ земных суток.}$$

Он меньше периода обращения Земли, поэтому в рассмотренной ранее системе отсчета Венера движется в прежнем направлении (против часовой стрелки).

Определим теперь *синодический* период обращения Венеры, это будет интервал времени между, например, двумя последовательными точками  $V_E$ . Пусть он равен  $T$ . Тогда в инерциальной системе отсчета, связанной с Солнцем, за время  $T$  Венера повернется вокруг Солнца на угол  $2\pi \frac{T}{T_V}$ , а Земля – на угол  $2\pi \frac{T}{T_E}$ . Чтобы конфигурация планет повторилась, Венера должна сделать на 1 полный оборот больше, откуда

$$T = \frac{T_V T_E}{T_E - T_V} \approx 593 \text{ земных суток.}$$

В течение синодического периода Венера движется равномерно в рассмотренной ранее системе отсчета. Значит, время движения от точки  $V_4$  до точки  $V_3$  пропорционально длине большей дуги между ними, которая составляет примерно  $180^\circ + 2 \cdot 46,5^\circ$ . Таким образом, промежуток времени между точками максимального угла  $\Phi$  составляет

$$\Delta T = \frac{180^\circ + 2 \cdot 46,5^\circ}{360^\circ} \approx 450 \text{ земных суток.}$$

Отсчитав полученное значение от указанной в условии даты, получим ближайшую дату максимального значения угла (а значит, и наиболее подходящую для наблюдения дату) – 5 ноября 2021 года.

*А.Дергачев*

**Ф2658.** *Безмен – это ручные весы для взвешивания грузов небольшой массы. Один из вариантов конструкции безмена можно видеть на рисунке 1. Безмен состоит из металлического коромысла, закрепленного на коромысле противовеса (на левом конце коромысла), и подвижной гири (справа). На крючок подвешивается груз, массу которого надо узнать, а положение гири подбирается таким образом, чтобы в равновесии коромысло располагалось горизонтально. Показание безмена, изображенного на рисунке 1, равно 4 кг. Рядом с безменом находится сантиметровая линейка. Известно, что если с этого безмена снять гирю и подвесить его за ось, к которой был привязан крючок, иначе говоря перевернуть (рис.2), то в положении равновесия коромысло будет располагаться горизонтально. Определите по этим данным массу гири  $t$  и массу*

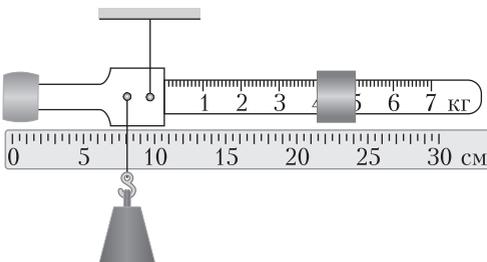


Рис. 1

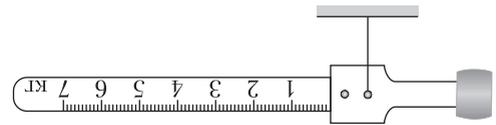


Рис. 2

*М* остальной конструкции (безмена без гири и взвешиваемого груза).

Из второго рисунка видно, что центр тяжести безмена без гири и груза совпадает (по горизонтали) с осью, на которую подвешивается крючок с грузом. Из первого рисунка следует, что расстояние между точками подвеса безмена и крючка 1,5 см, а расстояние между точкой подвеса безмена и центром тяжести гири 14,5 см. Запишем правило моментов относительно оси подвеса:

$$(M + 4 \text{ кг})g \cdot 1,5 \text{ см} = mg \cdot 14,5 \text{ см.}$$

Заменим груз массой 4 кг на груз массой 6 кг и уравновесим безмен, сдвинув гирю по горизонтали на 6 см вправо. Снова запишем уравнение моментов относительно оси подвеса:

$$(M + 6 \text{ кг})g \cdot 1,5 \text{ см} = mg \cdot 20,5 \text{ см.}$$

Отсюда находим

$$t = 0,5 \text{ кг, } M = 0,83 \text{ кг.}$$

*М.Ромашка*

**Ф2659.** *На столе стоит цилиндрический сосуд с вертикальными стенками, заполненный водой примерно наполовину. Площадь сечения сосуда равна  $S = 400 \text{ см}^2$ , внизу сосуда имеется штуцер, к которому присоединен горизонтально расположенный шланг. Другой конец шланга соединен со штуцером «черного ящика», в*

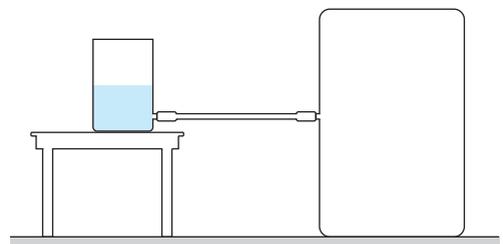


Рис. 1

котором находится неизвестное устройство (рис. 1).

Неизвестное устройство действует следующим образом. Если в сосуд доливают немного воды ( $\Delta m$  порядка 100 г), уровень жидкости в сосуде опускается (!) по сравнению с первоначальным. Если же после этого из сосуда зачерпывают такую же порцию воды, то уровень поднимается до первоначальной высоты. Предложите конструкцию устройства, которое может находиться внутри черного ящика. Изобразите схему устройства и коротко объясните принцип его работы. Известно, что в конструкции устройства используется некоторое оборудование из следующего списка: цилиндрический сосуд – такой же, как на столе, нерастяжимые нити, пружина жесткостью  $k = 300 \text{ Н/м}$ , набор грузов разных масс, резиновый шланг с внутренним диаметром, соответствующим диаметру штуцера на стенке ящика. Все грузы и сосуд снабжены крючками, которые могут быть использованы для крепления нитей и пружины. Крепления для нитей и пружины имеются также на потолке и стенах ящика. Плотность воды и ускорение свободного падения равны  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  и  $g = 10 \text{ Н/кг}$  соответственно.

В черном ящике может находиться, например, устройство, схема конструкции которого изображена на рисунке 2. Устройство предварительно настроено таким образом, что шланги заполнены водой (нет воздушных пробок). Если в первый сосуд налить

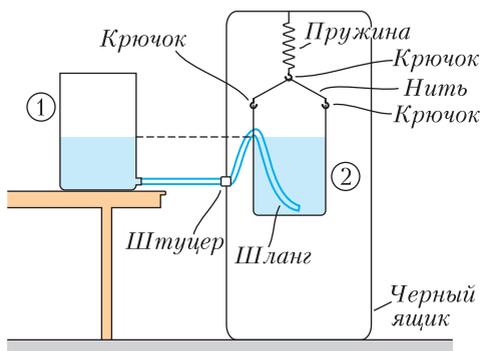


Рис. 2

небольшую порцию воды, то часть воды из него перетечет в «черный ящик», пружина при этом растянется сильнее и второй сосуд опустится ниже. При определенных значениях жесткости пружины уровень воды во втором сосуде будет опускаться относительно пола. Так как сосуды сообщаются, уровень воды в первом сосуде тоже опустится.

Проверим, подходит ли пружина из предложенного оборудования для нашего устройства. Найдем, при каком коэффициенте жесткости пружины уровень воды в сосудах не поменяется:

$$\rho g S \Delta x = k_1 \Delta x, \quad k_1 = 400 \text{ Н/м},$$

где  $\Delta x$  – увеличение деформации пружины. Если жесткость пружины будет меньше  $k_1$ , то уровень воды в сосудах опустится относительно пола.

При маленьких значениях коэффициента жесткости пружины может происходить «срыв» системы – понижение уровня в первом сосуде приводит к тому, что пружина сильно растягивается и уровень воды в сосуде, находящемся в ящике, оказывается ниже, чем в сосуде на столе. В этом случае вся вода перетечет в ящик. Следовательно, чтобы не происходило «срыва» системы, при понижении уровня воды в первом сосуде на  $\Delta x$  должно выполняться условие

$$\rho g S \Delta x < k \cdot 2 \Delta x.$$

Отсюда получаем нижнюю границу значения жесткости пружины:

$$k > \frac{\rho g S}{2} = 200 \text{ Н/м}.$$

Таким образом, пружина из предоставленного оборудования подходит для нашего устройства.

Процесс является обратимым – если зачерпнуть немного воды из первого сосуда, то уровень воды в сосудах поднимется относительно пола.

*Замечание.* Можно предложить похожее по смыслу устройство – поставить второй сосуд на пружину сверху, но с технической точки зрения при помощи предложен-

ного оборудования этот вариант реализовать проблематичнее.

А.Бычков

**Ф2660.** Правильный тетраэдр сделан из непроводящего материала. Его поверхность покрыта тонкой фольгой толщиной  $h$ , много меньшей размеров ребер. Удельное сопротивление материала

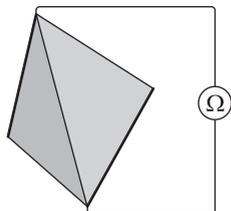


Рис. 1

фольги равно  $\rho$ . К двум не соприкасающимся ребрам вдоль всей их длины припаяны медные проволочки пренебрежимо малого сопротивления (линии увеличенной толщины на рисунке 1), к которым подключили омметр. Какую величину сопротивления показывает прибор?

Грань правильного тетраэдра – правильный треугольник. Обозначим длину стороны этого треугольника  $a$ , тогда его высота равна  $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . У тетраэдра четыре грани. К одной медной проволочке припаяны стороны двух граней и вершины двух оставшихся. Легко видеть, что эквивалентная схема тетраэдра может выглядеть, например, так, как показано на рисунке 2. Тонкие линии показывают, что самый левый треугольник соединяется по стороне с самым правым. Длина стороны параллелограмма, изображенная линией увеличенной толщины, равна  $2a$ , а высота, опущенная на эту сторону, равна  $H$ . Для расчета удобнее представить себе эквивалентную схему в виде

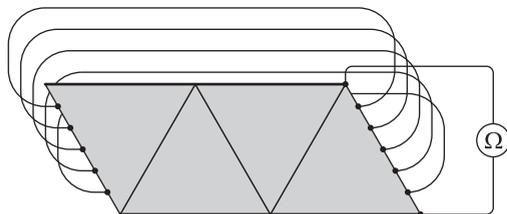


Рис. 2

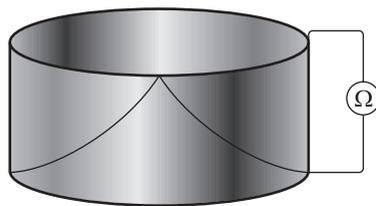


Рис. 3

полого цилиндра (как показано на рисунке 3) с толщиной стенок  $h$ , высотой  $H$  и длиной окружности основания  $2a$ . Сопротивление такого цилиндра легко находится:

$$R = \rho \frac{H}{2ha} = \frac{\rho\sqrt{3}}{4h}.$$

С.Варламов



**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Интернет-магазин <a href="http://www.bgshop.ru">www.bgshop.ru</a></li> <li>■ Кафе</li> <li>■ Клубные (дисконтные) карты и акции</li> <li>■ Подарочные карты</li> <li>■ Предварительные заказы на книги</li> <li>■ Встречи с авторами</li> <li>■ Читательские клубы по интересам</li> <li>■ Индивидуальное обслуживание</li> <li>■ Подарочная упаковка</li> <li>■ Доставка книг из-за рубежа</li> <li>■ Выставки-продажи</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Книги</li> <li>■ Аудиокниги</li> <li>■ Антиквариат и предметы коллекционирования</li> <li>■ Фильмы, музыка, игры, софт</li> <li>■ Канцелярские и офисные товары</li> <li>■ Цветы</li> <li>■ Сувениры</li> </ul>

г. Москва,  
м. Лубянка,  
м. Китай-город  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1

8 (495) 781-19-00

[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)  
пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

## Задачи

1. В гирлянде 5 лампочек горят, а остальные – перегорели (см. рисунок). Какое наименьшее число лампочек



нужно заменить, чтобы среди любых трех подряд идущих лампочек хотя бы две горели?

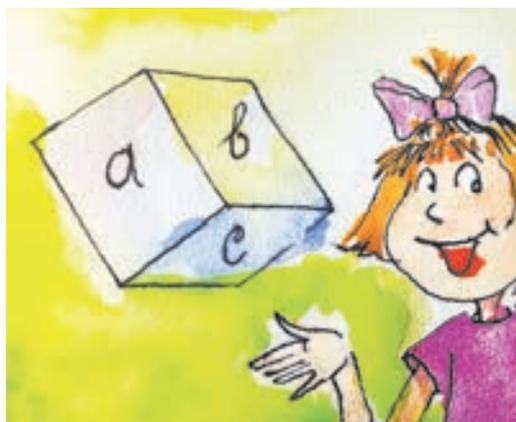
2. Лука собирается проехать на машине 520 км. Емкость бензобака его машины равна 40 литрам, а расход топлива составляет 1 литр бензина на 10 км пути. Когда он выехал, в бензобаке было 14 литров бензина. Проехав 55 км, он увидел информационный



Задачи 1 и 2 предлагались на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру».

щит, на котором написаны расстояния до пяти автозаправок: 35 км, 45 км, 55 км, 75 км и 95 км. Лука хочет остановиться для заправки только один раз. На каком расстоянии от щита ему нужно заправиться?

3. Вертя кубик в руках, можно видеть одновременно не более трех его граней. Можно ли на гранях кубика расположить числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 так, чтобы



для любых трех видимых граней написанные на них числа шли по часовой стрелке в порядке возрастания:  $a < b < c$ ?

*С.Дворянинов*

4. Запишите тремя символами следующее выражение:

$$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

*Г.Левитас*



# Таинственная шкала, или Небольшое расследование

С. ДВОРЯНИНОВ

СКАЖИТЕ, ВЫ ДАВНО ЗАГЛЯДЫВАЛИ на чердак вашего дома? А ведь чердак – это место, где начинаются приключения многих литературных героев. Вспомним строки из повести А.Гайдара «Тимур и его команда»: «Женя обошла сарай... Она подтащила к окну трухлявую лестницу и, взобравшись по ней, спрыгнула на пол чердака. Очень странно! Этот чердак был обитаем. На стене висели мотки веревок, фонарь, два скрещенных сигнальных флага и карта поселка, вся исчерченная непонятными знаками... Возле дырявой замшелой крыши торчало большое, похожее на штурвальное, колесо. Над колесом висел самодельный телефон».

Мальчик Лешка, главный герой книги С.Алексеева «Сын великана», попадает на чердак в самом начале повести: «Когда Лешка толкнул чердачную дверь, та не поддавалась. Дверь оказалась запертой».

Порой старую вещь не хочется выбрасывать – вдруг еще пригодится? И оказывается она на чердаке или в дальнем углу кладовой либо сарая. И даже хозяин потом забывает, где и что лежит. А чердак превращается в музей антиквариата.

Вот и автору недавно попалась на глаза старая вещичка (рис. 1). Ясно, что это безмен – пружинные весы. Как утверждает Википедия, это слово заимствовано из тюркских языков, где *везне* имеет значение «весы». Тюркское *везне* получило звучание «безмен» под влиянием народной этимологии: в народном сознании оно осмысливалось как *безмены* – «без изме-



Рис. 1

нения». В механике такой измерительный прибор называется *динамометром*.

Обратим внимание на две шкалы безмена. Выясним, как связаны соответствующие им единицы массы. Справа – масса в килограммах, для левой шкалы единицу массы назовем фунтом. Вначале может показаться, что

$$2 \text{ фунта} = 1 \text{ кг}, \quad 1 \text{ фунт} = 0,5 \text{ кг}.$$

По мере движения вниз по шкале это соотношение меняется:

$$6 \text{ фунтов} \approx 3,25 \text{ кг}, \quad 1 \text{ фунт} \approx 0,542 \text{ кг},$$

$$7 \text{ фунтов} \approx 3,75 \text{ кг}, \quad 1 \text{ фунт} \approx 0,536 \text{ кг},$$

$$10 \text{ фунтов} \approx 5,5 \text{ кг}, \quad 1 \text{ фунт} \approx 0,550 \text{ кг},$$

$$12 \text{ фунтов} \approx 6,5 \text{ кг}, \quad 1 \text{ фунт} \approx 0,542 \text{ кг},$$

$$13 \text{ фунтов} \approx 7 \text{ кг}, \quad 1 \text{ фунт} \approx 0,538 \text{ кг},$$

18 фунтов  $\approx 9,75$  кг, 1 фунт  $\approx 0,542$  кг,

21 фунт  $\approx 11,5$  кг, 1 фунт  $\approx 0,548$  кг,

22 фунта  $\approx 12,25$  кг, 1 фунт  $\approx 0,557$  кг.

Так сколько же килограммов в одном фунте? Какой это фунт?

Снова из интернета узнаем, что Krups – немецкая торговая марка, под которой сейчас производятся, например, кофеварки и кофемашины, а также различная малая бытовая техника. С 2001 года входит во французский консорциум Groupe SEB. А появилась фирма Krups в 1846 году в Германии, в баварском городе Вальд, где Роберт Крупс на основе кузницы создал промышленное предприятие по изготовлению пружинных весов. Но надписи на безмене – на английском языке. Vienna – так по-английски пишется название австрийской столицы. Википедия говорит, что австрийский фунт равен 0,56001 кг (он использовался также в Баварии). Обратим внимание на то, что из найденных нами отношений ближе всего к истинному значению 0,557. Мы его установили, в максимальной степени используя обе шкалы. И неслучайно. Связано это с абсолютной и относительной погрешностями измерений.

Пусть есть некоторая рациональная величина  $V = \frac{m}{n}$ . Конечно, можно записать

$$V = \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{3m}{3n} = \dots = \frac{km}{kn}$$

при любом натуральном  $k$ . Пусть числитель и знаменатель последней дроби мы знаем с точностью до  $\pm 1$ . Тогда мы имеем такое приближенное значение нашей величины:  $V \approx \frac{km \pm 1}{kn \pm 1}$ . Рассмотрим разницу между этим приближенным и точным значением:

$$\Delta = \left| \frac{km \pm 1}{kn \pm 1} - \frac{m}{n} \right| = \left| \frac{\pm n \mp m}{(kn \pm 1)n} \right|.$$

Ясно, что эта разница становится сколь угодно малой с ростом  $k$ . Приходят на память слова поэта:

*Лицом к лицу  
Лица не увидеть.  
Большое видится на расстоянии.*

Так и нам для достижения большей точности следует пройти как можно больше по шкале вниз.

Есть и механический аналог этого обстоятельства. Пусть на стене надо двумя гвоздями горизонтально закрепить метровую деревянную рейку. Рассмотрим три варианта расстояний гвоздей от одного из ее концов: 10 см и 90 см; 45 см и 55 см; 1 см и 99 см. Оказывается, предпочтительнее первый вариант. Во втором случае рейка будет «крутиться» (предельный случай – закрепление рейки одним гвоздем). В третьем случае рейка может треснуть.

Обычно в повседневной жизни мы используем одну систему единиц и соответственно одну шкалу. Так, сейчас на термометре за окном у нас используется шкала Цельсия, а раньше можно было встретить термометры со шкалой Фаренгейта. В России фирма HUGHES выпускала весы со шкалой в фунтах.

А сейчас вспомним, когда две разные шкалы оказываются полезнее одной. Вообразим, что на обычной клетчатой бумаге из школьной тетради нарисованы две линейки – черная и красная (рис. 2). На какой из них цена деления равна 1 см? Ясно, что на черной линейке, ибо в школьной тетрадке длина стороны квадратной клетки равна 5 мм. А цена деления на красной линейке равна 0,9 см. Можно сказать, что черная линейка настоящая и служит для измерения длин отрезков в сантиметрах. А красная линейка – фальшивая. Ею тоже можно измерять длину, то при этом помнить, что единица на ней – это 9 мм.

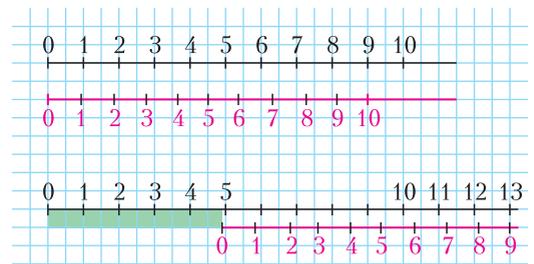


Рис. 2

Теперь предположим, что мы измеряем длину  $L$  зеленого отрезка черной линейкой. Ясно, что  $L$  – число не целое, чуть меньше 5, то ли 4,8, то ли 4,9... Какому значению отдать предпочтение? Черная линейка ничего об этом сказать не может. Но давайте продолжим зеленый отрезок красной шкалой и посмотрим, какие риски на двух линейках совпадают. Да, совпадение имеется, и зеленому отрезку соответствует такое равенство:  $L + 9 \cdot 0,9 \text{ см} = 13 \text{ см}$ , откуда находим  $L = 4,9 \text{ см}$ .

Получается, что комбинация двух линеек с разными шкалами позволяет измерять длины с точностью до 0,1 см. Красная шкала играет при этом вспомогательную роль. Ее научное название – шкала Нониуса или просто нониус. Нониусы устанавливают на измерительных инструментах и приборах и используют для более точного нахождения количества долей деления основной шкалы.

Принцип нониуса впервые применил в своем инструменте для наблюдения за звездами средневековый персидский ученый, философ и врач Абу Али Хусейн ибн



Рис. 3

Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина (980–1037). В Европе он известен под именем Авиценна. Название «нониус» дано в честь португальского математика Педру Нуниша (1502–1578). Скульптура Педру Нунеша на памятнике первооткрывателям в Лиссабоне изображена на рисунке 3. Наиболее известен его вклад в навигацию, которая бурно развивалась в

Португалии – одной из крупнейших морских держав XV–XVI веков. Он также изобрел несколько измерительных приборов. В частности, создал нониус, чтобы улучшить точность измерений.

Современная конструкция шкалы с нониусом была предложена в 1631 году французским математиком Пьером Вернье (1580–1637), в честь которого ее называют также «верньер». В наше время верньером называют приспособление для точной настройки радиоаппаратуры. Сейчас нашим юным читателям не приходится крутить ручку настройки, чтобы поймать нужную радиоволну. Для этого достаточно нажать соответствующую кнопку. Но чтобы можно было ощутить чувство радости от достижения цели, рассмотрим простую задачу.

На горизонтальном столе лежит круглый карандаш. Поверх него требуется расположить линейку так, чтобы она находилась в равновесии и чтобы ее концы не касались стола (рис.4). Какой эффектив-

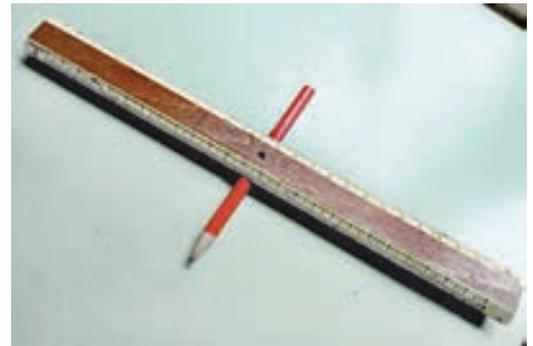


Рис. 4

ный способ позволит это делать быстрее всего? Оказывается, чтобы добиться равновесия, надо совместить середину линейки с карандашом, а затем очень медленно катить карандаш по столу в сторону того конца линейки, который не касается стола, – сила трения будет надвигать линейку на карандаш. При этом малое перемещение карандаша (т.е. его малое вращение) удастся осуществить намного легче, чем малое перемещение линейки по неподвижному карандашу!

# «Не забудьте про часы!»

*С. ПАРНОВСКИЙ*

Так утверждают поэт Андрей Вознесенский, певец Максим Леонидов и театр клоунады «Лицедеи» в старом фильме «Как стать звездой». А насколько будет плохо, если забыть? Спросим у ученых.

Сейчас нашу жизнь просто пронизывает информация о том, где именно мы находимся в потоке времени. Включив смартфон или компьютер, мы немедленно узнаем точное время, и каждую минуту часы меняют свои показания, синхронизированные с сигналами точного времени, с данными навигационных спутников, с эталонами... Короче, с особо точными часами. Японские ученые сравнили ход подобных суперхронометров у подножия и на вершине токийской телебашни и в очередной раз подтвердили предсказание Альберта Эйнштейна о том, что скорости течения времени у этих часов различаются.<sup>1</sup> На вершине время течет немного быстрее.

Но было время, когда никто не считал минуты, не говоря уже о наносекундах. Было нечем и, вообще говоря, особо незачем. Вспомним классику: «Когда д'Артаньян подходил к пустырю, находившемуся подле монастыря, пробило полдень. Атос ожидал его всего пять минут – следовательно, д'Артаньян был безукоризненно точен и самый строгий судья в законах дуэли не имел бы повода упрекнуть его». А кого перестала устраивать «безукоризненная точность» с



ошибкой в пять минут задолго до того, как актриса Людмила Гурченко спела одноименную песню в фильме «Карнавальная ночь»? Это были астрономы и мореплаватели. Они фиксировали время, когда происходят разные астрономические события, начиная от банальных восхода или захода солнца и кончая затмениями на Земле или на спутниках Юпитера. И началось это в очень давние времена.<sup>2</sup>

Мореплаватели использовали астрономические наблюдения для того, чтобы определить положение своего корабля, т.е. для навигации. Для определения долготы им надо было иметь еще и надежный хронометр, выставленный по времени какой-то реперной точки, например Гринвичской обсерватории возле Лондона. Просто для того, чтобы было с чем сравнить определенное из астрономических наблюдений местное вре-

<sup>1</sup> Группа ученых во главе с профессором Токийского университета Хидетоси Катори в 2020 году сравнила ход компактных сверхточных атомных часов, помещенных у подножия телевышки «Небесное дерево» и на смотровой площадке на высоте 450 метров. Часы на высоте шли примерно на пять стотриллионных быстрее, чем часы внизу. За сутки они убегали вперед примерно на 4,3 наносекунды. За год разница составила бы 1,6 микросекунды.

<sup>2</sup> Про так называемый антикитерский механизм, нечто вроде древнего прообраза примитивного компьютера для предсказания астрономических событий, написано в замечательной книге Джо Мерчант «Антикитерский механизм. Самое загадочное изобретение Античности».

мя. Как из этих данных можно получить долготу, прекрасно объясняется, например, в книге Жюль Верна «Таинственный остров».

Предположим, что корабельный хронометр ошибается на пять минут. Тогда долгота будет определена с ошибкой в  $5 \cdot 15'$ . Для корабля, плывущего возле экватора, это соответствует 75 морским милям, приблизительно 140 километрам. В другой океан не заплывем, но мимо небольшого острова с пиратским кладом промажем. Да и на рифы или мель сесть можно. Откуда появились  $15'$  при расчете? За 24 часа Земля делает один оборот, т.е. поворачивается на  $360^\circ$ . Тогда за час она повернется на  $15^\circ$ , или на  $15'$  за минуту. На самом деле на корабле в идеале должно быть не менее трех хронометров. Почему? Попробуйте догадаться сами. Если не хотите, то посмотрите примечание.<sup>3</sup>

Сейчас есть и более надежные средства узнать свое положение на нашей планете. Но точный эталон времени пригодится и в космосе на борту спутника. Так, два американских спутника, получившие название Gravity Probe, использовали его для проверки общей теории относительности (ОТО), а российский Радиоастрон – для того, чтобы в связке с наземными антеннами образовать космический радиоинтерферометр с беспрецедентным разрешением до миллионных долей угловой секунды.

В древности самые надежные и бесплатные часы были основаны на движении Солнца и звезд по небосводу, т.е. с видимым проявлением вращения Земли. Пусть небо иногда и покрыто тучами, все равно никакие периодические явления, вроде пения петуха или желанья выпить у корабельного боцмана, не могли конкурировать с такими часами по точности определения времени. А если рядом нет, к примеру, регулярного гейзера с постоянным интервалом времени между выбросами струй, то можно организовать что-то с постоянным периодом или изменяющееся с приблизительно постоянной скоростью.

Мы знаем водяные часы, свечи и лампы, используемые для отсчета времени. Но ни один из этих методов не может даже отдаленно сравниться по точности с самыми при-

митивными механическими часами с маятником. И ключевыми здесь являются слова «с маятником».

Просто механические часы могли иметь неплохую точность, но она существенно улучшилась после того, как в Европе в XIII веке придумали первый, еще примитивный анкерный (он же спусковой) механизм, более надежно обеспечивающий постоянство средней скорости хода. Затем девятнадцатилетний Галилео Галилей в 1583 году во время службы в Пизанском соборе обратил внимание на раскачивание люстры. Используя собственный пульс в качестве прибора для отсчета времени, он обнаружил, что период колебаний маятника почти не зависит от амплитуды этих колебаний. Применив новое знание к практике, известный ученый Христиан Гюйгенс усовершенствовал часы – в 1657 году он получил голландский патент на конструкцию маятниковых часов. Более того, часы реально работали и обеспечивали превосходную для того времени точность хода. Это открыло дорогу их массовому производству и применению.

Заметим, что Гюйгенс не ограничился маятником, в котором точка перемещается по окружности. Существует кривая, описывающая профиль углубления, в котором период колебаний материальной точки никак не зависит от амплитуды. Она называется циклоидой, а за это свое свойство получила дополнительное прозвище «таутохрона» – от переведенного на греческий язык слова «равновременная». Название «циклоида» придумал Галилей (во Франции эту кривую сначала называли рулеттой). Гюйгенс не только установил таутохронность циклоиды, но и придумал, как заставить подвешенный на нитке груз колебаться именно по циклоиде. Об этом и многом другом он написал в своей книге «Маятниковые часы» (точнее, «*Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum an horologia aptato demonstrationes geometrica*», короткие названия тогда были не в моде), вышедшей в 1673 году.

Можно долго рассказывать, как постепенно усовершенствовали часы, добиваясь того, чтобы их показания были надежными, не подверженными внешним воздействиям. Достаточно упомянуть, что точный и надежный морской хронометр был придуман в Великобритании только в 1735 году. Было

<sup>3</sup> Если на корабле два хронометра и их показания отличаются, то не ясно, какой из них врет. Если их три, то два из них покажут приблизительно одинаковое время.

еще одно дополнительное требование – о том, чтобы хронометр не требовал частых сверок с более точным прибором. Некогда штурман корабля, прибывшего в порт, где была астрономическая обсерватория (а они часто располагались в приморских городах именно по этой причине), собирал все корабельные хронометры, которых, как вы уже знаете, было не менее трех, и вез или нес их в обсерваторию для того, чтобы выставить на них время, основываясь на показаниях более точных астрономических часов.

Я работаю в астрономической обсерватории с 175-летней историей. Под историческим зданием находится сложная система подвалов, из менее глубоких надо спускаться в более глубокие. Один из таких глубоких подвалов называется часовым. Именно в нем в давние времена хранились астрономические часы. Подвал обеспечивал постоянство температуры, а это было залогом постоянства скорости хода часов.

Конечно, изобретатели придумали массу способов компенсации влияния температурного расширения на период колебаний маятника, но лучше не компенсировать что-то, а просто исключить или свести к минимуму. И, естественно, учитывается различие в величине ускорения свободного падения в разных точках, температура в подвалах, разли-

чающаяся в разных обсерваториях, и т.д. Вдобавок точность хода регулярно проверялось при астрономических наблюдениях. Если возникали рассогласования, то причину искали в часах, а не в движениях небесных светил.

Любопытно, что в Великобритании в XIX веке некоторые люди зарабатывали себе на жизнь, продавая информацию о точном времени. Они имели личный хронометр, который регулярно выставляли по часам обсерватории (для Лондона – Гринвичской), и периодически обходили своих клиентов и выставляли их часы, домашние и персональные. Естественно, за некоторую плату. Другие по утрам обходили клиентов и в заданное время стучали в окна длинными шестами, чтобы разбудить их. Сейчас с этим успешно справляется программа-будильник на наших смартфонах, не говоря уже про специальные устройства.

В старых кинофильмах вы можете встретить и сигналы точного времени – «начало сигнала соответствует...», и забытую фразу: «Товарищи / господа офицеры, сверим часы».

Так что увидев точное время на экране компьютера, оцените, как просто нам достается то, что казалось бы чудом всего пару столетий назад.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# Построение средней линии трапеции

**А. ГРИБАЛКО**

На прошедшей недавно XVIII Устной олимпиаде по геометрии предлагалась следующая задача (автор – Ю.Блинков):

*Дана трапеция, в которой одно основание в два раза больше другого. С помощью одной линейки (без делений) постройте среднюю линию этой трапеции.*

Решение этой задачи можно посмотреть на сайте <https://olympiads.mccme.ru/ustn/>. Возникает естественный вопрос: а возможно ли построение средней линии трапеции с помощью одной линейки при каком-нибудь другом отношении оснований? Давайте посмотрим, какие еще построения, кроме приведенных в решении, можно сделать.

Пусть дана трапеция  $ABCD$ , в которой основание  $AD$  в  $k$  раз больше основания  $BC$  (рис. 1). Сначала, кроме точки пересечения диагоналей, которую мы обозначим  $O$ , и точки пересечения прямых, содержащих боковые стороны трапеции, особо строить и нечего. Через них мы можем провести прямую, которая пересечет основания в их серединах (по замечательному свойству трапеции). Пусть точка  $M$  – середина основания  $AD$ . Теперь уже становится больше возможностей, какие линии можно строить.

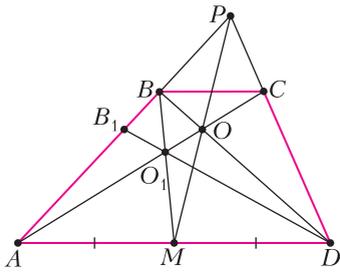


Рис. 1

Рассмотрим, например, треугольник  $ABD$ . В нем точка  $O$  делит сторону  $BD$  в отношении  $\frac{1}{k}$ , считая от вершины  $B$  (это следует из подобия треугольников  $BOC$  и  $DOA$ ), а точка  $M$  делит сторону  $AD$  пополам. Значит, если мы проведем в этом треугольнике чевианы  $AO$  (она является частью диагонали  $AC$ , поэтому уже построена) и  $BM$ , возьмем точку их пересечения  $O_1$  и проведем прямую через точки  $D$  и  $O_1$ , то по теореме Чевы она пересечет сторону  $AB$  в такой точке  $B_1$ , что  $\frac{AB_1}{B_1B} = k$ . Примем длину боковой стороны  $AB$  за единицу, тогда из полученного соотношения следует, что  $AB_1 = \frac{k}{k+1}$ .

Теперь рассмотрим треугольник  $AB_1D$ . Так как точки  $M, O_1$  и  $B$  лежат на одной прямой и при этом принадлежат прямым, содержащим стороны этого треугольника (рис.2), то по теореме Менелая можно найти отношение  $\frac{B_1O_1}{O_1D} = \frac{MA}{DM} \cdot \frac{BB_1}{AB} = \frac{1}{k+1}$ . Аналогично тому, как мы делали с треугольником  $ABD$ , построим точку  $O_2$  – пересечение отрезков  $AO_1$  и  $B_1M$ , а затем точку  $B_2$  – пересечение прямой  $DO_2$  и отрезка  $AB_1$ . Опять же по теореме Чевы можно доказать, что  $AB_2 = \frac{k+1}{k+2} \cdot AB_1 =$

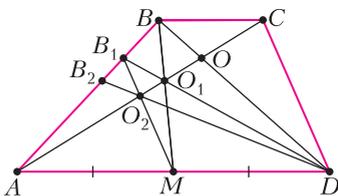


Рис. 2

$$= \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{k}{k+2}.$$

Уже можно заметить некоторую закономерность и понять, что если мы продолжим такие построения дальше, то будем получать похожие соотношения. Давайте в этом убедимся. Сделаем все те же самые построения в треугольнике  $AB_2D$ , в результате получим на стороне  $AB_2$  такую точку  $B_3$ , что  $\frac{AB_3}{B_3B_2} = k+2$ . Значит,  $AB_3 = \frac{k+2}{k+3} \cdot AB_2 = \frac{k+2}{k+3} \cdot \frac{k}{k+2} = \frac{k}{k+3}$ . Для следующих точек

$$AB_4 = \frac{k}{k+4}, \quad AB_5 = \frac{k}{k+5}, \quad \dots, \quad AB_n = \frac{k}{k+n}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что если  $k = n$ , т.е. отношение оснований трапеции равно натуральному числу, то точка  $B_n$  будет являться серединой боковой стороны  $AB$ . При этом прямая  $B_nO_{n-1}$  параллельна  $AD$ , поэтому, построив ее, мы получим среднюю линию трапеции (или можно аналогичным способом построить середину стороны  $CD$ , а затем и среднюю линию).

Давайте внимательно посмотрим на рисунок и подумаем, что еще мы можем построить. Возьмем, например, точку пересечения прямых  $DB_1$  и  $BC$ , обозначим ее  $E_1$  (рис.3). Треугольники  $E_1B_1B$  и  $DB_1A$  подобны, причем коэффициент их подобия мы уже знаем:  $\frac{B_1B}{B_1A} = \frac{1}{k}$ . Следовательно,  $BE_1 = \frac{1}{k} \cdot AD = BC$ . Появляется желание проверить, а какие отрезки будут высекать прямые  $DB_2, DB_3$  и так далее на прямой  $BC$ . Пусть прямые  $DB_2$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E_2$ , тогда мы можем рассмотреть подобные треугольники  $E_2B_2B$  и  $DB_2A$ . Так как длина отрезка  $B_2A$  равна

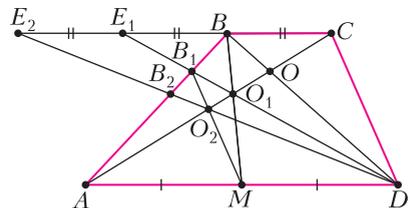


Рис. 3

$\frac{k}{k+2}$ , то  $B_2B = \frac{2}{k+2}$ , поэтому коэффициент подобия треугольников равен  $\frac{2}{k}$ , откуда получаем, что  $BE_2 = \frac{2}{k} \cdot AD = 2BC$ . Но нам уже известно, что  $BE_1 = BC$ , поэтому и  $E_1E_2 = BC$ . Аналогично можно доказать, что если прямые  $AB_3, AB_4, \dots, AB_n$  пересекают прямую  $BC$  в точках  $E_3, E_4, \dots, E_n$  соответственно, то  $E_2E_3 = E_3E_4 = \dots = E_{n-1}E_n = BC$ .

Таким образом, мы можем увеличить основание трапеции в любое натуральное число раз. Это наталкивает на мысль, что, раз мы уже умеем строить среднюю линию трапеции с любым целочисленным отношением оснований, то сможем построить ее и для любого рационального отношения. Действительно, если  $k = \frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  – натуральные числа, причем  $k$  не является целым числом, то можно увеличить основание  $BC$  в  $p$  раз (для этого достаточно построить точку  $E_{p-1}$ ). При этом мы получим трапецию  $AE_{p-1}CD$ , в которой основание  $E_{p-1}C$  в  $q > 1$  раз больше основания  $AD$ , а для нее мы уже знаем, как построить среднюю линию. Поскольку средние линии новой трапеции и исходной лежат на одной прямой, средняя линия трапеции  $ABCD$  будет построена.

Добавим еще, что если  $k = 1$ , то  $ABCD$  будет являться не трапецией, а параллелограммом (рис.4). Для него прямые, содержащие боковые стороны, не пересекаются, поэтому мы не сможем сделать все описанные выше построения. Но, тем не менее, среднюю линию в нем построить довольно легко. Возьмем на стороне  $CD$  произвольную точку  $C'$  и получим трапецию  $ABC'D$ , в которой  $AB$  будет являться основанием. А для любой трапеции мы уже умеем находить середины оснований, поэтому можем построить среднюю линию стороны  $AB$ . После этого можно даже

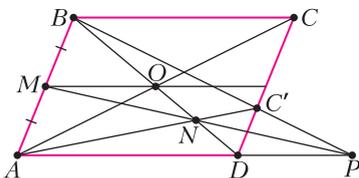


Рис. 4

не строить середину стороны  $CD$ , а взять точку пересечения диагоналей параллелограмма и провести через полученные две точки среднюю линию.

Итак, мы уже научились строить с помощью одной линейки среднюю линию трапеции (и параллелограмма) с любым рациональным отношением оснований. Но заметим, что мы заранее знали, чему равно это отношение. А что будет, если нам просто сообщат, что отношение оснований трапеции является рациональным числом, но само число будет неизвестно? Давайте договоримся, хоть это и является спорным вопросом, что с помощью линейки мы всегда можем найти точку пересечения двух прямых, если она существует. Это, по сути, позволяет нам узнать, параллельны прямые или нет. Тогда оказывается, что приведенные выше рассуждения можно продолжить и получить решение даже в этом случае. Пусть, как и ранее, отношение оснований трапеции равно не-

которому числу  $k = \frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  – натуральные числа. Когда нам были известны  $p$  и  $q$ , мы просто увеличили основание  $BC$  в  $p$  раз и получили трапецию с целочисленным отношением оснований. Но ведь можно аналогично и основание  $AD$  увеличить в  $q$  раз. Для этого будем последовательно строить на прямой  $AD$  такие точки  $F_1, F_2, \dots, F_{q-1}$ , что  $AF_1 = F_1F_2 = \dots = F_{q-2}F_{q-1} = AD$ . Тогда  $F_{q-1}D = q \cdot AD = p \cdot BC = E_{p-1}C$ , т.е. четырехугольник  $F_{q-1}E_{p-1}CD$  является параллелограммом. Теперь становится понятно, что если при построении таких точек на прямых  $AD$  и  $BC$  мы в какой-то момент получим такие две точки, что прямая, проходящая через них, не пересекает прямую  $CD$ , то сможем найти  $p$  и  $q$ .

Чтобы получить две такие точки, можно воспользоваться простым алгоритмом. Допустим, точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$  лежит в той же полуплоскости от прямой  $AD$ , что и прямая  $BC$  (будем говорить, что она выше  $AD$ ). Тогда мы знаем, что  $k > 1$ , откуда следует, что  $p > q$ . В этом случае будем строить точки поочередно на прямых  $BC$  и  $AD$ , т.е. в таком порядке:  $E_1, F_1, E_2, F_2$  и так далее. Проводя прямые через все построенные точки на прямой  $AD$  (в том числе через точку  $A$ ) и каждую новую точку на прямой  $BC$ , мы рано или поздно дойдем

до точки  $E_{p-1}$ , а точка  $F_{q-1}$  к этому времени уже будет построена (если  $q = 1$ , то это будет точка  $A$ ). В этот момент мы и получим прямую, параллельную  $CD$ .

Этот алгоритм можно немного усовершенствовать, чтобы не строить на прямой  $AD$  лишние точки и не проводить лишние прямые. Начнем строить на прямой  $BC$  точки  $E_1, E_2$  и так далее и будем проводить прямые через точку  $A$  и каждую новую точку. Если одна из этих прямых окажется параллельна прямой  $CD$ , то цель достигнута. Иначе в какой-то момент эти прямые пересекутся ниже  $AD$ . Это будет означать, что отношение оснований очередной трапеции впервые стало меньше 1. Теперь построим точку  $F_1$  и продолжим строить точки на прямой  $BC$ , проводя прямые уже через них и  $F_1$ . Опять же будем делать это до тех пор, пока очередная прямая не станет параллельна прямой  $CD$  или не пересечется с ней ниже  $AD$ . Далее при необходимости построим точку  $F_2$  и будем действовать аналогично, затем  $F_3$  и так далее, пока не дойдем до точки  $F_{q-1}$ . После этого через несколько шагов будет построена и точка  $E_{p-1}$ . Для реализации такого алгоритма потребуется ровно  $p + q - 2$  итерации.

Давайте разберем на примере, как работает этот алгоритм. Пусть дана трапеция  $ABCD$ , в которой отношение оснований  $AD$  и  $BC$  равно  $\frac{7}{3}$  (хотя пока мы не знаем, чему оно равно на самом деле). Тогда построение будет состоять из следующих шагов (рис.5).

1) На прямой  $BC$  строим такую точку  $E_1$ , что  $BE_1 = BC$ . В полученной трапеции  $AE_1CD$  отношение оснований  $AD$  и  $E_1C$  равно  $\frac{7}{6}$ .

2) Отношение, полученное на предыдущем шаге, больше 1 (в этом мы убеждаемся, построив точку пересечения прямых  $AE_1$  и  $CD$ , — она будет выше  $AD$ ), поэтому строим

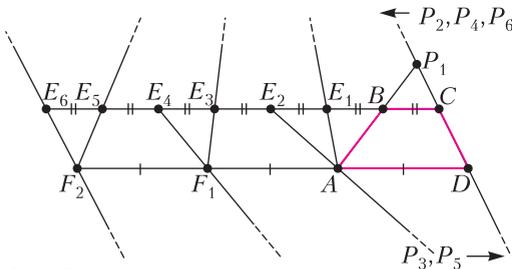


Рис. 5

следующую точку  $E_2$  на прямой  $BC$ . В трапеции  $AE_2CD$  отношение оснований  $AD$  и  $E_2C$  равно  $\frac{7}{9}$ .

3) Прямые  $AE_2$  и  $CD$  пересекутся ниже  $AD$ , поэтому теперь строим на прямой  $AD$  такую точку  $F_1$ , что  $AF_1 = AD$ . В трапеции  $F_1E_2CD$  отношение оснований  $F_1D$  и  $E_2C$  равно  $\frac{14}{9}$ .

4) Строим точку  $E_3$ . В трапеции  $F_1E_3CD$  отношение оснований  $F_1D$  и  $E_3C$  равно  $\frac{14}{12}$ .

5) Строим точку  $E_4$ . В трапеции  $F_1E_4CD$  отношение оснований  $F_1D$  и  $E_4C$  равно  $\frac{14}{15}$ .

6) Строим точку  $F_2$ . В трапеции  $F_2E_4CD$  отношение оснований  $F_2D$  и  $E_4C$  равно  $\frac{21}{15}$ .

7) Строим точку  $E_5$ . В трапеции  $F_2E_5CD$  отношение оснований  $F_2D$  и  $E_5C$  равно  $\frac{21}{18}$ .

8) Строим точку  $E_6$ . Отношение отрезков  $F_2D$  и  $E_6C$  равно 1, поэтому прямые  $F_2E_6$  и  $CD$  не будут иметь пересечения.

Таким образом, за восемь шагов мы получили прямую  $F_2E_6$ , которая параллельна  $CD$ , а это означает, что  $p = 7$  и  $q = 3$ , т.е. мы с помощью одной линейки смогли узнать, чему равно отношение оснований исходной трапеции. А дальше мы уже можем воспользоваться либо построением средней линии трапеции с известным отношением оснований, либо построением средней линии параллелограмма  $F_2E_6CD$ .

В заключение хотелось бы разобраться с рассмотренными вопросами для трапеций с иррациональным отношением оснований. Понятно, что можно использовать описанные выше построения и получить прямую, сколь угодно близкую к средней линии, однако предложенный метод не позволит построить ее точно. Предлагаем читателям подумать, возможно ли построение в этом случае, и если да, то как именно это сделать.

# Энергия ионизации водородоподобных ионов

С. ВАРЛАМОВ

В предлагаемой вниманию читателей статье рассматривается явление ионизации водородоподобных ионов различных атомов. При сравнении энергий ионизации разных ионов учитываются поправки, которые приводят к уточнению формул для вычисления соответствующих энергий.

В 11 классе в школе изучается атомная физика и, в частности, разбирается теория Бора, которая хорошо описывает свойства простейшего из атомов – атома водорода. В учебниках по физике приводятся формулы для уровней энергии атома водорода при различных значениях главного квантового числа  $n$ . Из этих формул можно получить энергию ионизации атома водорода, т.е. вычислить энергию, которую необходимо сообщить атому водорода, находящемуся в основном энергетическом состоянии, чтобы ядро и электрон перестали быть связанными друг с другом и могли разлететься на большое расстояние друг от друга.

В предположении, что ядро не движется, т.е. что масса ядра во много раз больше массы электрона, эта энергия вычисляется по формуле

$$E_0 = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}.$$

Если учесть, что у ядра имеется масса  $M_{\text{я}}$  и что движение ядра и электрона в атоме происходит вокруг общего центра масс, то энергия ионизации уменьшается и коэффициентом уменьшения является величина  $M_{\text{я}}/(M_{\text{я}} + m_e)$ . С учетом того, что ядро имеет заряд  $Q$ , равный заряду протона, умноженному на номер атома в таблице Менделеева:  $Q = eN$ , появляется множитель, увеличивающий энергию ионизации водородоподобного иона, равный  $N^2$ .

Однако, это еще не все. Согласно релятивистской теории (специальной теории относительности) движущаяся частица имеет и энергию и импульс, которые определенным образом связаны друг с другом. Собственная энергия электрона в общей теории относительности равна массе электрона, умноженной на квадрат скорости света, и эта энергия, выраженная в МэВ, равна  $E_c = 0,511$  МэВ. Иными словами, собственная энергия соответствует энергии частицы в той системе отсчета, в которой ее импульс равен нулю. Связь между полной энергией

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

собственной энергией

$$E_c = mc^2$$

и импульсом частицы

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

устанавливается релятивистским соотношением

$$E^2 = (pc)^2 + E_c^2.$$

При этом величина

$$E_{\text{к}} = E - E_c$$

называется кинетической энергией. Учет того, что наш мир не классический, а релятивистский, приводит к появлению дополнительного множителя, увеличивающего энергию ионизации и примерно равного

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (E_{\text{к}}/E_c)}}.$$

При движении электрона в центральном кулоновском поле ядра выполняется интегральное соотношение между потенциальной энергией электрического взаимодействия ядра и электрона и кинетической энергией движения электрона

$$E_{\text{к}} = -\frac{E_{\text{п}}}{2} = E_{\text{ион}}.$$

Можно сказать, что энергия ионизации водородоподобного иона численно равна кинетической энергии электрона в то время, когда он двигался возле ядра, находясь в самом низком энергетическом состоянии (в основном состоянии).

*Ты размеры-то на глаз поставь, да полдюйма на прочность прибавь.*

Эмпирическое правило  
кораблестроителей

*Математические расчеты нужны нам для сличения результатов применения идей с измерениями тех величин, с которыми мы оперируем в наших опытах.*

Джеймс Клерк Максвелл

*Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа. Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет...*

Джон Арчибальд Уилер

*Если математика — это искусство избегать вычислений, то теоретическая физика — это искусство вычислять без математики.*

Аркадий Мигдал

*... в точном значении любая теоретическая схема обязательно должна быть доведена до числа, по крайней мере такая возможность обязательно должна быть предусмотрена.*

Борис Болотовский

*П.Л.Капица показал нам... всю мощь метода оценок порядка величин, исходя из здравого смысла и простых физических соображений...*

Николай Карлов

## А так ли хорошо знакомы вам ВЫЧИСЛЕНИЯ И ОЦЕНКИ?

Уж коли в условии физической задачи приведены численные данные, извольте ее решение довести до числа! А для этого придется как следует «порыться» в вашем математическом арсенале, так как могут потребоваться умения оперировать с обыкновенными и десятичными дробями, процентами, пропорциями, квадратными корнями и прочими, вроде бы нехитрыми, вычислительными премудростями. Затем надо не забыть, в каких единицах должен быть представлен численный ответ, и проверить его разумность.

Не передоверяйте все подобные действия калькулятору, ведь самим повозиться с расчетами — отнюдь не избыточная нагрузка. Зачастую эта работа даже позволяет найти рациональное решение «в общем виде» или подсказывает новый, собственный способ прорваться сквозь числовые джунгли. Если же вы увлечетесь и набьете руку на задачах-оценках, то цены вам не будет, и это непременно скажется на ваших учебных и олимпиадных достижениях.

Попробуйте свои вычислительные силы на нескольких, надеемся вполне доступных вам, примерах.

### Вопросы и задачи

**1.** На приемных экзаменах в аспирантуру академик Ландау предлагал поступающим продолжить последовательность букв «р», «д», «т», «ч», «п»... Что она может означать?

**2.** Международная космическая станция летает на высоте 300 км над поверхностью Земли. Хватит ли количества кубиков объемом в  $1 \text{ м}^3$ , содержащихся в  $1 \text{ м}^3$ , чтобы сложить из них башню такой высоты?

**3.** Сможете ли вы оценить, на каком расстоянии от вас ударила молния?

**4.** К оси правильной идущих часов привели третью стрелку, которая в каждый момент времени делит пополам угол между часовой и минутной стрелками. Сколько оборотов сделает третья стрелка за сутки, если в полночь все три стрелки совпадают?

**5.** Оцените минимальную допустимую продолжительность суток для планеты массой  $M$  и радиусом  $R$ .

**6.** Как бы вы оценили давление шариковой ручки на бумагу при письме?

**7.** Знаете ли вы, как Архимед придумал «взвесить» число  $\pi$ ?



8. В озере плавает яблоко:  $\frac{2}{3}$  его под водой и  $\frac{1}{3}$  над водой. К яблоку подплывает рыбка и подлетает птичка, которые одновременно начинают его есть, причем птичка в два раза быстрее, чем рыбка. Какую часть яблока съест птичка и какую рыбка?

9 (физмат-ребус). Замените буквы цифрами так, чтобы выполнялись приведенные равенства:  $Dж = H \cdot m = \frac{кг \cdot м^2}{с^2}$ . Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

10. Оцените скорость, с которой должна лететь муха, чтобы после удара о стену от нее не осталось и «мокрого места».

11. Кусок металлической проволоки разрезали на две равные части и скрутили вместе по всей длине. Как изменилось сопротивление проволоки?

12. Электрическая мощность вычисляется, в том числе, по формуле  $P = \frac{U^2}{R}$ . Значит ли это, что если лампу накаливания, рассчитанную на 220 В, включить в сеть напряжением 127 В, то мощность лампы уменьшится в 3 раза?

13. Оцените расстояние между центрами ближайших светочувствительных элементов глаза человека.

### Микроопыт

Рассчитайте выталкивающую силу, действующую на вас со стороны воздуха в комнате. Что вам для этого потребуется?

### Любопытно, что...

... арифметика – искусство счета – возникла в связи с простыми практическими потребностями, прежде всего с торговлей и измерениями, у самых разных народов. Таблица названий первых десяти чисел на двух десятках индоевропейских языков выдает их явное сходство происхождения.

... в развиваемой пифагорейцами системе мира арифметика играла первостепенную роль. Сам Пифагор стремился упорядочить физические явления на основе гармонических соотношений между целыми числами.

... заслуга введения в европейскую практику десятичных дробей и алгоритмов действий с ними принадлежит нидерландскому ученому и инженеру Симону Стевину. Это было составной частью проекта унификации всей системы мер на десятичной основе.

... усовершенствование техники записи чисел потребовало тысячелетия. Так, для обозначения нуля в древности вводились специальные знаки либо прибегали к словесной формулировке, например – «зерно кончилось». Само понятие числа претерпело существенные изменения – еще в 1585 году тот же Стевин был вынужден бороться за признание единицы числом.

... вершиной вычислительного искусства было открытие «на кончике пера» планеты Нептун, совершенное в 1846 году французским астрономом Урбеном Леверье. Предсказанное им положение неизвестного небесного тела было подтверждено буквально через несколько недель наблюдений.

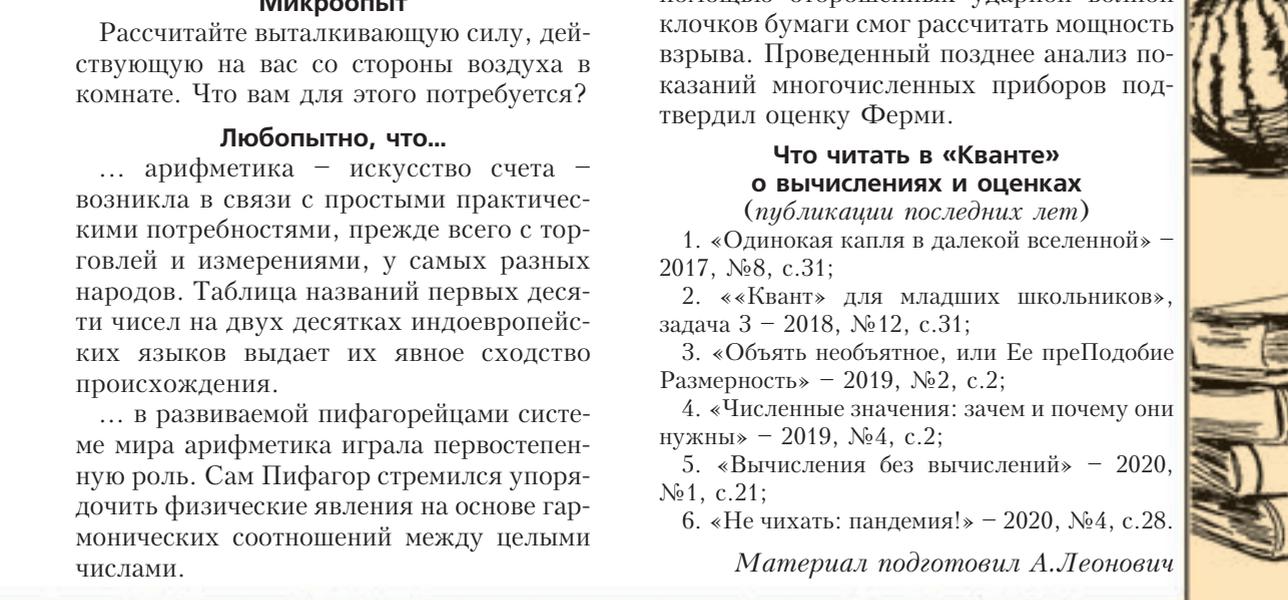
... еще столетие назад миг – длительность мигания глаза («мгновение ока») – считался невероятно быстрым и трудно поддающимся расчету. Однако современные оценки мига дают не такую уж малую величину: 0,2–0,4 секунды.

... признанным мастером оценок был выдающийся физик Энрико Ферми. На испытаниях первой атомной бомбы он с помощью отброшенных ударной волной клочков бумаги смог рассчитать мощность взрыва. Проведенный позднее анализ показаний многочисленных приборов подтвердил оценку Ферми.

### Что читать в «Кванте» о вычислениях и оценках (публикации последних лет)

1. «Одинокая капля в далекой вселенной» – 2017, №8, с.31;
2. ««Квант» для младших школьников», задача 3 – 2018, №12, с.31;
3. «Объять необъятное, или Ее преПодобие Размерность» – 2019, №2, с.2;
4. «Численные значения: зачем и почему они нужны» – 2019, №4, с.2;
5. «Вычисления без вычислений» – 2020, №1, с.21;
6. «Не чихать: пандемия!» – 2020, №4, с.28.

Материал подготовил А.Леонович



В физических справочниках можно найти потенциалы ионизации атомов и ионов вплоть до полной ионизации атома для различных элементов таблицы Менделеева. Нас будут интересовать значения энергий ионизации, когда от ядра удаляется самый последний электрон. Учитывая описанные ранее поправки, приходим к выводу, что если экспериментальное значение энергии ионизации водородоподобного иона умножить на коэффициент

$$\frac{M_{\text{я}} + m_e}{N^2 M_{\text{я}}} \sqrt{1 - (E_{\text{ион}}/E_c)},$$

то должна получиться одинаковая для всех водородоподобных атомов величина. Обозначим эту величину  $A$ , ее размерность есть эВ.

Для каждого значения энергии ионизации водородоподобного иона с помощью программы Excel были проведены вычисления в соответствии с предложенной процедурой. Результаты вычислений для 38 ионов приведены в таблице:

$M_{\text{я}}/M_p$	$(M_{\text{я}} + m_e)/M_{\text{я}}$	$N$	$A, \text{эВ}$	$E_{\text{ион}}, \text{эВ}$	$\sqrt{1 - (E_{\text{ион}}/E_c)}$
1	1,000544618	1	13,60572	13,5985	0,999986694
2	1,000272309	1	13,60602	13,6025	0,999986669
3	1,000181539	1	13,60579	13,6035	0,999986689
4	1,000136155	2	13,60563	54,418	0,999946752
7	1,000077803	3	13,60498	122,45	0,999880179
9	1,000060513	4	13,60542	217,72	0,999786944
11	1,000049511	5	13,60534	340,23	0,999667039
12	1,000045385	6	13,6052	490	0,999520433
14	1,000038901	7	13,60491	667,05	0,999347096
16	1,000034039	8	13,60479	871,42	0,999146975
19	1,000028664	9	13,60457	1103,13	0,998920033
20	1,000027231	10	13,6043	1362,21	0,998666224
23	1,000023679	11	13,60403	1648,71	0,998385477
24	1,000022692	12	13,60383	1962,68	0,998077722
27	1,000020171	13	13,60382	2304,2	0,997742854
28	1,000019451	14	13,60332	2673,2	0,997380915
31	1,000017568	15	13,60306	3069,87	0,996991688
32	1,000017019	16	13,6027	3494,2	0,996575153
35	1,000015561	17	13,6024	3946,3	0,996131166

Значения вычисленной величины  $A$  лежат в диапазоне от  $A_{\text{мин}} = 13,59454$  для водородоподобного иона с ядром криптона ( $N = 36$ ) до  $A_{\text{макс}} = 13,60602$  эВ для атома с ядром дейтерия ( $N = 1$ ). Отличия максимального и минимального значений от средней величи-

ны  $(A_{\text{макс}} + A_{\text{мин}})/2$  составляют всего

$$\frac{2(A_{\text{макс}} - A_{\text{мин}})}{A_{\text{макс}} + A_{\text{мин}}} \cdot 100\% = 0,08\%.$$

Или примерно 0,04% на изменение заряда на  $18 = 36/2$  единиц. Если считать, что тенденция к уменьшению вычисленной величины с ростом заряда сохранится, то даже для изменения заряда от 18 до 92 ее уменьшение составит всего  $0,04\% \cdot (92 - 18)/18 \approx 0,16\%$ .

С учетом этой тенденции оценим энергию ионизации, например, водородоподобного иона ртути ( $N = 80$ ):

$$A_{\text{рт}} = \left( \frac{A_{\text{макс}} + A_{\text{мин}}}{2} \right) \left( 1 - 0,0004 \cdot \frac{80 - 18}{18} \right) \approx 13,58 \text{ эВ}.$$

Вычисления по «обратной» процедуре дают значение  $E_{\text{ион рт}} \approx 95,4$  кэВ. Такая энергия, можно считать, уже сопоставима по величине с собственной энергией электрона, равной

$M_{\text{я}}/M_p$	$(M_{\text{я}} + m_e)/M_{\text{я}}$	$N$	$A, \text{эВ}$	$E_{\text{ион}}, \text{эВ}$	$\sqrt{1 - (E_{\text{ион}}/E_c)}$
39	1,000013965	18	13,60201	4426,2	0,995659661
40	1,000013615	19	13,60191	4934,1	0,995160403
40	1,000013615	20	13,60155	5469,9	0,994633447
45	1,000012103	21	13,60123	6033,8	0,994078554
48	1,000011346	22	13,60078	6625,8	0,993495677
49	1,000011115	23	13,60042	7246,1	0,992884568
50	1,000010892	24	13,60011	7894,8	0,992245077
53	1,000010276	25	13,59966	8571,9	0,99157715
54	1,000010086	26	13,59938	9277,7	0,990880432
59	1,000009231	27	13,59893	10012,1	0,990154962
59	1,000009231	28	13,59808	10775	0,989400775
64	1,00000851	29	13,59858	11568	0,988616222
65	1,000008379	30	13,59778	12389	0,987803311
70	1,00000778	31	13,59675	13239	0,98696098
73	1,000007461	32	13,59637	14119	0,986088162
75	1,000007262	33	13,59637	15029	0,985184775
79	1,000006894	34	13,59571	15968	0,98425173
80	1,000006808	35	13,59515	16937	0,983287947
84	1,000006484	36	13,59454	17936	0,982293335

$E_c = 511$  кэВ, и составляет от нее примерно 19%.

Ну и для успокоения совести оценим число  $N$ , при котором выведенная формула для энергии ионизации водородоподобного иона даст значение  $E_c/2$  (понятно, что вычисле-

ния по предложенной процедуре в этом случае уже будут неверными). Итак,

$$\frac{E_0 N^2}{\sqrt{1 - (E_0 N^2 / E_c)}} = \frac{E_c}{2}.$$

Численное решение этого уравнения (с помощью программы Excel) дает для числа  $N$  величину 122. Известно, что самый большой номер элемента (в таблице Менделеева), обнаруженного экспериментально, равен 118 (это оганесон, названный в честь научного руководителя Лаборатории ядерных реакций имени Г.Н.Флёрва в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне Юрия Цолаковича Оганесяна). Следовательно, можно предположить, что найденная связь между физическими величинами, относящимися к водородоподобным ионам, справедлива для всех элементов таблицы Менделеева с номерами, меньшими 80.

На этом можно было бы и закончить рассказ, но не дает покоя тот факт, что наблюдается явная тенденция к уменьшению величины, вычисленной с помощью описанной процедуры, с ростом заряда и массы (массового числа) ядра. Каким может быть объяснение этой тенденции? Возможно, это связано с тем, что ядро, вокруг которого движется электрон, не является точечным. Заряд ядра распределен в некоторой области пространства, и для электрона, находящегося возле этого ядра, такое распределение заряда ядра приводит к уменьшению энергии связи. Действительно, функция распределения плотности вероятности обнаружения электрона в пространстве вблизи ядра для основного самого низкоэнергетического состояния этого иона имеет максимум и убывает с расстоянием  $x$  от центра распределения (закон убывания – это экспонента  $e^{-x/a}$ , где  $a$  – константа). И если бы ядро было точечным, то рост потенциала электрического поля, созданного ядром, при приближении к этой точке описывался бы зависимостью

$$U \sim \frac{1}{R}.$$

А если ядро имеет размер и внутри этого (предположим) шарика с радиусом  $R_0$  заряд распределен равномерно, то при приближении к центру этого шарика (внутри шарика), потенциал описывается другой зависимостью:

$$U \sim \frac{1}{R_0} \frac{1 - (R/R_0)^2}{2} + \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_0} \left( \frac{3}{2} - \frac{(R/R_0)^2}{2} \right).$$

Для точечного ядра потенциал в центре (в точке) бесконечно большой, а для ядра конечного размера он имеет некое максимальное значение, не бесконечно большое. Распределение заряда ядра по пространству, которое «чувствует» электрон, создается двумя разными факторами: 1) собственно геометрическим размером ядра, 2) движением ядра в электрическом поле, созданном электроном.

В первом случае соответствующий вклад в радиус шарика-ядра пропорционален кубическому корню из массового числа ядра. Если считать, что массовое число ядра примерно вдвое больше его зарядового числа, то вклад первого фактора в размер области распределения заряда ядра пропорционален  $\Delta R_1 \sim \alpha Z^{1/3}$ , т.е. он растет с ростом заряда ядра ( $\alpha$  – постоянная величина).

Во втором случае соответствующий вклад в радиус шарика-ядра определяется соотношением неопределенностей (вот такая, почти шуточная комбинация слов получилась)  $\Delta p \Delta R \geq h$ , где  $\Delta p$  – это неопределенность импульса,  $\Delta R$  – неопределенность соответствующей координаты,  $h$  – постоянная Планка. Таким образом,

$$\frac{p^2}{2M_{\text{я}}} \approx \frac{p^2}{4ZM_p} = Z^2 \cdot \text{const},$$

следовательно,  $\Delta R_2 \sim \beta \cdot Z^{-3/2}$ , т.е. этот вклад в размер ядра убывает с ростом  $Z$  ( $\beta$  – постоянная величина).

В итоге получается, что нужно вычислить поправки к энергии взаимодействия, связанные с тем, что заряд ядра распределен в области с радиусом примерно равным  $\alpha Z^{1/3} + \beta Z^{-3/2}$ . Чтобы учесть действие этих «новых» двух факторов, надо будет к уже вычисленной величине  $A$  (которая приведена в четвертом столбце таблицы) добавить поправки, связанные с изменением энергии взаимодействия, которое обусловлено «неточечностью» ядра, поделенным на квадрат числа  $Z$ .

Проверку правильности дополнительных соображений, возможность вычисления величин  $\alpha$ ,  $\beta$  и изменений энергии взаимодействия предоставляем читателям, заинтересовавшимся проблемой.

## LXII Международная математическая олимпиада

В июле происходило главное математическое соревнование школьников в году – международная математическая олимпиада школьников. Из-за продолжающейся пандемии, как и в прошлом году, олимпиада прошла раздельно в более 140 специальных экзаменационных центрах, оборудованных видеонаблюдением, где 19 и 20 июля проводились два тура олимпиады. Как и в 2020 году, страной-организатором IMO выступала Россия, центральный оргкомитет олимпиады работал в Санкт-Петербурге на базе РГПУ им. А.И.Герцена. В олимпиаде приняли участие 619 юных математиков из 107 стран.

Нашу страну на олимпиаде представляли: *Иван Бахарев* (Санкт-Петербург, 10 класс), *Айдар Ибрагимов* (Казань/Москва, 11 класс), *Матвей Исупов* (Ижевск, 11 класс), *Андрей Шевцов* (Москва, 11 класс), *Данил Сибгатуллин*

*туллин* (Казань/Москва, 11 класс), *Максим Туревский* (Санкт-Петербург, 10 класс).

Результаты команды России подтвердили высокий уровень образования и подготовки команды: наши ребята завоевали пять золотых медалей и одну серебряную и заняли второе место в общекомандном зачете. Первое место – у сборной Китая. В таблице приведе-

	Задачи					Итого	Награда
	1	2	3	4	5		
Максим Туревский	7	7	4	7	7	7	Золотая медаль
Айдар Ибрагимов	6	5	1	7	7	7	Золотая медаль
Иван Бахарев	7	1	1	7	7	7	Золотая медаль
Матвей Исупов	6	2	1	7	7	7	Золотая медаль
Данил Сибгатуллин	7	1	7	7	7	0	Золотая медаль
Андрей Шевцов	7	1	7	7	0	0	Серебряная медаль

ны результаты наших участников по задачам. Отметим успешное выступления Максима Туревского, у которого абсолютное второе место в общем индивидуальном рейтинге.

Подробная информация и статистика результатов IMO представлена на официальном сайте <http://imo-official.com> олимпиады.



Большой вклад в подготовку сборной своим участием в различных мероприятиях по работе с командой внесли математики и педагоги: К. Сухов (руководил процессом подготовки), В. Брагин, Б. Баев, А. Кушнир, В. Кузнецов, П. Козлов, Н. Власова, М. Пратусевич, К. Кноп и многие другие. Отметим с благодарностью большую помощь и поддержку в организационных и содержательных вопросах подготовки команды, которую оказали Образовательный центр «Сириус» (Сочи), Центр педагогического мастерства (Москва), Президентский физико-математический лицей № 239 (Санкт-Петербург), Математический институт РАН (Москва, Санкт-Петербург).

### Задачи олимпиады

1. Дано целое число  $n \geq 100$ . Ваня написал числа  $n, n+1, \dots, 2n$  на  $n+1$  карточке, каждое по одному разу. Затем он перемешал колоду из этих карточек и разделил ее на две стопки. Докажите, что хотя бы одна из двух стопок содержит две карточки, сумма чисел на которых – точный квадрат.

*Австралия*

2. Докажите, что для любых вещественных чисел  $x_1, \dots, x_n$  выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

*Канада*

3. Точка  $D$  внутри остроугольного треугольника  $ABC$ , в котором  $AB > AC$ , такова, что  $\angle DAB = \angle CAD$ . Точка  $E$  на отрезке  $AC$  такова, что  $\angle ADE = \angle BCD$ ; точка  $F$  на отрезке  $AB$  такова, что  $\angle FDA = \angle DBC$ ; точка  $X$  на прямой  $AC$  такова, что  $CX = BX$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  – центры описанных окружностей треугольников  $ADC$  и  $EXD$  соответственно.

Докажите, что прямые  $BC, EF$  и  $O_1O_2$  пересекаются в одной точке.

*Украина*

4. Дана окружность  $\Gamma$  с центром  $I$ . Выпуклый четырехугольник  $ABCD$  таков, что каждый из отрезков  $AB, BC, CD$  и  $DA$  касается  $\Gamma$ . Пусть  $\Omega$  – описанная окружность треугольника  $AIC$ . Продолжение отрезка  $BA$  за точку  $A$  пересекает  $\Omega$  в точке  $X$ , продолжение отрезка  $BC$  за точку  $C$  пересекает  $\Omega$  в точке  $Z$ . Продолжения отрезков  $AD$  и  $CD$  за точку  $D$  пересекают  $\Omega$  в точках  $Y$  и  $T$  соответственно. Докажите, что

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

*Польша*

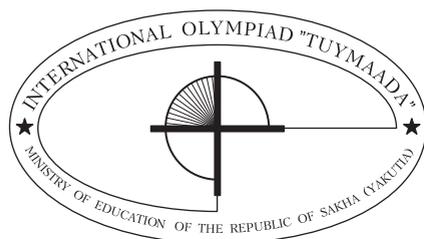
5. Чип и Дейл собрали на зиму 2021 орешек. Чип пронумеровал орешки числами от 1 до 2021 и вырыл 2021 маленькую ямку вокруг их любимого дерева. На следующее утро он обнаружил, что Дейл положил в каждую ямку по орешку, ничуть не беспокоясь о порядке. Расстроившись, Чип решил перепорядочить орешки при помощи следующей последовательности из 2021 действия: во время  $k$ -го действия он меняет местами орешки, соседние с орешком под номером  $k$ . Докажите, что найдется такое число  $k$ , что во время  $k$ -го действия поменялись местами орешки с номерами  $a$  и  $b$  такими, что  $a < k < b$ .

*Испания*

6. Дано целое число  $m \geq 2$ . В конечном множестве  $A$ , состоящем из (не обязательно положительных) целых чисел, нашлись такие подмножества  $B_1, B_2, \dots, B_m$ , что при каждом  $k = 1, 2, \dots, m$  сумма элементов множества  $B_k$  равна  $m^k$ . Докажите, что  $A$  содержит хотя бы  $m/2$  элементов.

*Австрия*

*Публикацию подготовили К. Сухов, В. Брагин, А. Кушнир, П. Кожевников*



XXVIII

# Международная олимпиада школьников «Туймаада»

## Физика

В июле этого года в Якутске прошла XXVIII Международная олимпиада «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Особенностью олимпиады в этом году стала очно-дистанционная форма (без привычного экспериментального тура): школьники из Якутска участвовали очно, а из других регионов и стран – дистанционно.

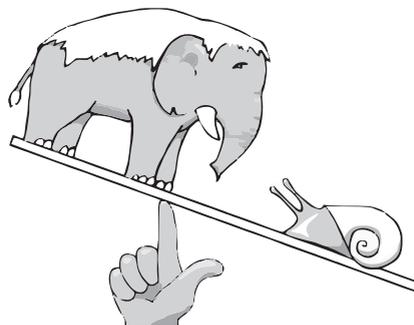
Участники олимпиады по физике соревновались, как обычно, в двух лигах: старшей и младшей (жюри распределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Согласно программе олимпиады по физике участникам могут быть предложены задачи на любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе (в младшей лиге – за исключением тем, относящихся к выпускному и предвыпускному классам).

Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут присылать их методической комиссии (achudn@mail.ru) – лучшие задачи войдут в итоговый комплект и будут опубликованы в образовательных журналах.

Статья подготовлена на основании методического пособия: А.В.Чудновский, Р.Е.Аванесян, А.Б.Акимов, А.И.Бычков, С.Д.Варламов, М.М.Ермилов, С.И.Кошоридзе, С.П.Крюков. XXVIII Международная олимпиада «Туймаада». Физика. Теоретический

тур. Методическое пособие / под ред. А.В.Чудновского – М.-Якутск, 2021.

Ниже представлены теоретические задачи для старшей лиги и список победителей олимпиады.



## Теоретический тур Старшая лига

### Задача 1. Прыгущая кошка

1) Кошка хочет перепрыгнуть с одной полки на другую, а затем обратно. Известны минимальные начальные скорости  $v_1$  и  $v_2$  кошки, при которых она сможет осуществить эти прыжки. Найдите модуль разности высот  $H$  и расстояние  $R$  между полками.

2) Кошка массой  $m$  прыгает по полкам  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в указанном порядке ( $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$ ), останавливаясь после каждого прыжка. Разность высот между последней и первой полками равна  $\Delta H$ , а длина ломаной  $A_1 A_2 \dots A_n$  равна  $L$ . Чему равна минимальная энергия, необходимая кошке для всей серии прыжков? Считайте, что при прыжке КПД кошки равен 100%, а при приземлении она энергию не затрачивает. Кошку и все полки считайте материальными точками, сопротивление воздуха не учитывайте, ускорение свободного падения  $g$  известно.

*М.Ермилов*

### Задача 2. Рычаги на рычаге

На горизонтальной плоскости стоит кубик, на котором лежит невесомый рычаг, на котором стоят два невесомых кубика, на которых лежат невесомые рычаги, на концах которых закреплены маленькие грузики массами  $M, m_1, m_2$  и  $m$  (рис.1). Все три рычага расположены в одной вертикальной плоскости, параллельной паре граней каждого кубика и совпадающей с плоскостью рисунка. Для отсчета длин по рисунку все

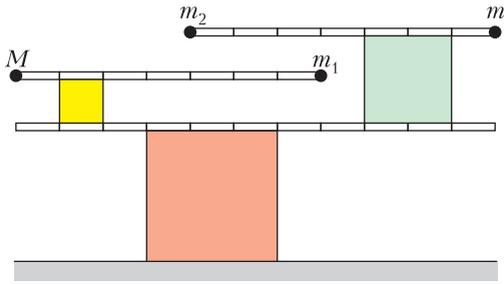


Рис. 1

три рычага разделены поперечными метками на равные отрезки. При каких значениях массы  $m$  возможно равновесие, если  $M = 40$  г, а массы  $m_1$  и  $m_2$  можно брать любые? В качестве ответа укажите, сколько среди найденных вами значений массы  $m$  выражаются целым числом граммов.

*А. Чудновский*

### Задача 3. Осцилляторы

В этой задаче рассматриваются осцилляторы без диссипации энергии (сил сопротивления нет, все удары абсолютно упругие). Считайте потенциальную энергию равной нулю в нижней точке траектории.

1) Вертикальный осциллятор Винтика представляет собой шарик, подпрыгивающий над упругой горизонтальной плоскостью. Найдите отношение  $k_1$  средней за период колебаний кинетической энергии такого осциллятора к полной энергии колебаний.

2) Параболический осциллятор Шпунтика представляет собой шарик, движущийся туда-сюда по одной и той же параболе между двумя симметричными упругими опорами, наклоненными под углом  $\varphi$  к горизонту (рис.2). Найдите отношение  $k_2$  средней за период колебаний кинетической энергии такого осциллятора к полной энергии колебаний при  $\varphi = 45^\circ$ .

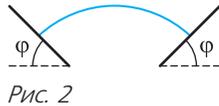


Рис. 2

3) Незнайка решил сделать осциллятор Шпунтика «гармоническим», выбрав угол  $\varphi$  таким, чтобы средние за период колебаний кинетическая и потенциальная энергии шарика были одинаковы (как это было бы при настоящих гармонических колебаниях). При каком  $\varphi$  Незнайка сможет достичь цели?

*А. Акимов*

### Задача 4. Переохлажденная вода

В теплоизолированном сосуде находилась переохлажденная вода массой  $M$  при нор-

мальном давлении и температуре ниже  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . В систему внесли очень маленький кусочек льда, ставший центром кристаллизации. При какой наибольшей начальной температуре  $t_{\text{max}}$  замерзнет вся вода? Найдите массу  $m$  образовавшегося льда, если начальная температура  $t$  выше  $t_{\text{max}}$ . Удельную теплоемкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг·°C) считайте не зависящей от температуры, удельная теплота кристаллизации воды при нормальном давлении и температуре  $t_0$  равна  $\lambda = 330$  кДж/кг.

*С. Кошоридзе*

### Задача 5. Тройная смесь

В процессе изотермического сжатия смеси трех идеальных газов, взятых в равных количествах, давление смеси зависело от объема так, как схематически (без соблюдения масштаба) показано на рисунке 3. Используя указанные на графике численные значения, найдите отношение  $(p_1 + p_3)/p_2$ . В качестве ответа укажите искомую величину, округленную до трех цифр после запятой.

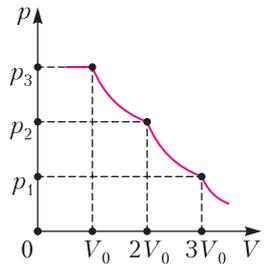


Рис. 3

*А. Чудновский*

### Задача 6. Заряд около конденсатора

К уединенному незаряженному плоскому конденсатору емкостью  $C$  снаружи подносят точечный заряд  $q$ , располагая его рядом с центром ближайшей пластины вдали от ее краев.

1) Найдите напряжение  $U$  на конденсаторе.

2) Какую внешнюю силу  $F$  и в какую сторону нужно прикладывать к точечному заряду, чтобы удерживать его в покое относительно неподвижного конденсатора, если дополнительно известны расстояние  $d$  между пластинами и расстояние  $a$  между точечным зарядом и ближайшей к нему пластиной?

*С. Крюков, С. Варламов*

### Задача 7. Переменный накал

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) некоторой лампы накаливания описывается

формулой  $|I| = a \left( \sqrt{\frac{|U|}{b}} + 1 - 1 \right)$ , где  $b = 15$  В и

$a$  – константы, причем отличие данной ВАХ от прямой пропорциональности связано только с зависимостью сопротивления от температуры. Лампу подключают к источнику переменного напряжения  $U = U_0 \sin \omega t$  с амплитудой  $U_0 = 115$  В и такой большой циклической частотой  $\omega$ , что изменением температуры нити накаливания лампы за один период колебаний напряжения можно пренебречь. Найдите отношение амплитуды колебаний силы тока в ходе нескольких первых периодов к амплитуде колебаний силы тока через продолжительное время. В качестве ответа укажите искомую величину, округленную до трех цифр после запятой.

*А. Чудновский*

### Задача 8. Зеркальная Земля

В начальный момент времени МКС (международная космическая станция), летящая по круговой орбите вокруг Земли на высоте  $H = 400$  км над ее поверхностью, пересекала отрезок, соединяющий центры Земли и Солнца, а непосредственно под МКС космонавты могли сквозь чистое небо наблюдать полный штиль на большой области Тихого океана. Через какое время  $T$  изображение Солнца в океане будет приближаться к МКС со скоростью  $u = 0,4$  км/с? На каком расстоянии  $L$  от МКС будет изображение в этот момент времени? Землю считайте шаром радиусом  $R = 6400$  км, ускорение свободно падения на поверхности Земли  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*С. Варламов*

### Победители олимпиады

#### Младшая лига

*Егор Потанов*, Россия – диплом I степени,  
*Alexandru Strambei*, Румыния – диплом II степени,

*Akezhan Shahabdin*, Казахстан – диплом II степени,

*Максим Наумов*, Россия – диплом II степени,

*Никита Стефанов*, Россия – диплом II степени,

*Erdaulet Nakhip*, Казахстан – диплом III степени,

*Amirgali Malikov*, Казахстан – диплом III степени,

*Arthur Nikolaenko*, Казахстан – диплом III степени,

*Ярослав Шастин*, Россия – диплом III степени,

*Arsenii Samoilenko*, Казахстан – диплом III степени,

*Степан Ефимов*, Россия – диплом III степени и спецприз,

*Андрей Хритов*, Россия – диплом III степени,

*Данил Елисейев*, Россия – диплом III степени и спецприз,

*Алина Мочалова*, Россия – диплом III степени.

#### Старшая лига

*Vladimir Lim*, Казахстан – диплом I степени,  
*Иван Пыльцин*, Россия – диплом I степени,  
*Daniil Shatokhin*, Казахстан – диплом II степени,

*Святослав Красин*, Россия – диплом II степени,

*Кирилл Чиветьев*, Россия – диплом II степени,

*Станислав Новиков*, Россия – диплом II степени и спецприз,

*Nurdaulet Nazarbay*, Казахстан – диплом II степени,

*Alisher Yerkebayev*, Казахстан – диплом III степени,

*Кирилл Лавыгин*, Россия – диплом III степени,

*Михаил Дьячковский*, Россия – диплом III степени и спецприз,

*Yavor Miroslavov Yordanov*, Болгария – диплом III степени,

*Horia Mercan*, Румыния – диплом III степени.

*Публикацию подготовили  
А. Чудновский, Ю. Григорьев*

# Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике, физике и информатике, которые пользуются большой популярностью среди школьников страны. С 2015 года в заочной (дистанционной) форме проводится олимпиада школьников «РИТМ МИЭТ». Ежегодно в 9 секциях олимпиады принимают участие более 2000 человек. В 2018 году университет организовал очную Физико-математическую олимпиаду МИЭТ, которая проходит в нескольких десятках городов России и стран СНГ. С 2019 года также проводится олимпиада школьников «Электронный наномир».

Ниже приводятся задачи по физике заключительного этапа олимпиады «РИТМ МИЭТ», варианты Физико-математической олимпиады МИЭТ и избранные задачи олимпиады «Электронный наномир».

## Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

### Заключительный этап

1. В момент отправления поезда с ускорением  $a = 1 \text{ м/с}^2$  пассажир находился на расстоянии  $r = 15 \text{ м}$  от открытой двери своего вагона и на  $10 \text{ м}$  позади нее (рис. 1). С какой

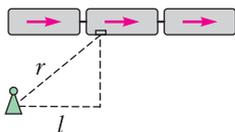


Рис. 1

минимальной скоростью и в каком направлении должен бежать пассажир, чтобы заскочить в свой вагон?

2. Ось полого цилиндра горизонтальна. Небольшая шайба находится внутри цилиндра в нижней точке. Цилиндр начинают вращать вокруг его оси так, что скорость шайбы до начала ее проскальзывания увели-

чивается со временем по линейному закону  $v = at$ , где  $a = 1 \text{ м/с}^2$ . Проскальзывание шайбы начинается в момент, когда цилиндр повернулся на угол  $\varphi = \pi/6$  относительно первоначального положения. Определите коэффициент трения между цилиндром и шайбой. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде объемом  $V_0 = 1 \text{ л}$  под поршнем находятся небольшой электронагреватель и одноатомный идеальный газ при давлении  $p_0 = 100 \text{ кПа}$ . Поршень начинают перемещать с постоянной скоростью, включив при этом электронагреватель и регулируя его мощность так, что давление в сосуде изменяется пропорционально объему газа. Определите минимальную и максимальную мощности нагревателя при увеличении объема газа в 2 раза за время  $t_0 = 400 \text{ с}$ .

4. Состояние двухатомного идеального газа изменяется по циклу Карно. Минимальный объем газа в цикле  $V = 1 \text{ л}$ , максимальное давление  $p = 200 \text{ кПа}$ . При адиабатическом расширении газ совершает за цикл работу  $A = 150 \text{ Дж}$ . Определите КПД цикла.

5. Три одинаковых шарика соединены двумя легкими нерастяжимыми нитями одинаковой длины (рис. 2). Крайние шарики поло-

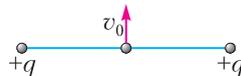


Рис. 2

жительно заряжены. В начальный момент шарики находятся на одной прямой, скорости крайних равны нулю, а средний шарик движется в направлении, перпендикулярном нитям, с кинетической энергией, равной потенциальной энергии электрического взаимодействия крайних шариков. Определите: а) минимальный угол между нитями при движении шариков; б) угол  $\beta$  между нитями в момент времени, когда скорость среднего шарика равна нулю. Силой тяжести пренебречь.

6. К двум медным стержням прижали П-образный медный проводник (рис. 3). Сопротивления четырех контактов П-образного проводника со стержнями равны  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ Ом}$  и  $R_4 = 3 \text{ Ом}$ . Эти сопротивления значительно превышают сопротивления самих стержней и П-проводника.

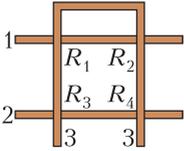


Рис. 3

Определите сопротивление между стержнями 1 и 2.

7. Неподвижный П-образный проводник и подвижная перемычка, находящаяся в электрическом контакте с ним, расположены в постоянном однородном магнитном поле. В контур включен источник ЭДС и резистор (рис. 4). Чтобы перемещать перемычку по П-образному проводнику с постоянной скоростью  $v$ , к ней следует приложить силу  $\vec{F}$ , а чтобы перемещать перемычку в том же направлении с постоянной скоростью  $2v$ , необходимо приложить силу  $-3\vec{F}$ . Определите силу  $F_0$ , необходимую для удерживания перемычки в неподвижном состоянии. Все прикладываемые силы лежат в плоскости П-образного проводника и перпендикулярны перемычке. Силами трения и тяжести пренебречь. Сопротивление проводящего контура считать постоянным.

### Физико-математическая олимпиада МИЭТ

10 класс

#### Вариант 1

1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0$  с некоторой высоты. Путь, пройденный телом вверх, оказался в  $n = 4$  раза меньше пути, пройденного вниз. а) Во сколько раз максимальная скорость тела больше его начальной скорости? б) Чему равна начальная скорость тела  $v_0$ , если тело находилось в полете время  $t = 3$  с? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Бусинка надета на шероховатую горизонтальную спицу на расстоянии  $r = 1$  м от левого конца (рис. 5). Спицу начинают вра-

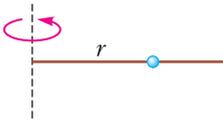


Рис. 5

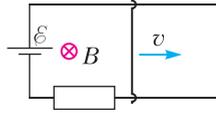


Рис. 4

щать вокруг вертикальной оси, проходящей через ее левый конец. При этом модуль скорости бусинки растет пропорционально времени:  $v = at$ . Коэффициент трения между бусинкой и спицей равен  $\mu = 0,2$ , сила тяжести пренебрежимо мала. Найдите: а) угловое ускорение спицы  $\beta$ , если  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>; б) длину дуги  $s$ , которую бусинка опишет при повороте спицы, прежде чем начнется скольжение бусинки по спице.

3. Тело массой  $m = 0,5$  кг бросили с балкона под некоторым углом к горизонту. Когда потенциальная энергия тела уменьшилась на  $\Delta E_{\text{п}} = 16$  Дж, его кинетическая энергия стала равной  $E_{\text{к}} = 25$  Дж. С какой начальной скоростью  $v_0$  брошено тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Средняя квадратичная скорость молекул азота, который содержится в воздухе комнаты объемом  $V = 75$  м<sup>3</sup>, равна  $v_{\text{кв}} = 500$  м/с. Считайте, что воздух состоит из азота и кислорода. Концентрация молекул азота в  $\beta = 4$  раза больше концентрации молекул кислорода. Атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па, молярная масса азота  $M = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(К · моль). а) Какова температура  $T$  воздуха в комнате? б) Чему равна масса  $m$  азота в комнате?

5. Четыре одинаковых медных шарика прижаты друг к другу (рис. 6). Считая, что

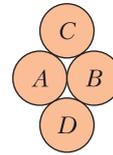


Рис. 6

сопротивления всех контактов между шариками одинаковые, определите, во сколько раз увеличится электрическое сопротивление между шариками A и B, если шарик D убрать.

#### Вариант 2

1. Тело брошено с некоторой высоты горизонтально. Высоту увеличивают в 9 раз. Во сколько раз надо увеличить начальную скорость тела, чтобы отношение высоты к горизонтальной дальности полета осталось прежним? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. На горизонтальном полу стоит тележка, на тележке покоится ящик (рис. 7). Если

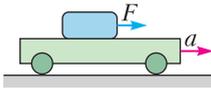


Рис. 7

тележку разгонять, действуя на ящик с горизонтальной силой  $\vec{F}$ , то тележка движется относительно пола с ускорением  $a_1 = 1,2 \text{ м/с}^2$ , если эту силу увеличить в 3 раза, то ускорение тележки становится равным  $a_2 = 2,5 \text{ м/с}^2$ . Определите: а) коэффициент трения между ящиком и тележкой; б) ускорение тележки, если на ящик действует сила  $2\vec{F}$ . Трением качения пренебrecь. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Масса тележки в 2 раза больше массы ящика

3. Шар массой  $M$  падает без начальной скорости с некоторой высоты. Когда высота шара над землей уменьшилась в 2 раза, в шар попала горизонтально летящая пуля массой  $m$  и застряла в нем. За время удара скорость шара увеличилась от  $v_1 = 4 \text{ м/с}$  до  $v_2 = 1,5v_1$ , а вектор скорости шара повернулся на угол  $\varphi = 60^\circ$ . Высота шара над землей за это время практически не изменилась. Пренебрегая сопротивлением воздуха и вращением шара, определите: а) скорость  $v_3$  шара перед ударом о землю; б) отношение масс  $M/m$ .

4. В баллон объемом  $V = 100 \text{ л}$ , содержащий  $m = 0,35 \text{ кг}$  газообразного пропана, закачали метан, в результате чего концентрация молекул газа в баллоне увеличилась в 3 раза и установилось давление  $p = 600 \text{ кПа}$ . Определите: а) парциальное давление пропана  $p_{\text{п}}$ ; б) среднюю квадратичную скорость  $v_{\text{кв}}$  молекул пропана. Газы считайте идеальными, температуру постоянной.

5. Четыре медных стержня прижаты друг к другу (рис.8). Определите электрическое

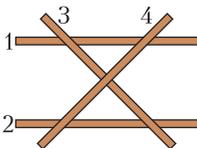


Рис. 8

сопротивление: а)  $R_{34}$  между стержнями 3 и 4; б)  $R_{13}$  между стержнями 1 и 3. Сопротивление каждого контакта между двумя стержнями равно  $R = 0,8 \text{ Ом}$  и значительно превышает сопротивление самого стержня.

11 класс

**Вариант 1**

1. Шарик брошен вертикально вверх. Через промежуток времени, равный  $1/3$  времени подъема на максимальную высоту, шарик оказался на высоте  $h = 5 \text{ м}$  над точкой бросания. На какую максимальную высоту  $H$  поднялся шарик? Сопротивлением воздуха пренебrecь.

2. На горизонтальной поверхности стола стоит тележка, на тележке покоится шайба (рис.9). Если тележку разгонять, действуя

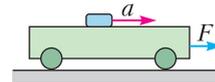


Рис. 9

на нее с горизонтальной силой  $\vec{F}$ , то шайба движется относительно стола с ускорением  $a_1 = 1 \text{ м/с}^2$ ; если эту силу увеличить в 4 раза, то ускорение шайбы становится равным  $a_2 = 2 \text{ м/с}^2$ . Определите: а) коэффициент трения между шайбой и тележкой; б) ускорение шайбы при действующей на тележку силе  $3\vec{F}$ . Трением качения пренебrecь. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. В баллон объемом  $V = 300 \text{ л}$ , содержащий  $m = 0,35 \text{ кг}$  газообразного метана, закачали пропан, в результате чего концентрация молекул газа в баллоне увеличилась в 3 раза и установилось давление  $p = 600 \text{ кПа}$ . Определите: а) парциальное давление метана  $p_{\text{м}}$  в баллоне; б) среднюю квадратичную скорость  $v_{\text{кв}}$  молекул метана. Газы считайте идеальными, температуру постоянной.

4. Заряд  $q$  однородно распределен по одной из сторон правильного треугольника, при этом напряженность электрического поля в центре треугольника равна  $E$ . Определите напряженность электрического поля в центре того же треугольника в случае, когда стороны треугольника имеют заряды  $q$ ,  $q$  и  $3q$  (рис.10), каждый из которых однородно распределен по соответствующей стороне.

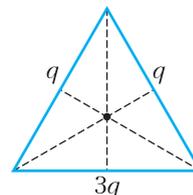


Рис. 10

5. Вольтметр, подключенный к клеммам батареи с ЭДС  $\mathcal{E} = 12$  В, показывает напряжение  $U_1 = 9$  В. К клеммам батареи подключают второй такой же вольтметр. Найдите показание  $U_2$  вольтметров.

### Вариант 2

1. Тело брошено с некоторой высоты горизонтально. Высоту увеличивают в 4 раза. Во сколько раз надо увеличить начальную скорость тела, чтобы отношение высоты к горизонтальной дальности полета осталось прежним? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. На горизонтальном полу стоит тележка, на тележке покоится ящик (см. рис.7). Если тележку разгонять, действуя на ящик с горизонтальной силой  $\vec{F}$ , то тележка движется относительно пола с ускорением  $a_1 = 1 \text{ м/с}^2$ ; если эту силу увеличить в 4 раза, то ускорение тележки становится равным  $a_2 = 1,5 \text{ м/с}^2$ . Определите: а) коэффициент трения между ящиком и тележкой; б) ускорение тележки, если на ящик действует сила  $3\vec{F}$ . Трением качения пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Масса тележки в 3 раза больше массы ящика.

3. В баллон объемом  $V = 150$  л, содержащий  $m = 0,35$  кг газообразного пропана, закачали метан, в результате чего масса газа в баллоне увеличилась в 3 раза и установилось давление  $p = 780$  кПа. Определите: а) парциальное давление пропана  $p_{\text{п}}$  в баллоне; б) среднюю квадратичную скорость  $v_{\text{кв}}$  молекул пропана. Газы считайте идеальными, температуру постоянной, молярные массы пропана и метана относятся как 11:4.

4. Заряд  $q$  однородно распределен по одной из сторон квадрата, при этом напряженность электрического поля в его центре равна  $E$ . Определите напряженность электрического поля в центре того же квадрата в случае, когда три его стороны имеют заряды  $q$ ,  $2q$  и  $3q$  (рис.11), каждый из которых однородно распределен по соответствующей стороне, а заряд четвертой стороны квадрата равен нулю.

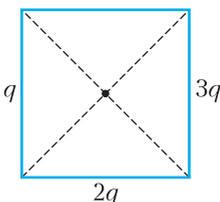


Рис. 11

5. Вольтметр, подключенный к клеммам батареи, показывает напряжение  $U_1 = 5$  В. Когда к клеммам батареи подключили второй такой же вольтметр, вольтметры показали  $U_2 = 3$  В. Определите ЭДС  $\mathcal{E}$  батареи.

### Олимпиада «Электронный наномир» Избранные задачи

10 класс

1. С гладкой крыши, имеющей внизу горизонтальный участок, соскальзывает камушек. а) Определите горизонтальную дальность полета  $l$  камушка, если точка  $A$ , из которой он начал скольжение, расположена на высоте  $H = 8$  м, а нижний край крыши находится на высоте  $h = 6$  м над поверхностью земли (рис.12). б) Под каким углом  $\alpha$

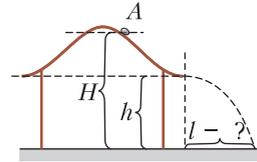


Рис. 12

к горизонту нужно бросить с земли камушек с минимально возможной начальной скоростью, чтобы он достиг точки  $A$ ?

2. Шайба после толчка скользит по неподвижной горизонтальной платформе с ускорением  $a_1 = 5 \text{ м/с}^2$  и останавливается. После этого платформу начинают поворачивать вокруг вертикальной оси так, что скорость шайбы увеличивается со временем по закону  $v = a_2 t$ , где  $a_2 = 4 \text{ м/с}^2$ . Определите: а) ускорение  $a_3$  шайбы в момент времени, когда она начнет скользить по платформе; б) угол, на который повернется платформа к этому моменту времени.

3. В результате абсолютно упругого столкновения частицы массой  $m$  с покоившейся частицей массой  $m/2$  они разлетелись симметрично относительно первоначального направления движения налетающей частицы. Определите угол между направлениями разлета частиц.

4. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде объемом  $V_0 = 1$  л под поршнем находятся небольшой электронагреватель и одноатомный идеальный газ при давлении  $p_0 = 100$  кПа. Поршень начинают перемещать с постоянной скоростью, включив при этом электронагреватель и регулируя его

мощность так, что температура в сосуде остается постоянной. За время  $t_0 = 500$  с объем газа в сосуде увеличился в 2 раза. Определите минимальную и максимальную мощности нагревателя в этом процессе.

5. Три одинаковых шарика соединены двумя легкими нерастяжимыми нитями одинаковой длины (рис.13). Крайние шарики за-

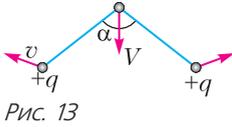


Рис. 13

ряжены положительно. Сначала шарики удерживают в вершинах равнобедренного треугольника при натянутых нитях, а затем одновременно отпускают. В системе возникают колебания с максимальной кинетической энергией  $E_{\max} = 0,1$  Дж и максимальной потенциальной энергией электрического взаимодействия  $U_{\max} = 2E_{\max}$ . Определите: а) максимальную кинетическую энергию  $E_1$  среднего шарика; б) минимальный угол  $\alpha_{\min}$  между нитями. Силой тяжести пренебречь.

11 класс

1. На горизонтальной поверхности земли находится гладкая полусфера радиусом  $R$ . Из ее верхней точки  $A$  начинает скользить небольшой камушек. а) С какой скоростью  $v$  он упадет на землю? б) Под каким углом  $\alpha$  к горизонту будет направлена эта скорость? в) Под каким углом  $\beta$  к горизонту нужно бросить камушек с поверхности земли с минимально возможной начальной скоростью, чтобы он достиг точки  $A$ ?

2. Цилиндрический сосуд с водой находится в помещении, в котором поддерживается влажность воздуха  $\phi_1 = 70\%$  при неизменной температуре. Уровень воды в сосуде понижается со скоростью  $v_1 = 0,2$  см/сутки. Определите, с какой скоростью  $v_2$  будет понижаться уровень воды в сосуде, если влажность воздуха в комнате станет  $\phi_2 = 50\%$  при той же температуре.

3. Заряженная бусинка массой  $m$  и зарядом  $q$  скользит без трения по нити, натянутой вдоль оси симметрии однородно заряженной неподвижной диэлектрической полусферы, приближаясь к ее внутренней поверхности (рис.14). Воображаемую границу сферы бусинка пересекла в точке 1 со скоростью  $v$ , а в точке 2, совпадающей с центром

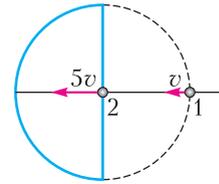


Рис. 14

полусферы, имела скорость  $5v$ . а) Определите разность потенциалов  $\phi_1 - \phi_2$  электростатического поля полусферы в точках 1 и 2. б) С какой скоростью бусинка ударилась о внутреннюю поверхность полусферы?

4. Наночастицей принято называть изолированный твердофазный объект, имеющий отчетливо выраженную границу с окружающей средой, максимальный размер которого в любом направлении составляет от 1 до 100 нм. Какое количество электронов можно удержать на сферической проводящей наночастице радиусом  $R = 50$  нм, если предельная напряженность электрического поля окружающей среды  $E_{\max} = 2 \cdot 10^6$  В/м, а диэлектрическая проницаемость окружающей частицу среды  $\epsilon = 11,7$ ? Коэффициент пропорциональности в законе Кулона  $k = 9 \cdot 10^9$  Н·м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>.

5. На диэлектрической подложке сформирована двухуровневая металлизация, фрагмент которой показан на рисунке 15. Алю-

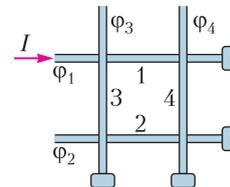


Рис. 15

миниевые проводники 1 и 2 лежат в нижнем слое металлизации, а проводники 3 и 4 – в верхнем, отделенном от нижнего слоя диэлектриком. Каждый проводник подсоединен к изолированной от других проводников контактной площадке. Потенциалы проводников равны  $\phi_1 = 4$  В,  $\phi_2 = 3$  В,  $\phi_3 = 2$  В,  $\phi_4 = 1$  В соответственно. Сопротивление между проводниками в местах их перекрытия  $R = 100$  МОм значительно больше сопротивления самих проводников. Определите ток  $I$ , втекающий в рассматриваемый фрагмент по проводнику 1.

Публикацию подготовили Г.Гайдуков, И.Горбатый, А.Спиридонов, И.Федоренко

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(с.м. «Квант» №7)

1. Когда поезд начинает тормозить, мы по инерции движемся вперед с прежней скоростью и потому наклоняемся вперед. Чтобы не упасть, мы напрягаем мышцы, сопротивляясь наклону. Это напряжение сохраняется все время, пока поезд тормозит, и в момент остановки дергает нас немного назад.

2. 5.

Пронумеруем гостей и их пары калош числами от 1 до 10 в порядке возрастания размера калош. Предположим, что осталось 6 гостей (и, соответственно, 6 пар калош). Тогда наименьший номер оставшегося гостя не больше 5, а наибольший номер оставшихся пар калош не меньше 6, поэтому гость с наименьшим номером сможет надеть калоши с наибольшим номером. Противоречие. С другой стороны, если последовательно уходили гости с номерами 1, 2, 3, 4, 5 и надевали, соответственно, калоши с номерами 10, 9, 8, 7, 6, то ни один из оставшихся пяти гостей не сможет надеть ни одну пару оставшихся калош.

3. Не следует.

Пусть пешеход идет полчаса со скоростью 10 км/ч, затем полчаса отдыхает и т.д. Тогда за каждый час он будет проходить ровно 5 км, а всего пройдет 20 км (поскольку идти он будет четыре получасовых интервала). Средняя скорость при этом равна  $20 \text{ км} : 3,5 \text{ ч} > 5 \text{ км/ч}$ .

4. Пусть сначала Коля взвесит по две монеты. Рассмотрим два случая.

1) Весы в равновесии. Коля может сравнить веса двух монет, лежащих (при первом взвешивании) на одной чашке. Если их веса равны, то равны веса всех монет, т.е. фальшивых либо 0, либо 4. Если же веса не равны, то ровно одна из монет фальшивая. Но тогда и на другой чашке ровно одна фальшивая, т.е. фальшивых монет ровно две.

2) Веса чашек не равны. Тогда фальшивых монет либо одна, либо две (в этом случае они лежат на одной чашке), либо три. Коля может взять по монете с каждой чашки и поменять их местами. Если фальшивых монет две, весы уравниваются, в противном случае – не уравниваются.

В любом случае проверка Коле удастся.

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

1. Это – первые буквы слов «раз», «два», «три» и т.д. Говорят, правда, что решивших эту задачу академик в аспирантуру не принимал, считая, что на это способен либо гений, либо идиот.

2. Да, хватит.

Так как  $1 \text{ м}^3 = (10^3 \text{ мм})^3 = 10^9 \text{ мм}^3$ , то миллиард кубиков, положенных друг на друга, образуют башню высотой  $10^9 \text{ мм} = 10^6 \text{ м} = 10^3 \text{ км} = 1000 \text{ км}$ .

3. Скорость света – это 300 тысяч километров в секунду, т.е. свет от молнии дойдет до вас практически мгновенно. Скорость же звука в воздухе – примерно 330 метров в секунду, т.е. звук проходит один километр примерно за 3 секунды. Поэтому если, увидев молнию, вы начнете медленно считать секунды до прихода звука, то умножив их число на три, оцените и расстояние до нее в километрах.

4. Минутная стрелка впервые «догонит» часовую в  $\frac{12}{11}$  ч пополудни, когда дополнительная стрелка

будет продолжением первых двух. Еще через  $\frac{12}{11}$  ч все три стрелки снова совпадут, т.е. от первого совпадения всех трех стрелок до следующего проходит  $\frac{24}{11}$  ч. В сутках укладывается в точности одиннадцать таких промежутков. За каждый из них дополнительная стрелка поворачивается на один полный оборот плюс еще  $\frac{2}{11}$

полного оборота. Таким образом, всего за сутки она сделает 13 оборотов.

5. Чтобы тело с поверхности планеты не улетело в космос, нужно, чтобы скорости всех его точек были меньше первой космической скорости  $v_1$ .

На экваторе  $v < v_1$  и  $\frac{2\pi R}{T} < \sqrt{gR} = \sqrt{G \frac{M}{R^2} R}$ , от-

куда  $T > 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ . Для Земли расчет дает

$T_{\min} \approx 5040 \text{ с} \approx 1,4 \text{ ч}$ .

6. Ширина следа, оставляемого шариковой ручкой, порядка 0,2 мм. Она примерно равна диаметру шарика, на который давит неподвижная ручка. Прикладываемое к ней усилие порядка веса кисти руки, т.е. около 1 Н. Тогда

$$p = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d^2} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

7. Необходимо перевести на поверхность однородной пластины контур круга и контур квадрата со стороной, равной радиусу круга. Затем надо вырезать из пластины обе фигуры и взвесить их. Отношение весов фигур, равное отношению их площадей, и дает нам искомое число:

$$\frac{P_{\text{круга}}}{P_{\text{квадрата}}} = \frac{\pi R^2}{R^2} = \pi.$$

8. Птичка съест  $\frac{2}{3}$  яблока, рыбка  $\frac{1}{3}$ . Поскольку птичка и рыбка поедают яблоко с постоянными скоростями, положение яблока не имеет значения.

9.  $21 = 7 \cdot 3 = \frac{84 \cdot 3^2}{6^2}$ .

10. Можно считать, что муха состоит в основном из воды, а вся ее кинетическая энергия идет на нагревание до кипения и на полное испарение.

Тогда  $v = \sqrt{2(c(t_k - t_0) + L)}$ , где  $c$  и  $L$  – табличные значения удельной теплоемкости и удельной теплоты парообразования воды,  $t_k$  – температура кипения,  $t_0$  – комнатная температура. Расчет дает  $v \approx 2300$  м/с!

11. Сопротивление уменьшилось в 4 раза (воспользуйтесь для расчета формулой  $R = \frac{\rho l}{S}$ ).

12. При напряжении 127 В нить электрической лампы будет накалена меньше, т.е. будет иметь более низкую температуру, а значит, и меньшее сопротивление. Поэтому мощность лампы должна уменьшиться менее чем в 3 раза.

13. До проверочной таблицы, на которой глаз здорового человека еще различает миллиметровые детали (размером  $h$ ), расстояние ( $L$ ) равно нескольким метрам. Следовательно, минимальный угловой размер, еще воспринимаемый глазом, равен  $\alpha = \frac{h}{L} \approx \frac{x}{F}$ , где  $x$  – искомое расстояние, а  $F$  – фокусное расстояние глаза, равное примерно 2 см. Итак,

$$x \approx F \cdot \alpha \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

**Микроопыт**

Потребуется взвеситься и вычислить свой объем:

$V = \frac{m}{\rho_{\text{ч}}}$ , поскольку средняя плотность человека близка к плотности воды  $\rho_{\text{в}}$ . Найдя в таблице, например школьного задачника, плотность воздуха  $\rho_0$ , все подставить в формулу  $F_A = \rho_0 g V = mg \frac{\rho_0}{\rho_{\text{ч}}}$ . При массе  $m = 75$  кг получим  $F_A \approx 1$  Н. Вы ощущаете такую силу?

**LXII Международная математическая олимпиада**

Публикуем решения наших участников олимпиады.

1 (Д. Сибгатуллин). Покажем, что на отрезке от  $n$  до  $2n$  всегда найдутся такие числа  $a < b < c$ , что сумма любых двух из них является точным квадратом. Это, конечно, окончит доказательство, ведь тогда две карточки с какими-то из этих чисел попадут в одну стопку. Для этого решим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} b + c &= (2t + 1)^2, \\ c + a &= (2t)^2, \\ a + b &= (2t - 1)^2, \end{aligned}$$

где  $t$  – некоторое натуральное число, которое мы подберем позднее. Решая эту систему, мы получим, что она имеет такие целочисленные корни:

$$\begin{aligned} a &= 2t^2 - 4t, \\ b &= 2t^2 + 1, \\ c &= 2t^2 + 4t. \end{aligned}$$

Осталось лишь проверить, что можно подобрать такое  $t$ , чтобы  $a$ ,  $b$  и  $c$  попали в отрезок  $[n; 2n]$ , что равносильно неравенствам  $n \leq a, c \leq 2n$  или двойному неравенству

$$t^2 + 2t \leq n \leq 2t^2 - 4t.$$

Рассмотрим на прямой отрезки вида  $[k^2 + 2k; 2k^2 - 4k]$ . Девятый отрезок начинается в 99, а каждый отрезок, начиная с 10-го, пересекает предыдущий (для доказательства этого нужно проверить неравенство  $2k^2 - 4k \geq (k + 1)^2 + 2(k + 1)$  для  $k \geq 9$ , что остается в качестве упражнения читателю), поэтому в объединении они покрывают весь луч  $[99; +\infty)$ , в том числе наше  $n \leq 100$ . Номер покрывающего отрезка и подойдет в качестве искомого  $t$ .

2 (М. Туревский).

**Лемма.** Пусть у нас есть числа  $u_1, u_2, \dots, u_n$  и пусть  $f(c) = \sum_{i=1}^n \sqrt{|u_i + c|}$ . Тогда у  $f(c)$  есть минимум (на  $\mathbb{R}$ ), и он достигается при  $c = -u_i$  при каком-то  $i$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать, что любое число  $c \in \mathbb{R}$  можно (непрерывно) сдвинуть в  $-u_i$  так, чтобы значение  $f(c)$  уменьшилось.

Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – это те числа вида  $u_i + c$ , которые больше 0, а  $b_1, b_2, \dots, b_l$  ( $l = n - k$ ) – это модули тех чисел вида  $u_i + c$ , которые меньше 0 (если есть  $u_i + c = 0$ , то  $c = -u_i$ , и мы уже добились требуемого).

Рассмотрим два случая.

1) Пусть

$$\sum \frac{1}{2\sqrt{a_i}} \leq \sum \frac{1}{2\sqrt{b_i}}.$$

Тогда будем непрерывно увеличивать  $c$ , при этом числа  $u_i + c$  будут увеличиваться, а значит, числа  $a_i$  будут увеличиваться, а  $b_i$  будут уменьшаться. Будем так двигать значение  $c$ , пока какое-то  $b_i$  не станет равно 0 (заметим, что  $l > 0$ , так как иначе условие случая не может выполняться). Так как  $a_i$  увеличиваются, а  $b_i$  уменьшаются, то

на протяжении всего маршрута изменения  $c$  выполнено неравенство  $\sum \frac{1}{2\sqrt{a_i}} \leq \sum \frac{1}{2\sqrt{b_i}}$ . Но

$$f'(c) = \sum_{i=1}^n (\sqrt{u_i + c})' = \sum_{i=1}^n \text{sign}(u_i + c) \frac{1}{2\sqrt{|u_i + c|}} = \sum \frac{1}{2\sqrt{a_i}} - \sum \frac{1}{2\sqrt{b_i}} \leq 0.$$

Видим, что на протяжении всего маршрута выполнено  $f'(c) \leq 0$ , значит,  $f$  не увеличилась, и в конечном итоге мы пришли к значению  $c = -u_i$ .

2) Пусть теперь

$$\sum \frac{1}{2\sqrt{a_i}} > \sum \frac{1}{2\sqrt{b_i}}.$$

Аналогично первому случаю, мы будем уменьшать  $c$ , пока какое-то  $a_i$  не станет равно 0.

Итак, мы поняли, что для любого  $c \in \mathbb{R}$  есть  $-u_i$ , для которого  $f(-u_i) \leq f(c)$ . Тогда  $f$  достигает своего минимального значения в точке вида  $-u_i$ . Лемма доказана.

Будем решать задачу по индукции по  $n$ .

База: при  $n = 0$ :  $0 \geq 0$ , при  $n = 1$ :  $\sqrt{2x_1} \geq 0$ .

Переход:  $0, \dots, n-1 \rightarrow n$ . Если мы ко всем  $x_i$  прибавим одно и то же  $c \in \mathbb{R}$ , то

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|}$$

не изменится, а

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

станет равной

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j + 2c|}.$$

Тогда по доказанной лемме для  $u_{ij} = x_i + x_j$  (для всех  $x_i + x_j$ )

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j + 2c|}$$

минимизируется при каком-то  $c \in \mathbb{R}$ , для которого  $x_i + x_j + 2c = 0$  (для некоторых индексов  $i, j$ ). Добавим ко всем  $x_i$  это значение  $c$  (т.е. выполним замену  $x_i \mapsto x_i + c$ ), тогда левая часть неравенства не увеличится, а правая останется такой же, как и была (неравенство только усилится). Далее можно считать, что для каких-то  $i, j$  выполнено  $x_i + x_j = 0$ .

1) Пусть  $i = j$ , т.е.  $x_i = 0$ , тогда

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|} - \sqrt{|2x_i|} &= \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_j|} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} - \sqrt{|x_i - x_i|}, \end{aligned}$$

поэтому мы можем выкинуть  $x_i$  и применить предположение индукции для оставшихся иксов.

2) Пусть  $i \neq j$ , т.е.  $x_i + x_j = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} &\left( 2 \sum_{k=1}^n \sqrt{|x_i + x_k|} + 2 \sum_{k=1}^n \sqrt{|x_j + x_k|} \right) - \\ &\quad - \sqrt{|x_i + x_i|} - 2\sqrt{|x_i + x_j|} - \sqrt{|x_j + x_j|} = \\ &= \left( 2 \sum_{k=1}^n \sqrt{|x_j - x_k|} + 2 \sum_{k=1}^n \sqrt{|x_i - x_k|} \right) - \\ &\quad - \sqrt{|x_i - x_i|} - 2\sqrt{|x_i - x_j|} - \sqrt{|x_j - x_j|}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем выкинуть  $x_i$  и  $x_j$  и применить предположение индукции для оставшихся иксов. (В обоих случаях слева написано то, что вычлось из левой части, а справа то, что из правой.) Мы выполнили переход к меньшему  $n$ , тем самым, задача решена по индукции.

**3** (А. Шевцов). Сделаем инверсию с центром в  $D$  и радиусом  $R$ . Далее мы будем неоднократно пользоваться тем, что

$$\Delta DPQ \sim \Delta DQ'P', \tag{1}$$

где  $P'$  и  $Q'$  – образы некоторых точек  $P$  и  $Q$  при инверсии. Из указанного подобия также следует, что

$$P'Q' = PQ \cdot \frac{R^2}{DP \cdot DQ}. \tag{2}$$

Образы всех точек исходной конфигурации (кроме  $D$ ) будем обозначать теми же буквами (если речь будет идти о точках исходной конфигурации, будем оговаривать это отдельно).

В исходной конфигурации точка  $X$  лежала на прямой  $AC$  и удовлетворяла условию  $BX = CX$ , поэтому теперь (рис.1)  $X$  лежит на окружности  $(ADC)$  и удовлетворяет условию

$$BX \cdot \frac{R^2}{DB \cdot DX} = CX \cdot \frac{R^2}{DC \cdot DX},$$

т.е.

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BD}{CD}. \tag{3}$$

Так как в исходной конфигурации  $E$  и  $F$  лежали на прямых  $AC$  и  $AB$  соответственно, теперь точки  $E$  и  $F$  лежат на окружностях  $(ADC)$  и  $(ADB)$  соответственно. При помощи (1) равенства углов из условия теперь переписываются как  $\angle ABD = \angle ACD$ ,  $\angle ADE = \angle DBC$ ,  $\angle ADF = \angle DCB$ . Поскольку в исходной конфигурации  $\Delta AO_1D$  был равнобедренным с основанием  $AD$ , из (1) следует, что теперь  $\Delta AO_1D$  равнобедренный с основанием  $O_1D$ , т.е.  $AO_1 = AD$ . Аналогично,  $CO_1 = CD$ , откуда  $O_1$  – отражение  $D$  относительно  $AC$ . Аналогично,  $O_2$  – отражение  $D$  относительно  $EX$ .

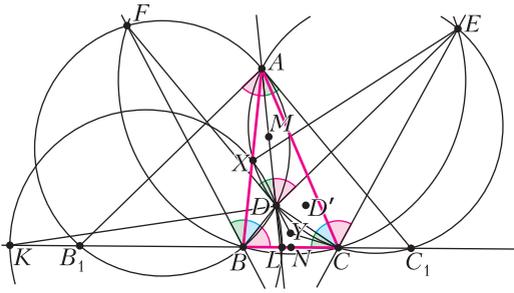


Рис. 1

Теперь от нас требуется доказать, что окружности  $(DBC)$ ,  $(DEF)$  и  $(DO_1O_2)$  имеют вторую общую точку помимо  $D$ .

Из равенства  $\angle ABD = \angle ACD$  следует (см. рис. 1), что радиусы окружностей  $(ADB)$ ,  $(ADC)$  равны и что они получаются друг из друга центральной симметрией относительно  $M$  – середины  $AD$ . Обозначим через  $B_1, C_1$  вторые точки пересечения прямой  $BC$  с окружностями  $(ADB)$ ,  $(ADC)$  соответственно. Тогда  $\angle ADE = \angle DBC = \angle B_1AD$ , откуда  $AB_1 \parallel DE$ , т.е. точки  $B_1, E$  также центрально симметричны относительно  $M$ . Аналогично,  $C_1, F$  центрально симметричны относительно  $M$ , откуда  $EFB_1C_1$  – параллелограмм и  $EF \parallel BC$ . Также

$$\begin{aligned} \angle FBC &= \angle FBA + \angle ABD + \angle DBC = \\ &= \angle FDA + \angle ACD + \angle ADE = \\ &= \angle BCD + \angle DCA + \angle ACE = \angle BCE, \end{aligned}$$

откуда  $BCEF$  – равнобокая трапеция. Тогда вторая точка пересечения окружностей  $(DBC)$  и  $(DEF)$  – точка  $D'$ , симметричная точке  $D$  относительно оси симметрии равнобокой трапеции  $BCEF$ . Осталось доказать, что окружность  $(DO_1O_2)$  проходит через точку  $D'$ , т.е. надо доказать вписанность четырехугольника  $DD'O_1O_2$ . Это равносильно тому, что серединные перпендикуляры к отрезкам  $DD', DO_1, DO_2$  пересекаются в одной точке, т.е. что  $AC$  и  $EX$  пересекаются на оси симметрии трапеции  $BCEF$ .

Рассматривая радикальные оси для пар окружностей  $(ADB), (DBF)$ ,  $(AD), (DCE)$ ,  $(BCEF)$ , получаем, что прямые  $AD, BE, CF$  конкурентны, т.е. что точка пересечения прямых  $AD, CE$  лежит на оси симметрии трапеции. Из теоремы Паскаля для ломаной  $(ADXEC)$  следует, что точки пересечения пар прямых  $AD$  и  $CE$ ,  $AC$  и  $EX$ ,  $DX$  и касательной к окружности  $(ADC)$  в точке  $C$  – обозначим эту точку через  $Y$  – лежат на одной прямой. Поэтому достаточно доказать, что  $Y$  лежит на оси симметрии трапеции, т.е. что  $DX$ , касательная к окружности  $(ADC)$  в точке  $C$  и ось симметрии трапеции пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

Из (3) следует, что точка  $X$  лежит на окружности Аполлония для точек  $B$  и  $C$ , проходящей через точку  $D$  и основания  $K$  и  $L$  внешней и внутренней биссектрис угла  $D$  в треугольнике  $DBC$  (обозначим эту окружность через  $\omega$ ). Рассмотрим радикальный центр окружностей  $(ADC)$ ,  $\omega$  и окружности нулевого радиуса с центром в  $C$ . Он лежит на прямых  $DX$  и касательной к окружности  $(ADC)$  в точке  $C$ , т.е. совпадает с точкой  $Y$ . Осталось доказать, что радикальная ось  $\omega$  и окружности нулевого радиуса с центром в  $C$  – ось симметрии трапеции, т.е. серединный перпендикуляр к  $BC$ . Так как их радикальная ось перпендикулярна их линии центров (т.е.  $BC$ ), нужно проверить, что на их радикальной оси лежит середина  $BC$ . Это очевидно, поскольку  $(C, B, L, K) = -1$  (как две вершины  $\triangle DBC$  и основания внешней и внутренней биссектрис), откуда  $K$  и  $L$  инверсны относительно окружности с диаметром  $BC$  и центром  $N$  (одно из определений гармонической четверки точек на прямой) и  $NL \cdot NK = NC^2$ , т.е. степень точки  $N$  относительно двух рассматриваемых окружностей одинакова, и эта точка лежит на их радикальной оси, что и требовалось.

4 (М. Исупов). Отметим точки касания отрезков  $AB, BC, CD, DA$  с  $\Gamma$  – точки  $K, L, M, N$  соответственно (рис. 2). Также отметим точку  $J$ , диаметрально противоположную точке  $I$  на  $\Omega$ . Заметим, что  $I$  лежит на биссектрисе угла  $BAD$ . Так как  $\angle IAJ = 90^\circ$ , то  $AJ$  и  $AI$  – внутренняя и внешняя биссектрисы угла  $XAY$ . Значит,  $I$  и  $J$  – середины дуг  $XY$ , поэтому  $X$  и  $Y$  симметричны относительно  $IJ$  – линии центров окружностей. Аналогично,  $Z$  и  $T$  симметричны относительно  $IJ$ . Отсюда  $TX = ZY$ .

Далее, из симметрии относительно  $IJ$  вытекает, что отрезки касательных от  $T$  и  $Z$  до  $\Gamma$  равны.

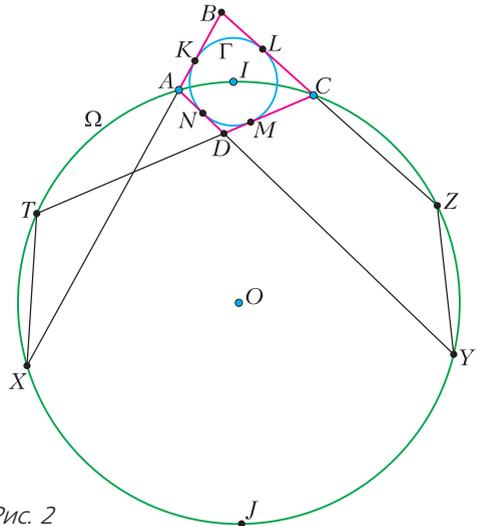


Рис. 2

Аналогично с  $X$  и  $Y$ .

Осталось лишь заметить, что  $AN = AK$ ,  $DN = DM$ ,  $MC = CL$ . Тогда

$$\begin{aligned} TD + DA + AX &= TD + DN + NA + AX = \\ &= TD + DM + KA + AX = TM + KX, \\ TM &= ZL, \quad XK = YN \end{aligned}$$

(по доказанному длины касательных равны), аналогично преобразуем

$$\begin{aligned} ZL + YN &= ZC + CL + YD + DN = \\ &= ZC + CM + MD + DY = ZC + CD + DY. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$TD + DA + AX = ZC + CD + DY.$$

Сложив с равенством  $TX = ZY$ , получим требуемое равенство:

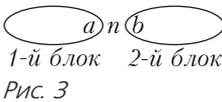
$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

**5** (И. Бахарев). Предположим противное.

Рассмотрим орехи с номерами от 1 до  $n$  после  $n$ -й операции. Разобьем их на блоки так, чтобы в каждом блоке орехи шли по кругу подряд, а разные блоки не соприкасались. Например, в последовательности 2176354 числа от 1,2,3,4 разбиваются на 2 блока: 3 и 421. Понятно, что разбиение на блоки единственно. Докажем, что при каждом  $n \leq 2020$  размеры всех блоков нечетны. Доказательство будем вести индукцией по  $n$ .

*База:*  $n = 1$ . После 1-й операции существует единственный блок, состоящий из единицы. Его размер нечетен.

*Переход:*  $n - 1 \rightarrow n$ . Пусть  $a, b$  – соседи  $n$  после  $(n-1)$ -й операции (рис.3). Разберем возможные случаи.



1)  $a$  и  $b$  больше  $n$ . Тогда  $n$ -я операция сохраняет расположение чисел, не больших  $n$ . Значит, разбиение на блоки после  $n$ -й операции отличается от разбиения на блоки после  $(n-1)$ -й операции добавлением блока из одного числа  $n$ . Размер этого блока нечетен, значит, размеры всех блоков по-прежнему нечетны.

2)  $a > n > b$  или  $a < n < b$ . Тогда  $n$ -я операция именно такая, какую мы ищем, – противоречие.

3)  $a, b$  меньше  $n$ . После  $n$ -й операции блоки, в которых находились числа  $a$  и  $b$ , а также число  $n$ , объединились в один новый блок. Заметим, что размер нового блока нечетен, так как он равен сумме трех нечетных чисел: размера двух блоков и единицы. Здесь использовалось, что  $a$  и  $b$  находятся в разных блоках. Это действи-

тельно так, потому что иначе в блоке, содержащем  $a$  и  $b$ , есть все числа, кроме числа  $n$ , т.е. 2020 чисел, но такого не может быть, поскольку  $n \leq 2020$ .

Таким образом, переход доказан. Теперь применим утверждение для  $n = 2020$ . Получим, что числа от 1 до 2020 разбиты на несколько нечетных блоков. Но это невозможно, потому что они составляют один блок длины 2020. Получаем противоречие.

**6** (А. Ибрагимов).

Пусть  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Нужно доказать, что  $n \geq m/2$ . Рассмотрим натуральные числа, которые в  $m$ -ричной системе счисления кратны  $m$  и содержат в записи не более  $m + 1$  разряда. Каждое такое число можно представить в виде

$$\overline{x_m x_{m-1} \dots x_1 0}_m = x_m m^m + x_{m-1} m^{m-1} + \dots + x_1 m,$$

где  $x_i$  – целые числа от 0 до  $m-1$ . Теперь, так как нам дано, что каждая степень  $m$  это сумма чисел из некоторого подмножества  $A$ , представим эту сумму в виде

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_n a_n,$$

$y_i$  – целые числа от 0 до  $m(m-1)$ , так как даже если число встречается во всех  $B_i$  и все  $B_i$  встречаются  $m-1$  раз, то число встретится в сумме как раз ровно  $m(m-1)$  раз. Получаем, что каждому рассматриваемому числу мы сопоставили некоторый набор чисел  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , при этом поскольку все числа различны, то и все сопоставленные им наборы различны, так как по набору  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  число восстанавливается однозначно – это просто  $y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_n a_n$ . Всего чисел  $m^m$ , а наборов не более  $(m(m-1)+1)^n$ , откуда получаем неравенство  $(m(m-1)+1)^n \geq m^m$ . Так как  $m(m-1)+1 < m^2$ , то получаем, что  $(m^2)^n > m^m$ , откуда  $n > m/2$ , что и требовалось.

## XXVIII Международная олимпиада «Туймада»

### Физика

#### Теоретический тур

#### Старшая лига

**1.** Введем систему координат с началом в полке  $A$ , ось  $y$  направим вверх, а ось  $x$  – вдоль проекции радиуса-вектора полки  $B$  на горизонтальную плоскость. Пусть  $v_0$  – начальная скорость кошки, прыгающей с полки  $A$  на полку  $B$ ,  $t$  – время полета кошки. Тогда для координат  $x$  и  $y$  полки  $B$  можно записать

$$x = v_{0x} t, \quad y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2},$$

откуда выражаем проекции начальной скорости:

$$v_{0x} = \frac{x}{t}, \quad v_{0y} = \frac{y}{t} + \frac{gt}{2}.$$

Используя теорему Пифагора для скоростей ( $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$ ) и для координат ( $R^2 = x^2 + y^2$ ), получим

$$\begin{aligned} v_0^2 &= v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{x^2 + y^2}{t^2} + gy + \frac{g^2 t^2}{4} = \\ &= gy + \frac{gR}{2} \left( \frac{2R}{gt^2} + \frac{gt^2}{2R} \right). \end{aligned}$$

Известно, что сумма двух положительных обратных друг другу величин достигает минимального значения, равного 2, когда каждая из величин равна 1. Таким образом, для минимальной начальной скорости справедлива формула

$$v_{0\min}^2 = gy + \frac{gR}{2} \cdot 2 = g(R - y).$$

1) Применяя полученный общий результат к двум прыжкам кошки, получаем

$$v_1^2 = g(R + y), \quad v_2^2 = g(R - y), \quad H = |y|,$$

откуда находим искомые величины:

$$R = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2g}, \quad H = \frac{|v_1^2 - v_2^2|}{2g}.$$

2) С помощью формулы для минимальной скорости найдем минимальную энергию, необходимую кошке на первый прыжок:

$$E_{1\min} = \frac{mv_{1\min}^2}{2} = \frac{mg}{2}(L_1 + \Delta H_1),$$

где  $L_1$  и  $\Delta H_1$  – расстояние и разность высот между полками  $A_1$  и  $A_2$ . Суммируя аналогичные выражения для всех прыжков, получаем ответ:

$$E_{\min} = \frac{mg}{2}(L + \Delta H).$$

2. Для записи условий равновесия необходимо найти точки приложения сил реакции опоры, действующих со стороны кубиков на опирающиеся на них рычаги. Равновесие возможно при условии  $m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$  (граничные значения еще предстоит найти), причем в случае  $m = m_{\min}$  нижний рычаг балансирует, опираясь на точку  $A$ , а при  $m = m_{\max}$  – на точку  $B$  (рис.4).

Пусть  $L$  – расстояние между соседними метками на рычагах, тогда условие равновесия нижнего рычага в случае  $m = m_{\min}$  имеет вид

$$Mg \cdot 3L = m_2 g \cdot L + m_1 g \cdot 4L + m_{\min} g \cdot 8L,$$

откуда после упрощения получаем

$$m_{\min} = \frac{3M - m_2 - 4m_1}{8}.$$

Ясно, что для достижения минимально возможного значения  $m_{\min}$  нужно взять максимальные

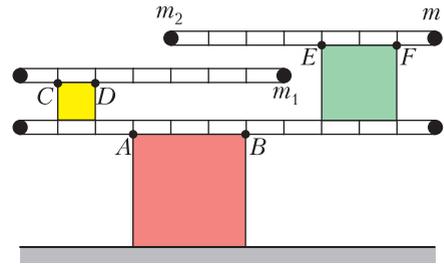


Рис. 4

$m_1$  и  $m_2$ . При максимальном значении  $m_1$  левый верхний рычаг будет балансировать, опираясь на точку  $D$ , поэтому его условие равновесия будет иметь вид

$$Mg \cdot 2L = m_1 g \cdot 5L, \quad \text{откуда } m_1 = \frac{2}{5} M.$$

При максимальном значении  $m_2$  правый верхний рычаг будет балансировать, опираясь на точку  $E$ , поэтому его условие равновесия будет иметь вид

$$m_2 g \cdot 4L = m_{\min} g \cdot 3L, \quad \text{откуда } m_2 = \frac{3}{4} m_{\min}.$$

Теперь находим искомую нижнюю границу:

$$m_{\min} = \frac{4}{25} M.$$

Условие равновесия нижнего рычага в случае  $m = m_{\max}$  (уравнение моментов относительно точки  $B$ ) имеет вид

$$Mg \cdot 6L + m_2 g \cdot 2L = m_1 g \cdot L + m_{\max} g \cdot 5L,$$

откуда получаем

$$m_{\max} = \frac{6M + 2m_2 - m_1}{5}.$$

Понятно, что для достижения максимально возможного значения  $m_{\max}$  нужно взять минимальное  $m_1$  и максимальное  $m_2$ . При минимальном значении  $m_1$  левый верхний рычаг будет балансировать, опираясь на точку  $C$ , поэтому его условие равновесия будет иметь вид

$$Mg \cdot L = m_1 g \cdot 6L, \quad \text{откуда } m_1 = \frac{1}{6} M.$$

При максимальном значении  $m_2$  правый верхний рычаг будет балансировать, опираясь на точку  $E$ , поэтому его условие равновесия будет иметь вид

$$m_2 g \cdot 4L = m_{\max} g \cdot 3L, \quad \text{откуда } m_2 = \frac{3}{4} m_{\max}.$$

Отсюда находим искомую верхнюю границу:

$$m_{\max} = \frac{5}{3} M.$$

Таким образом, равновесие возможно при условии

$$m \in [m_{\min}; m_{\max}] = \left[ \frac{4}{25} M; \frac{5}{3} M \right] \approx [6, 4; 66, 7] \text{ г.}$$

Ни одна из границ диапазона не равна целому числу граммов, поэтому нет повода для сомне-

ний, учитывать ли граничное значение. В диапазоне от 6,4 до 66,7 лежат целые числа от 7 до 66 включительно, количество которых равно 60, что и является окончательным ответом.

**3.** Чтобы ответить сразу на все три вопроса задачи, рассмотрим параболический осциллятор Шпунтика в общем случае (с произвольным углом  $\varphi$ ). Шарик движется туда-сюда по одной и той же параболе, значит, по закону отражения при каждом ударе шарик падает и отскакивает вдоль перпендикуляра к опоре, т.е. в этот момент его скорость направлена под углом  $\varphi$  к вертикали.

Пусть  $m$  – масса шарика,  $v_0$  – его начальная скорость (сразу после удара об опору), тогда полная энергия  $W_0$  и кинетическая энергия  $E(t)$  в зависимости от времени  $t$  полета шарика (до очередного удара) имеют вид

$$W_0 = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{mv_0^2}{2} + 0 = \frac{mv_0^2}{2},$$

$$E(t) = \frac{m}{2} \left( (v_0 \sin \varphi)^2 + (v_0 \cos \varphi - gt)^2 \right) = \\ = \frac{m}{2} \left( v_0^2 - 2gtv_0 \cos \varphi + g^2 t^2 \right).$$

Кинетическая энергия не зависит от направления скорости, поэтому средняя кинетическая энергия  $E_0$  будет одинаковой при усреднении за весь период  $T$ , за его половину и даже за его четверть – время движения от нижней до верхней точки траектории, которое найти проще всего:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{v_0 \cos \varphi}{g}.$$

Усредним кинетическую энергию за это время:

$$E_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} E(t) dt = \frac{m}{2} \left( v_0^2 - g\tau v_0 \cos \varphi + \frac{1}{3} g^2 \tau^2 \right) = \\ = \frac{mv_0^2}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} \cos^2 \varphi \right).$$

Выразим искомое отношение энергий:

$$k(\varphi) = \frac{E_0}{W_0} = 1 - \frac{2}{3} \cos^2 \varphi.$$

1) Вертикальный осциллятор Винтика – это параболический осциллятор Шпунтика при  $\varphi = 0$ , поэтому ответ получаем подстановкой:

$$k_1 = k(0) = \frac{1}{3}.$$

2) Аналогичная подстановка дает второй ответ:

$$k_2 = k(45^\circ) = \frac{2}{3}.$$

3) Если средние кинетическая и потенциальная энергии одинаковы, то каждая из них составляет половину от полной энергии, поэтому из уравнения  $k(\varphi) = \frac{1}{2}$  получаем третий ответ:

$$\varphi = 30^\circ.$$

**4.** Начнем с вопроса про  $m$ , так как ответ на него позволит сразу найти  $t_{\text{max}}$ . Для упрощения рассуждений подведем к воде количество теплоты

$$Q = cM(t_0 - t),$$

чтобы нагреть воду до температуры  $t_0$ , при которой нам известна удельная теплота кристаллизации, а затем отведем то же самое количество теплоты  $Q$  (для соблюдения условия о теплоизоляции сосуда), в результате чего при той же температуре  $t_0$  в лед превратится вода массой

$$m = \frac{Q}{\lambda} = \frac{cM(t_0 - t)}{\lambda}.$$

При температуре  $t_{\text{max}}$  в лед превратится вся вода, поэтому из уравнения

$$M = \frac{cM(t_0 - t_{\text{max}})}{\lambda}$$

находим искомое значение:

$$t_{\text{max}} = t_0 - \frac{\lambda}{c} \approx -78,6^\circ \text{C}.$$

**5.** Точки излома на графике изотермы в координатах  $p(V)$  соответствуют моментам начала конденсации газа в процессе сжатия, так как в эти моменты идеальный газ превращается в насыщенный пар и его давление перестает зависеть от объема. Наличие равно трех точек излома означает, что в рассматриваемом процессе каждый из трех газов смеси достиг своей точки насыщения. Зависимость давления насыщенного пара от температуры в данной задаче роли не играет, так как процесс изотермический. Пусть  $p_a$  – давление насыщенного пара того из газов смеси, который достиг насыщения первым (при объеме  $3V_0$ ),  $p_b$  – давление насыщенного пара того из газов смеси, который достиг насыщения вторым (при объеме  $2V_0$ ),  $p_c$  – давление насыщенного пара того из газов смеси, который достиг насыщения третьим (при объеме  $V_0$ ), тогда система уравнений Менделеева–Клапейрона для всех газов в их точках насыщения будет иметь вид

$$p_a \cdot 3V_0 = \nu RT,$$

$$p_b \cdot 2V_0 = \nu RT,$$

$$p_c \cdot V_0 = \nu RT,$$

где  $\nu$  – количество каждого из газов (одинаковое у всех),  $T$  – температура смеси,  $R$  – универсальная газовая постоянная. Для упрощения записи введем обозначение  $p_0 = \nu RT / (6V_0)$ , тогда уравнения системы примут вид

$$p_a = 2p_0,$$

$$p_b = 3p_0,$$

$$p_c = 6p_0.$$

Запишем закон Дальтона о парциальных давлениях при объемах  $V_0$ ,  $2V_0$  и  $3V_0$ , выразив неизве-

стные давления идеальных газов через давления насыщенных паров с использованием обратной пропорциональности объему и подставив полученные выше формулы для давления насыщенных паров:

$$p_3 = p_a + p_b + p_c = 11p_0,$$

$$p_2 = p_a + p_b + p_c \cdot \frac{1}{2} = 8p_0,$$

$$p_1 = p_a + p_b \cdot \frac{2}{3} + p_c \cdot \frac{1}{3} = 6p_0.$$

Окончательный ответ имеет вид

$$\frac{p_1 + p_3}{p_2} = \frac{17}{8} = 2,125.$$

6. См. задачу Ф2671 «Задачника «Кванта».

7. За несколько первых периодов колебаний нить накаливания лампы не успеет нагреться, поэтому ее сопротивление будет таким же, как и при малых постоянных напряжениях. Выразим это сопротивление по закону Ома:

$$R_0 = \frac{\Delta U}{\Delta I},$$

где  $\Delta U$  и  $\Delta I$  – малое напряжение и соответствующая ему малая сила тока, связь между которыми найдем через производную ВАХ лампы при отрицательных подмодульных выражениях:

$$R_0 = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{\frac{dI}{dU}} = \frac{1}{I'(U)} = \frac{2b}{a} \sqrt{\frac{U}{b} + 1} = \frac{2b}{a},$$

где на последнем шаге была выполнена подстановка  $U = 0$ , так как искомое сопротивление  $R_0$  наблюдается при малых напряжениях. По закону Ома находим амплитуду колебаний силы тока в ходе нескольких первых периодов:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{aU_0}{2b}.$$

Через продолжительное время нить накаливания лампы достигнет равновесной температуры, которую она имела бы при подключении лампы к источнику постоянного напряжения, равного действующему значению переменного напряжения:

$$I_{дей} = a \left( \sqrt{\frac{U_{дей}}{b} + 1} - 1 \right).$$

Обозначим через  $I_2$  амплитуду колебаний силы тока через большое время и запишем формулы для действующих значений силы тока и напряжения, справедливые для случая синусоидальной зависимости от времени:

$$I_{дей} = \frac{I_2}{\sqrt{2}}, \quad U_{дей} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда получаем

$$I_2 = a\sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{U_0}{b\sqrt{2}} + 1} - 1 \right)$$

и находим окончательный ответ:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_0}{2b\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{U_0}{b\sqrt{2}} + 1} - 1 \right)^{-1} \approx 1,767.$$

8. Пусть  $m$  и  $v$  – масса и скорость МКС соответственно, тогда ее центростремительное ускорение при движении по орбите равно  $a_{\perp} = v^2/(R + H)$ , а второй закон Ньютона для МКС имеет вид

$$m \frac{v^2}{R + H} = mg \left( \frac{R}{R + H} \right)^2,$$

откуда получаем

$$v^2 = \frac{gR^2}{R + H}.$$

Предположим (а в конце проверим), что к искомому моменту времени МКС сместится вдоль достаточно малой дуги  $ABC$  (рис.5), чтобы в

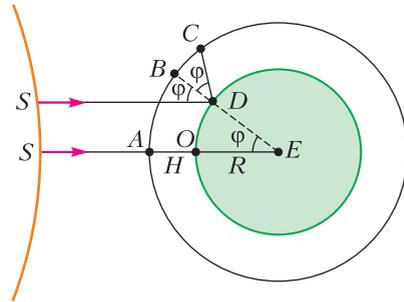


Рис. 5

расчетах можно было пользоваться приближениями для малых углов. Отрезок  $SE$ , соединяющий центры Солнца и Земли, будем считать неподвижным, так как угловая скорость обращения Земли вокруг Солнца много меньше угловой скорости обращения МКС вокруг Земли. Наличие более одной буквы  $S$  на рисунке иллюстрирует тот факт, что Солнце в нашей модели – это огромная точка (дуга слева – это лишь край этой точки) на бесконечном расстоянии. Отметим, что суточное вращение Земли не играет вообще никакой роли, так как вращение шара вокруг оси, проходящей через его центр, не приводит ни к каким изменениям.

Обозначим через  $\Phi$  равные между собой углы падения и отражения  $SDB$  и  $BDC$ , а также равный им (как соответственный) угол  $SED$  и выразим через угол  $\Phi$  путь, пройденный МКС к искомому моменту времени:

$$vT = \Phi(R + H) + \Phi H = (R + 2H)\Phi,$$

откуда получим

$$\Phi = \frac{vT}{R + 2H}.$$

Чтобы найти положение изображения Солнца на прямой  $DC$ , нужно построить очень близкий

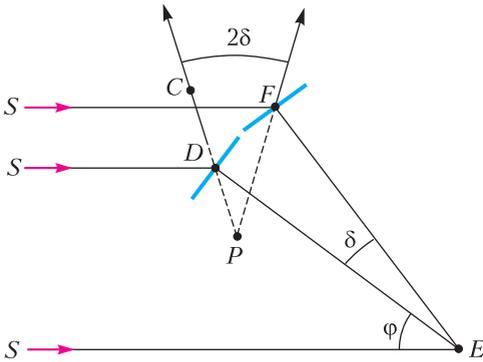


Рис. 6

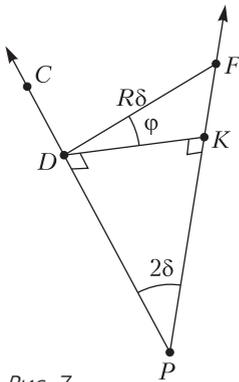


Рис. 7

к  $SD$  второй луч  $SF$  (рис.6). Жирные черточки в точках  $D$  и  $E$  – это касательные к поверхности воды в этих точках, т.е. маленькие плоские зеркала. Сами зеркала образуют между собой угол  $\delta$ , поэтому угол между отраженными от них лучами равен  $2\delta$ . Будем считать, что угол  $\delta$  бесконечно мал, тогда расстояние между зеркалами найдется как

длина дуги  $DF = R\delta$  (рис.7), а его проекция на общий перпендикуляр к прямым  $PD$  и  $PF$  имеет вид  $DK = DF \cos \angle FDK = R\delta \cos \varphi$ . Считая отрезок  $DK$  дугой окружности с центром в точке  $P$ , выразим его длину в виде  $DK = DP \cdot 2\delta$ . Приравняв два выражения для  $DK$ , находим расстояние от точки отражения до изображения:

$$DP = \frac{R \cos \varphi}{2}.$$

Запишем расстояние от МКС до изображения Солнца в океане:

$$x = CP = CD + DP = \frac{BD}{\cos \varphi} + DP = \frac{H}{\cos \varphi} + \frac{R \cos \varphi}{2}.$$

Используя приближения  $\cos y \approx 1 - y^2/2$  и  $1/(1+y) \approx 1 - y$ , преобразуем полученное выше выражение:

$$\begin{aligned} x &\approx H \left( 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) = \\ &= \left( \frac{R}{2} + H \right) - \left( \frac{R}{2} - H \right) \frac{\varphi^2}{2}. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$x = \left( \frac{R}{2} + H \right) - \frac{gR^2(R-2H)}{2(R+H)(R+2H)^2} \cdot \frac{T^2}{2},$$

что соответствует равноускоренному приближе-

нию с ускорением

$$a = \frac{gR^2(R-2H)}{2(R+H)(R+2H)^2}.$$

Из выражения  $u = aT$  для скорости приближения изображения к МКС получаем ответ:

$$T = \frac{2u(R+H)(R+2H)^2}{gR^2(R-2H)} \approx 123 \text{ с.}$$

Легко убедиться, что изначальное предположение  $\varphi \ll 1$  действительно выполнено.

Искомое расстояние можно найти в виде

$$L = x(T) \approx x(0) = \frac{R}{2} + H = 3600 \text{ км.}$$

## Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

### Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

#### Заключительный этап

- $v_{\min} = \sqrt{a(r+l)} = 5 \text{ м/с}$ ; по биссектрисе угла.
- $\mu = \frac{a + g \sin \varphi}{2a\varphi + g \cos \varphi} \approx 0,62$ .
- $N_{\min} = \frac{4\rho_0 V_0}{t_0} = 1 \text{ Вт}$ ,  $N_{\max} = \frac{8\rho_0 V_0}{t_0} = 2 \text{ Вт}$ .
- $\eta = \frac{2A}{5\rho V} = 0,3 = 30\%$ .
- а)  $\alpha_{\min} = 2 \arcsin \frac{3}{5} \approx 73,7^\circ$ ; б)  $\beta = 2 \arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 108^\circ$ .
- $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 1,25 \text{ Ом}$ .
- $F_0 = 5F$ .

## Физико-математическая олимпиада МИЭТ

10 класс

### Вариант 1

- а)  $\frac{v_{\max}}{v_0} = \sqrt{n} = 2$ ; б)  $v_0 = \frac{gt}{\sqrt{n}+1} = 10 \text{ м/с}$ .
- а)  $\beta = \frac{a}{r} = 2 \text{ рад/с}^2$ ; б)  $s = \frac{\mu r}{2} = 0,1 \text{ м}$ .
- $v_0 = \sqrt{\frac{2(E_K - \Delta E_n)}{m}} = 6 \text{ м/с}$ .
- а)  $T = \frac{M v_{\text{кв}}^2}{3R} \approx 281 \text{ К}$ ; б)  $m = \frac{3\rho_0 V \beta}{(1+\beta)v_{\text{кв}}^2} = 72 \text{ кг}$ .
- $\frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{3}$ .

### Вариант 2

- В 3 раза.
- а)  $\mu = \frac{2a_2}{g} = 0,5$ ; б)  $a = 2a_1 = 2,4 \text{ м/с}^2$ .

3. а)  $v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \approx 7,2 \text{ м/с}$ ; б)  $\frac{M}{m} = \frac{v_2 \cos \varphi}{v_1 - v_2 \cos \varphi} = 3$ .

4. а)  $p_{\text{II}} = \frac{p}{3} = 200 \text{ Па}$ ; б)  $v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{pV}{m}} \approx 414 \text{ м/с}$ .

5. а)  $R_{34} = \frac{R}{2} = 0,4 \text{ Ом}$ ; б)  $R_{13} = \frac{5R}{8} = 0,5 \text{ Ом}$ .

11 класс

**Вариант 1**

1.  $H = \frac{9h}{5} = 9 \text{ м}$ .

2. а)  $\mu = \frac{a_2}{g} = 0,2$ ; б)  $a = a_2 = 2 \text{ м/с}^2$ .

3. а)  $p_{\text{M}} = \frac{p}{3} = 200 \text{ кПа}$ ; б)  $v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{pV}{m}} \approx 717 \text{ м/с}$ .

4.  $E_1 = 2E$ .

5.  $U_2 = \frac{\varepsilon U_1}{2\varepsilon - U_1} = 7,2 \text{ В}$ .

**Вариант 2**

1. В 2 раза

2. а)  $\mu = \frac{3a_2}{g} = 0,45$ ; б)  $a = a_2 = 1,5 \text{ м/с}^2$ .

3. а)  $p_{\text{II}} = \frac{2p}{13} = 120 \text{ кПа}$ ; б)  $v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{6pV}{13m}} \approx 393 \text{ м/с}$ .

4.  $E_1 = 2E\sqrt{2}$ .

5.  $\varepsilon = \frac{U_1 U_2}{2U_2 - U_1} = 15 \text{ В}$ .

**Олимпиада «Электронный наномир»**

**Избранные задачи**

10 класс

1. а) Поскольку нет трения, то механическая энергия сохраняется:

$$mgH = \frac{mv_1^2}{2} + mgh,$$

где  $v_1$  – скорость камушка на высоте  $h$ , направленная горизонтально. При падении с высоты  $h$

$$l = v_1 t, h = \frac{gt^2}{2},$$

где  $t$  – время полета. Из этих уравнений найдем

$$l = 2\sqrt{h(H-h)} \approx 6,9 \text{ м}.$$

б) Стартовая скорость камушка на земле минимальна, если в точке  $A$  скорость камушка станет равной нулю. Поэтому камушек должен двигаться по той же траектории, по которой он скользил, а затем падал из точки  $A$  на землю. Бросать его нужно из точки приземления под таким углом  $\alpha$  к горизонту и с такой начальной скоростью

$v_2$ , которые равны углу и скорости в момент падения камня на землю при его движении с нулевой начальной скоростью из точки  $A$ :

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{v_2}, \frac{mv_2^2}{2} = mgH.$$

После преобразований получим

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{H-h}{H}}, \alpha = 60^\circ.$$

2. а) Ускорение шайбы при скольжении по платформе определяется силой трения скольжения:  $ma_1 = F_{\text{тр}}$ , где  $m$  – масса шайбы. При вращении платформы шайба приобретает ускорение под действием силы трения. В момент начала скольжения шайбы ее ускорение равно

$$a_3 = \frac{F_{\text{тр}}}{m} = a_1 = 5 \text{ м/с}^2.$$

б) Обозначим  $v$  – скорость шайбы в момент начала скольжения,  $R$  – расстояние от шайбы до оси вращения. Тогда

$$a_3^2 = \left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + a_2^2, v = a_2 t, R\varphi = \frac{a_2 t^2}{2}.$$

Из этих уравнений после преобразований получим

$$\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 1} = 0,375 \text{ рад} = 21,5^\circ.$$

3. Обозначим скорость налетающей частицы до столкновения  $v$ , скорости частиц после столкновения  $v_1$  и  $v_2$ . Запишем законы сохранения импульса (в проекциях) и энергии:

$$mv = mv_1 \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{m}{2} v_2 \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$0 = mv_1 \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{m}{2} v_2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m}{2} \frac{v_2^2}{2}.$$

Из этих уравнений найдем

$$\alpha = 60^\circ.$$

4. Внутренняя энергия газа в изотермическом процессе остается постоянной. Из первого закона термодинамики следует

$$p\Delta V = \Delta Q = N\Delta t,$$

где  $\Delta V$  – приращение объема газа за малое время  $\Delta t$ ,  $p$  – давление газа в некоторый момент времени,  $N$  – мощность нагревателя в этот момент. Учтем, что объем газа изменяется с постоянной скоростью:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2V_0 - V_0}{\Delta t} = \frac{V_0}{t_0}.$$

Мгновенные значения давления и объема при изотермическом процессе удовлетворяют уравнению

$$pV = p_0V_0.$$

После простых преобразований получим для мощности

$$N = \frac{p_0V_0^2}{t_0V}.$$

Мощность максимальна при  $V = V_0$ , а минимальна при  $V = 2V_0$ . Следовательно,

$$N_{\max} = \frac{p_0V_0}{t_0} = 200 \text{ мВт}, \quad N_{\min} = \frac{p_0V_0}{2t_0} = 100 \text{ мВт}.$$

5. а) Кинетическая энергия системы максимальна при минимальной потенциальной энергии, т.е. при максимальном расстоянии между крайними шариками. В этом положении обе нити вытянуты вдоль одной прямой, а скорости шариков перпендикулярны этой прямой. Из симметрии системы и закона сохранения импульса следует, что скорости крайних шариков одинаковы и в 2 раза меньше скорости среднего шарика. Поэтому кинетическая энергия среднего шарика в 4 раза больше кинетической энергии каждого из крайних и равна

$$E_1 = \frac{2}{3} E_{\max} = 0,067 \text{ Дж}.$$

б) Угол между нитями минимален, когда расстояние между крайними шариками минимально и, следовательно, потенциальная энергия их взаимодействия максимальна и равна

$$U_{\max} = \frac{kq^2}{2l \sin(\alpha_{\min}/2)},$$

где  $l$  – длина нити,  $k$  – коэффициент пропорциональности в законе Кулона. В этом положении кинетическая энергия системы равна нулю. Запишем закон сохранения энергии:

$$U_{\max} = E_{\max} + \frac{kq^2}{2l}$$

и после преобразований найдем

$$\alpha_{\min} = 2 \arcsin \left( 1 - \frac{E_{\max}}{U_{\max}} \right) = 60^\circ.$$

*11 класс*

1. а) Трения нет, следовательно, механическая энергия камня сохраняется:

$$mgR = \frac{mv^2}{2}, \text{ откуда } v = \sqrt{2gR}.$$

б) В момент отрыва камня от полусферы

$$\frac{mv_1^2}{R} = mg \cos \alpha_1, \quad \frac{mv_1^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha_1),$$

где  $v_1$  – скорость камня,  $\alpha_1$  – угол наклона скорости к горизонту. Из этих уравнений находим

$$\cos \alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{2}{3} Rg}.$$

Угол падения  $\alpha$  определим, учитывая, что горизонтальная составляющая скорости камня при свободном падении не изменяется:

$$\cos \alpha = \frac{v_1 \cos \alpha_1}{v} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

в) Начальная скорость камня при его броске с земли будет минимальной, если в точке  $A$  скорость камня станет равной нулю. Поэтому камень должен двигаться вверх по той же траектории, по которой он скользил, а затем падал из точки  $A$  на землю. Бросать его нужно из точки приземления под углом  $\beta = \alpha \approx 67^\circ$  к горизонту и с начальной скоростью  $v_0 = v = \sqrt{2gR}$ .

2. Скорость  $v$  понижения уровня воды определяется разностью потоков молекул воды, испаряющихся с поверхности, и молекул пара, конденсирующихся при столкновении с поверхностью воды:

$$\rho v = I_{\text{исп}} - I_{\text{конд}},$$

где  $\rho$  – плотность воды,  $I_{\text{исп}}$  – масса молекул, испаряющихся в единицу времени с единицы поверхности воды,  $I_{\text{конд}}$  – масса молекул, конденсирующихся в единицу времени на единице поверхности. Величина  $I_{\text{конд}}$  пропорциональна концентрации  $n$  молекул пара:

$$I_{\text{конд}} = \alpha n v_{\text{мол}},$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности,  $v_{\text{мол}}$  – средняя скорость молекул пара, зависящая от температуры. Учтем, что  $n = \phi n_{\text{нас}}$ , где  $n_{\text{нас}}$  – концентрация молекул насыщенного пара,  $\phi$  – относительная влажность. Примем, что величина  $I_{\text{исп}}$  при фиксированной температуре не зависит от  $n$ . При  $\phi = 1$  пар является насыщенным и находится в равновесии с жидкостью. Поэтому

$$I_{\text{исп}} = \alpha n_{\text{нас}} v_{\text{мол}}.$$

Подставляя потоки в уравнение  $\rho v = I_{\text{исп}} - I_{\text{конд}}$ , получим

$$\rho v = \alpha n_{\text{нас}} (1 - \phi) v_{\text{мол}}.$$

Отсюда следует, что при фиксированной температуре

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1 - \phi_2}{1 - \phi_1}, \text{ и } v_2 = \frac{1 - \phi_2}{1 - \phi_1} v_1 = 0,33 \text{ см/сутки}.$$

3. а) По теореме об изменении кинетической энергии,

$$\frac{m(5v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = A_{12},$$

где  $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$  – работа электрических сил. Отсюда получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{12mv^2}{q}.$$

б) Из условия задачи следует, что бусинка и сфера заряжены разноименно. Для определенности будем считать, что полусфера заряжена положительно, а бусинка отрицательно. Рассмотрим точки  $A$  и  $A'$ , расположенные симметрично относительно диаметральной плоскости среза полусферы, как показано на рисунке 8. Опреде-

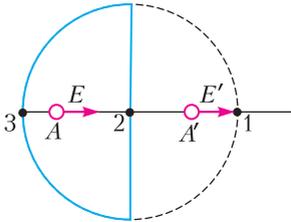


Рис. 8

ляя поле в точке  $A'$ , мысленно наложим на положительно заряженную полусферу полную сферу, однородно заряженную по поверхности отрицательным зарядом той же величины, что и исходная полусфера. Поскольку напряженность поля внутри однородно заряженной сферы равна нулю, то напряженность поля при таком добавлении сферы в точке  $A'$  не изменится. Но в результате наложения зарядов мы получим полусферу, однородно заряженную отрицательным зарядом и расположенную теперь не слева, а справа от диаметральной плоскости среза. Отсюда следует, что напряженности поля в симметрично расположенных точках  $A$  и  $A'$  одинаковы:  $\vec{E} = \vec{E}'$ . Поэтому

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3,$$

где  $\varphi_3$  – потенциал в точке 3 удара бусинки о внутреннюю поверхность полусферы. Тогда для скорости бусинки в точке 3 можно записать

$$\frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = q(\varphi_1 - \varphi_3) = 2q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Отсюда найдем

$$v_3 = 7v.$$

4. Напряженность поля однородно заряженного шара максимальна на его поверхности и равна

$$E_{\max} = \frac{k|q|}{\varepsilon R^2}.$$

Учитывая, что  $|q| = Ne$ , где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона, найдем

$$N = \frac{\varepsilon E_{\max} R^2}{ke} \approx 40.$$

5. Эквивалентная схема приведена на рисунке 9. По закону Ома находим

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R} + \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R} = \frac{2\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_4}{R} = 0,05 \text{ мкА}.$$

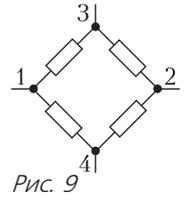


Рис. 9

**Заключительный этап  
XLVII Всероссийской олимпиады  
школьников по математике**

(см. «Квант» №7)

9 класс

1. При  $k = 143$ .

Предположим, что на окружности есть 8 точек одного цвета, скажем красного. Добавим к ним еще две отмеченные точки, получив десятиугольник  $A_1A_2 \dots A_5B_1B_2 \dots B_5$ . Тогда отрезки  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_5B_5$  попарно пересекаются, и среди них есть три отрезка, у которых все концы красные. Это противоречит условию. Таким образом, точек каждого цвета не больше семи, поэтому  $k \geq \frac{1000}{7}$ , т.е.  $k \geq 143$ .

При  $k = 143$  отметим дополнительную, 1001-ю точку и разделим все отмеченные точки на 143 группы по 7 подряд идущих точек. Каждую группу окрасим своим цветом. Пусть  $A_1B_1, \dots, A_5B_5$  – пять попарно пересекающихся отрезков с концами в отмеченных точках. Можно считать, что точки  $A_1, A_2, \dots, A_5, B_1, B_2, \dots, B_5$  расположены на окружности именно в этом порядке. Предположим, что отрезок  $A_1B_1$  имеет одноцветные концы, скажем красные. Тогда либо все точки  $A_1, A_2, \dots, A_5$ , либо все точки  $B_1, B_2, \dots, B_5$  красные. В первом случае максимум две из точек  $B_1, B_2, \dots, B_5$  красные. Но тогда три отрезка, не содержащие этих точек, будут иметь разноцветные концы. Второй случай аналогичен.

2.  $n = 2^m$  при  $m > 1$ .

Для  $n = 2^m$  любое натуральное  $a > 2$  является  $n$ -разложимым в силу равенства

$$a^{2^m} - 2^{2^m} = (a-2)(a^1 + 2^1)(a^2 + 2^2) \dots (a^{2^{m-1}} + 2^{2^{m-1}}).$$

Действительно, среди сомножителей в правой части присутствуют все числа вида  $a^d + 2^d$ , где  $d$  – делитель  $n$ , меньший  $n$ .

Пусть теперь  $n$  не является степенью двойки, тогда у него есть нечетный простой делитель  $p$  и  $n = pk$ , где  $k > 1$  – натуральное число. Предположим, что существует  $n$ -разложимое число  $a$ . Тогда  $a^{pk} - 2^{pk}$  делится на  $a^k + 2^k$ . Кроме того,  $a^{pk} + 2^{pk}$  делится на  $a^k + 2^k$ , поскольку  $p$  нечетно.

Следовательно,  $2 \cdot 2^{pk} = (a^{pk} + 2^{pk}) - (a^{pk} - 2^{pk})$  также делится на  $a^k + 2^k$ . Таким образом, число  $a^k + 2^k > 1$  является делителем степени двойки и, значит, само является степенью двойки.

В частности, отсюда следует, что  $a$  четно, т.е.  $a = 2b$  для некоторого натурального  $b > 1$ . Тогда  $b^k + 1 = \frac{a^k + 2^k}{2^k} > 1$  также является степенью двойки и, значит,  $b$  нечетно. Если  $k$  четно, то число  $b^k + 1$  дает остаток 2 при делении на 4, и при этом это число больше 2, что невозможно. Стало быть,  $k$  нечетно. Но тогда число

$$b^k + 1 = (b + 1)(b^{k-1} - b^{k-2} + b^{k-3} - \dots - b + 1)$$

не может быть степенью двойки, поскольку вторая скобка нечетна и больше единицы. Значит,  $n$ -разложимого числа не существует.

**3.** Введем координаты на нашей прямой. Пусть данные отрезки – это  $I_0 = [a_0; b_0], I_1 = [a_1; b_1], \dots, I_n = [a_n; b_n]$ ; нумерацию отрезков выберем так, что  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ . Если  $b_k \geq b_{k+1}$  при некотором  $k$ , то отрезок  $I_k$  содержит  $I_{k+1}$ , и потому отрезки  $I = I_{k+1}$  и  $J = I_k$  – искомые. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что  $b_0 < b_1 < \dots < b_n$ .

Рассмотрим  $2n$  отрезков  $[a_0; a_1], [a_1; a_2], \dots, [a_{n-1}; a_n], [b_0; b_1], [b_1; b_2], \dots, [b_{n-1}; b_n]$  (некоторые из них могут иметь нулевую длину). Рассмотрим кратчайший из них – пусть для определенности это  $[a_k; a_{k+1}]$ , а его длина равна  $l$ . Тогда

$$b_k - b_0 = (b_k - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_{k-2}) + \dots + (b_1 - b_0) \geq kl$$

и, аналогично,

$$a_n - a_k = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{k+1} - a_k) \geq (n - k)l.$$

Поскольку  $I_n$  и  $I_0$  имеют общую точку, имеем  $b_0 \geq a_n$ , откуда

$$b_k - a_k \geq (b_k - b_0) + (a_n - a_k) \geq kl + (n - k)l = nl.$$

Итак, длина  $d$  отрезка  $I_k$  не меньше чем  $nl$ . Иначе говоря, часть  $[a_k; a_{k+1}]$  этого отрезка, лежащая вне  $I_{k+1}$ , имеет длину, не превосходящую  $d/n$ . Поэтому отрезки  $I = I_k$  и  $J = I_{k+1}$  – искомые.

**4.** Пусть прямая, проходящая через  $E$  и параллельная  $AB$ , пересекает прямую  $AC$  в точке  $X$  (рис.10). Поскольку треугольники  $CEX$  и  $CBA$  подобны, имеем  $\frac{EC}{CB} = \frac{XC}{CA}$ .

Заметим, что дуга  $CB$  описанной окружности  $\omega_B$  треугольника  $CDB$  равна  $2\angle CDB$ ; тому же равна дуга  $CDA$  описанной окружности  $\omega_A$  треугольника  $ADC$ . Из равенства выше получаем, что конфигурация из трех точек  $E, C, B$  и

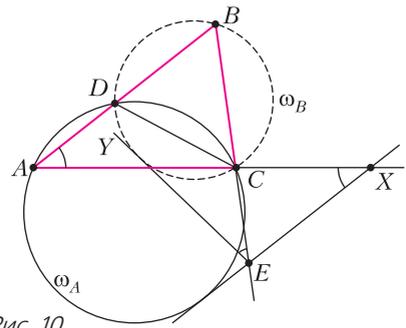


Рис. 10

окружности  $\omega_B$  подобна конфигурации из точек  $X, C, A$  и окружности  $\omega_A$ .

Рассмотрим в первой конфигурации луч  $EY$ , соответственный лучу  $XE$  во второй. Поскольку  $XE$  касается  $\omega_A$ , луч  $EY$  касается  $\omega_B$ . Кроме того,  $\angle YEB = \angle EXA = \angle BAC$ . Поэтому луч  $EY$  отсекает от угла  $ABE$  треугольник, два угла которого равны  $\angle BAC$  и  $\angle ABC$ , т.е. этот треугольник подобен треугольнику  $ABC$ .

**5.** Пусть  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Если ровно один корень лежит на отрезке  $[-1; 1]$ , то трехчлен меняет знак на этом отрезке, т.е.

$$(1 + a + b)(1 - a + b) = f(1)f(-1) \leq 0.$$

Тогда

$$0 \geq b^2(1 + a + b)(1 - a + b) = (b^2 + ab + b)(b^2 - ab + b) = f(b)f(-b).$$

Следовательно, на отрезке  $[-b; b]$  есть корень, причем если знак полученного неравенства строгий, то корень ровно один (и он не в конце отрезка). В случае равенства один из корней равен  $\pm b$ , а второй  $\pm 1$ , причем  $b > 1$  (иначе на отрезке  $[-1; 1]$  будет два корня). Тогда на интервале  $(-b; b)$  лежит ровно один корень.

**6.**  $1/2$ .

Пусть  $O$  – центр описанной окружности  $\Omega$  треугольника  $ABC$  (рис.11). Поскольку  $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$ , точка  $O$  лежит на описанной окружности  $\gamma$  треугольника  $ATC$ . Пусть прямая

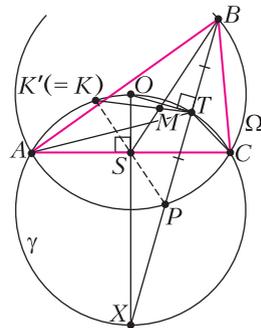


Рис. 11

$BT$  вторично пересекает окружность  $\gamma$  в точке  $X$ , а окружность  $\Omega$  – в точке  $P$ . Поскольку  $\angle ATX = \angle CTX = 60^\circ$ , точка  $X$  лежит на среднем перпендикуляре к  $AC$ , поэтому  $OX$  – диаметр окружности  $\gamma$ . Значит,  $BT \perp OT$ , т.е.  $T$  – середина хорды  $BP$  окружности  $\Omega$ .

Наконец, пусть точка  $K'$  симметрична точке  $P$  относительно точки  $S$  – середины стороны  $AC$ . Поскольку  $\angle AK'C = \angle APC = 120^\circ$ , точка  $K'$  лежит на  $\gamma$ . Точка  $M$  лежит на медиане  $BS$  треугольника  $BPK'$  из вершины  $B$  и делит ее в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B$ ; поэтому  $M$  – точка пересечения медиан треугольника  $BPK'$ . Значит,  $M$  лежит и на медиане  $K'T$ , поэтому  $K' = K$  и  $KM : MT = 2 : 1$ .

**8.** Приведем одну из возможных договоренностей. Каждый мудрец будет пользоваться одной из двух стратегий: либо выбирать из двух предложенных чисел нечетное – стратегия Н, либо выбирать из двух чисел большее – стратегия Б. Выбирать их они будут так.

(1) Первый мудрец действует по стратегии Б. Второй мудрец действует по стратегии Н, если первый выбрал тройку, иначе он использует стратегию Б.

(\*)  $k$ -й мудрец, при  $3 \leq k \leq 99$ , действует по стратегии Н, если  $(k - 1)$ -й мудрец выбрал тройку, а  $(k - 2)$ -й – не тройку; иначе он использует стратегию Б.

(100) Сотый мудрец действует по стратегии Б, если 99-й выбрал тройку, а иначе – по стратегии Н.

Проанализируем, что произойдет к моменту захода сотого мудреца. Выпишем в ряд 99 выбранных к этому моменту чисел в порядке их выбора; пусть  $S$  – их сумма. Если в ряду записана единица, то она была выписана по стратегии Н, поэтому прямо перед ней записана тройка, а прямо перед этой тройкой не может стоять другой тройки. Выделим в выписанном ряду эти тройку и единицу. Выделенные пары не пересекаются, сумма в каждой из них равна 4. Все остальные числа в ряду – либо двойки, либо тройки.

Далее, если среди невыделенных чисел есть тройка, рассмотрим первую такую тройку. Либо она стоит в конце ряда (т.е. ее выбрал 99-й мудрец), либо после нее не может стоять ни единица (иначе она выделена), ни двойка (по алгоритму (\*)). Поэтому после нашей тройки может стоять лишь тройка, и она тоже не выделена.

Итак, либо все невыделенные числа – двойки (и  $S = 198$ ), либо среди них ровно одна трой-

ка – последняя (и  $S = 199$ ), либо невыделенных троек хотя бы две (и  $S \geq 200$ ). В последнем случае мудрецы уже выдержали испытание, ибо после хода последнего мудреца сумма превысит 200.

Иначе мы получаем, что  $S = 198$ , если 99-й мудрец не назвал 3, и  $S = 199$ , если назвал. Согласно (100), в первом случае сумма 100 выбранных чисел будет нечетной, а во втором она будет больше 200. Значит, и в этих случаях испытание пройдено.

10 класс

**2.**  $x_1 = x_2 = \dots = x_{20} = 2$ .

Из условия следует, что все  $x_i$  больше 1, а также  $x_{i+2}^2$  делится на  $x_i$  при  $i = 1, 2, \dots, 20$  (здесь и далее  $x_{j+20} = x_j = x_{j-20}$  для  $j = 1, \dots, 20$ ).

Пусть  $x_k$  – наибольшее из чисел  $x_1, \dots, x_{20}$ , а  $p$  – простой делитель числа  $x_{k-5}$ . Поскольку  $x_{k-3}^2$  делится на  $x_{k-5}$ , а  $x_{k-1}^2$  делится на  $x_{k-3}$ , то  $x_{k-3}$  и  $x_{k-1}$  делятся на  $p$ . А тогда и НОК( $x_{k-5}, x_{k-4}$ ) и НОК( $x_{k-4}, x_{k-3}$ ) делятся на  $p$ , поэтому  $x_{k-2}^2$  делится на  $p$ . Таким образом, числа  $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}$  все делятся на  $p$ , поэтому их попарные НОДы не меньше  $p$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} x_k^2 &= \text{НОК}(x_{k-1}, x_{k-2}) + \text{НОК}(x_{k-2}, x_{k-3}) = \\ &= \frac{x_{k-1}x_{k-2}}{\text{НОД}(x_{k-1}, x_{k-2})} + \frac{x_{k-2}x_{k-3}}{\text{НОД}(x_{k-2}, x_{k-3})} \leq \\ &\leq \frac{x_{k-1}x_{k-2}}{p} + \frac{x_{k-2}x_{k-3}}{p} \leq \frac{2x_k^2}{p}. \end{aligned}$$

Поскольку  $p \geq 2$ , такая цепочка неравенств может выполняться только в случае, когда  $p = 2$  и все неравенства обращаются в равенства. В частности,  $x_{k-2} = x_{k-1} = x_k$  и  $\text{НОД}(x_{k-2}, x_{k-1}) = p = 2$ . Значит,  $x_k = 2$ , а тогда и все  $x_i$  равны 2 (поскольку  $x_k$  наибольшее из них и все эти числа больше 1).

Остается заметить, что набор  $x_1 = x_2 = \dots = x_{20} = 2$  удовлетворяет условию.

**3.** Конструкция возможна только при  $k < N$ , и тогда наибольшее количество авиалиний равно  $C_N^2 - C_k^2$ .

Рассмотрим граф, в котором вершины – это города, ребра – авиалинии, причем ребра, соответствующие авиалиниям  $i$ -й компании, покрашены в  $i$ -й цвет.

*Пример.* Пусть в графе вершины  $v_1, \dots, v_k$  не смежны друг с другом, а из вершины  $v_i$  ведут ребра цвета  $i$  во все вершины с номерами, большими  $k$ . Все ребра между вершинами с номерами, большими  $k$ , присутствуют и покрашены произвольным образом. Очевидно, что при удалении ребер цвета  $i$  из вершины  $v_i$  нельзя доб-

раться до остальных вершин графа, а изначальный граф связан.

*Оценка.* Докажем индукцией по  $k$ , что в графе отсутствует хотя бы  $C_k^2$  ребер; из этого следует, что  $k < N$ , ибо иначе ребер бы не было и граф не был бы связным.

*База при  $k = 1$*  очевидна.

*Переход  $k - 1 \rightarrow k$ .* Рассмотрим все компоненты связности  $k$ -го цвета. Их хотя бы  $k$ , иначе можно, добавляя цвета, каждый раз уменьшать количество компонент хотя бы на 1 (если при добавлении цвета количество компонент не уменьшилось, то при удалении из исходного графа ребер этого цвета граф остается связным). Тогда  $(k - 1)$ -й цвет уже делает граф связным.

Стянем каждую компоненту  $k$ -го цвета в вершину (т.е. сопоставим каждой компоненте вершину нового графа, проведя ребра между вершинами тогда и только тогда, когда какие-то вершины соответствующих компонент были связаны ребром; если между двумя компонентами были ребра нескольких цветов, оставим один). Полученный граф удовлетворяет индукционному предположению, поэтому в нем отсутствует хотя бы  $C_{k-1}^2$  ребер, соответствующих хотя бы тому же количеству в исходном графе.

С другой стороны, если выкинуть все ребра  $k$ -го цвета, хотя бы одна из его компонент, пусть  $B$ , должна разбиться на две. Это значит, что в любую другую компоненту  $D$  нет ребер хотя бы от одной из частей  $B$ . Это означает, что еще минимум  $k - 1$  ребро отсутствует, и всего отсутствующих ребер хотя бы  $C_{k-1}^2 + (k - 1) = C_k^2$ , что и требовалось.

4. Обозначим  $c = \frac{1}{n - \sqrt{n/2}}$ . Назовем пару карточек *неудачной*, если написанные на них числа отличаются менее чем на  $c$ . Карточки в такой паре имеют последовательные номера, потому что в противном случае числа на них отличаются более чем на 1, а  $c \leq \frac{1}{2}$  при  $n \geq 4$ . Если карточка  $i$  состоит в двух неудачных парах, то эти пары —  $(i - 1, i)$  и  $(i, i + 1)$ . В таком случае  $1 < a_{i+1} - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i + a_i - a_{i-1} \leq 2c \leq 1$ , противоречие. Следовательно, каждая карточка состоит максимум в одной неудачной паре. Пусть нашлись две неудачные пары:  $(i, i + 1)$  и  $(j, j + 1)$ . В силу сказанного выше, все эти 4 карточки различны. С другой стороны,  $|a_i + a_{j+1} - a_{i+1} - a_j| = |(a_{j+1} - a_j) - (a_{i+1} - a_i)| \leq \max(a_{i+1} - a_i, a_{j+1} - a_j) < c$ , и задача решена. Здесь мы воспользовались тем, что  $0 < a_{j+1} - a_j < c$  и  $0 < a_{i+1} - a_i < c$ . Пусть неудачных пар карточек не более одной. Если неудач-

ная пара есть, пусть эта пара  $(T, T + 1)$ . Если таких пар нет, положим  $T = 1$ .

Обозначим через  $S_m$  множество пар карточек  $x < y$  с суммой номеров  $x + y = m$ . Заметим, что  $|S_{2n+5}| = n + 2$ ,  $|S_{2n+5-2s}| = |S_{2n+5-2s+1}| = n + 2 - s$  и  $|S_{2n+5+2s}| = |S_{2n+5+2s-1}| = n + 2 - s$  при  $1 \leq s \leq n$ . Положим  $S = S_{2n+5+2k} \cup S_{2n+5+2k-1} \cup \dots \cup S_{2n+5-2k}$ , число  $k$  мы подберем позже. Тогда  $|S| = n + 2 + 4(n + 1 + n + n - 1 + \dots + n - k + 2) = n + 2 + 2k(2n - k + 3)$ .

Пусть в  $S$  две пары вида  $(T, p)$  и  $(T + 1, p)$ , здесь  $p$  может быть как больше  $T$ , так и меньше. Тогда  $T + p \geq 2n + 5 - 2k$  и  $T + p + 1 \leq 2n + 5 + 2k$ . Значит,  $2n + 5 - 2k - T \leq p \leq 2n + 4 + 2k - T$ , т.е.  $p$  может принимать не более  $4k$  значений. Для каждого из них удалим из  $S$  карточку вида  $(T, p)$ . В результате мы получим множество  $S'$ , удалив из  $S$  не более  $4k$  пар карточек. Значит,  $|S'| \geq n + 2 + 2k(2n - k + 3) - 4k = n + 2 + 2k(2n - k + 1)$ .

Заметим, что  $a_i + a_j \in [i + j, i + j + 2)$ . Поскольку в каждой паре из  $S'$  сумма номеров карточек принимает значения от  $2n + 5 - 2k$  до  $2n + 5 + 2k$ , то сумма чисел на карточках из таких пар лежит в промежутке  $[2n + 5 - 2k; 2n + 7 + 2k)$ , длина которого равна  $4k + 2$ . Тогда суммы чисел в каких-то двух парах карточек  $(x, y), (z, t) \in S'$  отличаются не более чем на

$$\frac{4k + 2}{|S'| - 1} = \frac{4k + 2}{2k(2n - k + 1) + n + 1}.$$

Остается доказать, что при некотором  $k$  число  $\frac{2k(2n - k + 1) + n + 1}{4k + 2}$  больше  $n - \sqrt{n/2}$ . Преобразуем числитель:  $2k(2n - k + 1) + n + 1 = (2k + 1)\left(2n - k + \frac{3}{2}\right) - n - \frac{1}{2}$ . Значит,

$$\frac{2k(2n - k + 2) + n + 1}{4k + 2} = n + \frac{3}{4} - \frac{k}{2} - \frac{n}{4k + 2} - \frac{1}{8k + 4}.$$

Наконец, выберем число  $k$  как целое число из промежутка  $\left[\sqrt{n/2} - \frac{1}{2}; \sqrt{n/2} + \frac{1}{2}\right]$ . Тогда  $4k + 2 \geq 2\sqrt{2n}$ , поэтому

$$\begin{aligned} n + \frac{3}{4} - \frac{k}{2} - \frac{n}{4k + 2} - \frac{1}{8k + 4} &\geq \\ &\geq n + \frac{3}{4} - \sqrt{n/2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2n}} > n - \sqrt{n/2} \end{aligned}$$

при  $n \geq 4$ .

Итак, мы получили, что суммы вида  $a_x + a_y$  и  $a_z + a_t$  для некоторых  $(x, y), (z, t) \in S'$  отличаются менее чем на  $c$ . Остается проверить, что эти 4 карточки разные. Предположим противное. По

построению  $S'$  имеем  $x \neq y$  и  $z \neq t$ . Пусть, без ограничения общности,  $x = z$ . Тогда  $|a_y - a_t| < c$ , т.е. карточки  $y$  и  $t$  образуют неудачную пару. Значит, это карточки  $T$  и  $T + 1$ . Следовательно,  $(x, T) \in S$  и  $(x, T + 1) \in S'$ , противоречие.

**6.** Пусть  $t \in \mathbb{R}$ . Заметим, что  $P(P(P(t))) = P(t)$  в том и только в том случае, когда  $P(t)$  – корень многочлена  $P(P(x)) - x$ . У этого многочлена есть корни, обозначим их  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Поскольку  $n > 1$ , то степень многочлена  $P(P(x)) - x$  равна  $n^2$ , поэтому  $k \leq n^2$ . Таким образом, все корни уравнения  $P(P(P(x))) = P(x)$  – в точности корни многочленов  $P(x) - x_1, P(x) - x_2, \dots, P(x) - x_k$ . Все эти многочлены – степени  $n$ , поэтому у каждого из них не более  $n$  корней. Итого, уравнение  $P(P(P(x))) = P(x)$  имеет не более  $kn$  корней, но по условию их  $n^3$ . Это возможно лишь в случае, когда каждый из многочленов  $P(x) - x_1, P(x) - x_2, \dots, P(x) - x_k$  имеет  $n$  различных вещественных корней и  $k = n^2$ . У этих многочленов коэффициенты при  $x^n$  одинаковы и коэффициенты при  $x^{n-1}$  одинаковы. Тогда по теореме Виета суммы их корней равны. Следовательно, если корни первого многочлена определить в одну группу, а корни остальных – в другую, то все корни уравнения  $P(P(P(x))) = P(x)$  разобьются на две группы с равными средними арифметическими.

**8.** Заметим, что точка  $P$  лежит внутри окружности  $(QDR)$  и четырехугольник  $PQDR$  – выпуклый. Значит, точка  $D$  лежит внутри окружности  $(PQR)$ . При этом точка  $Y$  лежит вне окружности  $(PQR)$ . Следовательно, окружность  $(PQR)$  вторично пересекает окружность  $(DRY)$  в некоторой точке  $N_1$ , которая лежит на дуге  $DY$ , не содержащей точку  $R$  (рис.12). В частности,  $N_1$

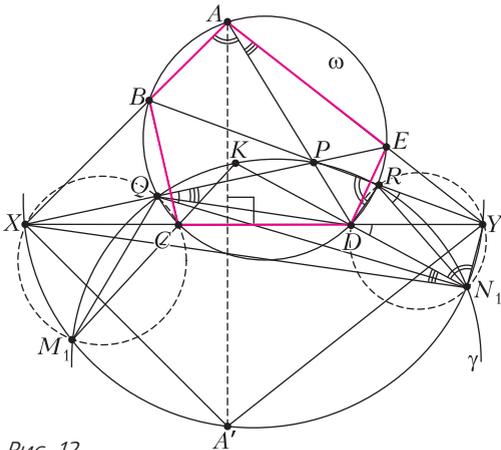


Рис. 12

лежит в другой полуплоскости от прямой  $CD$ , нежели точка  $A$ .

Заметим, что  $\angle N_1QP = \angle N_1RY = \angle N_1DY$ . Следовательно,  $\angle XQN_1 = \angle XDN_1$ , поэтому точка  $N_1$  лежит на окружности  $(XQD)$ . Кроме того,  $\angle XN_1Y = \angle XN_1D + \angle DN_1Y = \angle PQD + \angle DRP = \angle EAD + \angle DAB = \angle YAX = \angle XA'Y$ . Второе равенство следует из вписанности четырехугольников  $XQDN_1$  и  $YRCM_1$ , третье – из вписанности пятиугольника  $ABCDE$ , а последнее выполнено, поскольку точки  $A$  и  $A'$  симметричны относительно  $XY$ . Таким образом,  $\angle XN_1Y = \angle XA'Y$ , поэтому точка  $N_1$  лежит на окружности  $(A'XY)$ . Пусть  $M_1$  – вторая точка пересечения окружностей  $(PQR)$  и  $(XQC)$ . Рассуждая аналогично, мы получаем, что  $M_1$  лежит на окружностях  $(CRY)$  и  $(A'XY)$  и в другой полуплоскости относительно  $CD$ , нежели  $A$ . Отметим, что  $M_1 \neq N_1$ . Иначе точка  $N_1$  лежала бы и на окружности  $(CRY)$ , и на окружности  $(DRY)$ , что невозможно. Таким образом,  $M_1$  и  $N_1$  – две точки пересечения окружностей  $(PQR)$  и  $(A'XY)$ .

Назовем  $M = M_1, N = N_1$ . Пусть прямая  $DN$  вторично пересекает  $\gamma$  в точке  $K$ . Тогда  $\angle QMK = \angle QNK = \angle QXD = \angle QMC$ , откуда следует, что точки  $Q, M, K$  лежат на одной прямой. Значит, прямые  $CM$  и  $DN$  пересекаются на окружности  $\gamma$ , что и требовалось.

11 класс

**1.  $m = 2021$ .**

Пусть  $m > 2021$ . Поскольку любая степень числа  $m + 1$  дает остаток 1 от деления на  $m$ , то сумма 2021 таких степеней дает остаток 2021 от деления на  $m$ . С другой стороны, степени числа  $m$  дают лишь остатки 0 или 1 от деления на  $m$ , поэтому сумма 2021 степени числа  $m$  может давать остаток 2021 от деления на  $m$  только если все слагаемые равны 1. Но тогда  $n - 2021 < m$ , противоречие. Значит,  $m \leq 2021$ .

Для  $m = 2021$  есть пример:  $2021 \cdot m - 1 + 2020(m + 1)$ .

*Замечание.* Можно привести также пример числа  $n - m$ , у которого в системах счисления с основаниями  $m$  и  $m + 1$  при  $m = 2021$  сумма цифр равна 2021 (тем самым, оно тоже удовлетворяют условию задачи):

$$n - m^2 + m(m - 1) = (m + 1)^2 + (m + 1)(m - 4) + 3.$$

**2. Не может.**

Покажем, что при данных условиях на многочлен каждая следующая точка касания лежит по другую сторону от оси  $Oy$ , чем предыдущая. Пусть  $P(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \dots + a_1x$  – данный многочлен,  $Q(x) = a_{2m+1}(2m + 1)x^{2m} + \dots + a_1$  – его производная. Пусть  $A(z; P(z))$  – это

$k$ -я точка касания, а  $B(t; P(t)) - (k+1)$ -я. Тогда касательная в точке  $A$  имеет уравнение  $y = Q(z)(x-z) + P(z)$ . Значит,  $P(t) = Q(z)(t-z) + P(z)$ , откуда  $P(t) - P(z) = (t-z)Q(z)$ . Разделив это равенство на  $t-z$  и перенеся все слагаемые в правую часть, получим при четной степени  $n-1 = 2m$  выражение:  $a_{2m+1}((2m+1)z^{2m} - t^{2m} - t^{2m-1}z - \dots - z^{2m})$ . Пусть  $z$  и  $t$  одного знака (считаем, что  $0$  с любым числом одного знака). Если  $|z| > |t|$ , то выражение в скобках положительно, если же  $|z| < |t|$ , то оно отрицательно. Такие же знаки будут иметь выражения при остальных степенях:  $2m-2, 2m-4, \dots, 0$ . Значит, если  $z$  и  $t$  одного знака, то равенство  $(t-z)Q(z) - (P(t) - P(z)) = 0$  невозможно. Итак, любые две последовательные точки касания должны находиться по разные стороны от оси  $Oy$ . И в силу нечетности  $n$  касательная в точке  $A_n$  не может пройти через точку  $A_1$ .

**3.**  $2^{40}$ .

*Пример.* Рассмотрим все  $2^{40}$  слов, у которых начиная с 41-й все буквы Ш, а первые 40 - У или Я. Этот набор слов удовлетворяет условию. *Оценка.* Каждому из наших  $m$  слов сопоставим  $2^{60}$  слов, заменяя каждую букву Ш на У или Я (всеми возможными способами). Заметим, что полученные  $m \cdot 2^{60}$  слов состоят из букв У и Я и попарно различны (для слов, полученных из одного и того же слова, это ясно из построения, а для слов, полученных из двух разных, следует из условия). Таким образом,  $m \cdot 2^{60} \leq 2^{100}$  и  $m \leq 2^{40}$ .

**4.** Будем обозначать  $(XYZ)$  окружность, описанную около треугольника  $XYZ$ . Пусть  $P_a$  - центр окружности  $(BC_1C_2)$ , а  $P_c$  - центр окружности  $(BA_1A_2)$  (рис.13). Обозначим  $\angle BAC = 2\alpha$  и  $\angle ACB = 2\gamma$ . Поскольку  $BC_2 \parallel AC$ , то  $\gamma = \angle BCC_2 = \angle ACC_2 = \angle BC_2C$  и  $\angle C_2BC_1 = \angle BAC = 2\alpha$ . Значит,  $BC_2 = BC$ . Кроме того,  $\angle C_1P_aB = 2\gamma$ ,  $\angle C_1P_aO_a = \angle C_2P_aO_a = \angle C_2BC_1 = 2\alpha$  и  $\varphi = \angle P_aBC_2 = \angle 90^\circ - \angle C_2C_1B$ . Здесь мы воспользовались тем, что точка  $P_a$  - центр  $(BC_1C_2)$  и  $P_aO_a$  - серединный перпендикуляр к отрезку  $C_1C_2$ .

Проведем в треугольнике  $BC_1C_2$  высоту  $BH$ . Тогда  $\angle HBC_1 = |90^\circ - \angle BC_1C_2| = \varphi$ . Прямая  $P_aO_a$  перпендикулярна  $C_2C_1$ , а потому параллельна  $BH$ . Значит, угол между этой прямой и прямой  $AB$  равен  $\varphi$ . Также проекции точек  $P_a$  и  $O_a$  на  $AB$  - середины отрезков  $BC_1$  и  $AC_1$ . Следовательно,  $P_aO_a = \frac{AB}{2 \cos \varphi}$ . Проекция точки  $P_a$  на прямую  $BC_2$  - середина отрезка  $BC_2$ , а угол между прямыми  $BP_a$  и  $BC_2$  равен  $\varphi$ , откуда  $BP_a =$

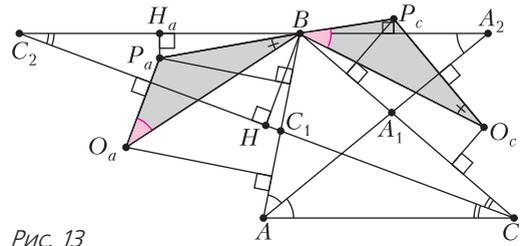


Рис. 13

$$= \frac{BC_2}{2 \cos \varphi} = \frac{BC}{2 \cos \varphi}.$$

Из сказанного выше,  $\frac{P_aO_a}{BP_a} = \frac{AB}{BC}$  и  $\angle BP_aO_a = \angle BP_aC_1 + \angle C_1P_aO_a = 2\alpha + 2\gamma$ . Рассуждая аналогично, мы получаем, что  $\frac{P_cO_c}{BP_c} = \frac{BC}{AB}$  и  $\angle BP_cO_c = 2\alpha + 2\gamma$ . Значит, треугольники  $P_aBO_a$  и  $P_cO_cB$  подобны. Тогда  $\angle P_aBO_a + \angle P_cBO_c = \angle P_aBO_a + \angle P_aO_aB = 180^\circ - \angle BP_aO_a = 180^\circ - 2\alpha - 2\gamma = \angle ABC$ . Поскольку  $\angle BP_aC_1 = 2\gamma$  и  $BP_a = P_aC_1$ , то  $\angle P_aBC_1 = 90^\circ - \gamma$ . Аналогично,  $\angle P_cBA_1 = 90^\circ - \alpha$ . Таким образом,  $\angle O_aBO_c = \angle P_aBA + \angle ABC + \angle P_cBC - (\angle P_aBO_a + \angle P_cBO_c) = 90^\circ - \gamma + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha - \gamma = \angle AIC$ , что и требовалось.

В равенствах  $\angle BP_aC_1 = 2\gamma$  (1) и  $\angle C_1P_aO_a = \angle C_2P_aO_a = \angle C_2BC_1 = 2\alpha$  (2) мы воспользовались расположением точек  $P_a$  и  $O_a$ , которое остается обосновать. А именно,  $\angle C_1C_2B = \gamma$  - острый, поскольку это половина угла  $ACB$ . Значит, точка  $P_a$  лежит в той же полуплоскости относительно прямой  $BC_1$ , что и  $C_2$ , и выполняется (1). Также  $\angle O_aC_1A = |90^\circ - \angle AC_2C_1|$ . Этот угол острый, и в случае, когда  $O_a$  лежит в другой полуплоскости относительно оси  $AC_1$ , нежели  $P_a$ , не превосходит  $90^\circ - \gamma$ , так как  $\angle AC_2C_1 < 180^\circ - \angle BC_2C_1 = 180^\circ - \gamma$ . Значит, точки  $B$  и  $O_a$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой  $C_1P_a$ , а тогда выполнено (2).

**6.** Будем обозначать  $(XYZ)$  окружность, описанную около треугольника  $XYZ$ . Обозначим через  $\omega$  описанную сферу тетраэдра  $SABC$ . Она пересекает плоскость  $SAB$  по окружности  $(SAB)$ . Точка  $C'$  лежит на окружности  $(SAB)$ , а потому и на сфере  $\omega$ . Рассуждая аналогично, мы получаем, что точки  $A'$  и  $B'$  лежат на сфере  $\omega$ . Тогда точки  $S, A', B', C'$  лежат на окружности, по которой сфера  $\omega$  пересекает плоскость, проходящую через  $B$  параллельно плоскости  $ABC$ . Не умаляя общности, можно считать, что они лежат на окружности именно в таком порядке, т.е. четырехугольник  $SA'B'C'$  - вписанный.

Отметим на луче  $A'C$  точку  $X$ , а на луче  $B'C'$  - точку  $Y$  так, что  $A'C \parallel SY$  и  $SB' \parallel C'X$ . Тогда  $\angle XC'Y = \angle SB'C' = \angle SA'C' = \angle XSY$ , поэтому че-

треугольник  $XSC'Y$  тоже вписанный. Следовательно,  $\angle C'YX = \angle A'SC' = 180^\circ - \angle A'B'C'$ , поэтому  $A'B' \parallel XY$ . Заметим, что  $SC' \parallel AB$ ,  $SX \parallel BC$  и  $XC' \parallel SB' \parallel AC$ .

Таким образом, стороны треугольников  $ABC$  и  $C'SX$  попарно параллельны. Кроме того, они лежат в параллельных плоскостях. Значит, если параллельно перенести треугольник  $C'SX$  так, чтобы вершина  $C'$  попала в точку  $A$ , то полученный треугольник будет отличаться от треугольника  $ABC$  гомотетией, а сами треугольники  $ABC$  и  $C'SX$  подобны. При упомянутых выше преобразованиях точка  $Y$  перейдет в точку  $T$  на окружности  $(ABC)$ , причем  $TA \parallel YC'$ ,  $TB \parallel YS$  и  $TC \parallel YX$ . А тогда  $TA \parallel B'C'$ , и точка  $T$  лежит в плоскости  $AB'C'$ ; аналогично для плоскостей  $BA'C'$  и  $CA'B'$ . А в плоскости  $ABC$  она лежит по построению, поэтому эти 4 плоскости имеют общую точку.

*Замечание.* После того, как мы доказали, что точки  $A', B', C'$  лежат на описанной сфере тетраэдра, можно закончить решение инверсией с центром в точке  $S$  (с радиусом 1). Обозначим через  $A^*, B^*$  и  $C^*$  образы точек  $A, B$  и  $C$ . Образ  $A^*$  точки  $A'$  – точка пересечения касательной к окружности  $SB^*C^*$  в точке  $S$  с прямой  $B^*C^*$ , аналогичное верно для точек  $B^*$  и  $C^*$ . Несложно проверить, что эти три точки лежат на одной прямой, обозначим ее  $l$ . Тогда окружности  $(A^*B^*C^*)$ ,  $(A^*B^*C^*)$ ,  $(A^*B^*C^*)$  и  $(A^*B^*C^*)$  проходят через одну точку – точку Микеля  $M$  четырехсторонника, образованного прямыми  $A^*B^*$ ,  $B^*C^*$ ,  $C^*A^*$  и  $l$ . А это означает, что плоскости  $A_1B_1C_1$ ,  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$  и  $ABC$  проходят через прообраз  $M$ .

**7.** Тождественная перестановка, т.е.  $a_i = i$ .

Рассмотрим перестановку  $(a_1, a_2, \dots, a_{2021})$ , для которой выполняется условие задачи. Обозначим  $d_i = i - a_i$ . Очевидно, что сумма всех чисел  $d_i$  равна нулю. Пусть не все  $d_i$  равны 0, в таком случае существуют индексы  $j, k$  такие, что  $d_j < 0$ ,  $d_k > 0$ . Возьмем  $r = 2021(d_k - d_j) - d_j + 1$ , тогда  $\text{НОД}(r + d_j, r + d_k) = \text{НОД}(r + d_j, d_k - d_j) = 1$ . По китайской теореме об остатках существует целое  $m > r$  такое, что  $m + j$  кратно  $r + d_j$  и  $m + k$  кратно  $r + d_k$ . Тогда для пары натуральных чисел  $(m, n) = (m, m - r)$ , во-первых, выполняется  $|m - n| = r > 20^{21}$ , а во-вторых, верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{2021} \text{НОД}(m + i, n + a_i) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \text{НОД}(m + j, n + a_j) + \text{НОД}(m + k, n + a_k) + 2019 = \\ &= \text{НОД}(m + j, -r - d_j) + \text{НОД}(m + k, -r - d_k) + 2019 = \\ &= (r + d_j) + (r + d_k) + 2019 = 2r + d_j + d_k + 2019 \geq \\ &\geq 2r - 2020 + 1 + 2019 = 2r = 2|m - n|, \end{aligned}$$

что противоречит выбору перестановки. Следовательно, все  $d_i$  равны 0 и перестановка  $(a_1, a_2, \dots, a_{2021})$  является тождественной, т.е.  $a_i = i$ .

**Лемма.** Пусть натуральные  $A, l \geq 2$  удовлетворяют неравенству  $A > l^3$ . Обозначим через  $S(n)$  сумму  $\sum_{i=1}^l \text{НОД}(A, n + i)$ . Тогда  $S(n) < 2A$  для любого натурального  $n$ .

**Доказательство.** Предположим противное и обозначим через  $M$  максимум из чисел вида  $\text{НОД}(A, n + i), i \in [1; l]$ , причем  $M = \text{НОД}(A, n + i_0)$ . Тогда  $\frac{2A}{l} \leq M \leq A$ , а при  $i \neq i_0$  верна следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} &\text{НОД}(A, n + i) \cdot \text{НОД}(A, n + i_0) \leq \\ &\leq A \cdot \text{НОД}(n + i, n + i_0) \leq A|i - i_0| < Al, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $S(n) < M + (l - 1) \cdot \frac{Al}{M}$ . На отрезке  $\left[\frac{2A}{l}; A\right]$  функция  $f(x) = x + \frac{A(l-1)l}{x}$  достигает максимума в одном из его концов, поэтому

$$\begin{aligned} S(n) &< \max \left\{ f\left(\frac{2A}{l}\right), f(A) \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{2A}{l} + \frac{l^2(l-1)}{2}, A + l(l-1) \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ A + \frac{l^2(l-1)}{2}, A + l(l-1) \right\} < 2A, \end{aligned}$$

так как  $l \geq 2$  и  $A > l^3$ , что противоречит нашему предположению.

Тот факт, что тождественная перестановка подходит под условие задачи, следует из леммы с  $A = |m - n|$ ,  $l = 2021$  и из равенства  $\text{НОД}(m + i, n + i) = \text{НОД}(m - n, n + i)$ .

**8. Лемма.** Пусть  $k$  – натуральное число, и у каждой из ста девочек имеется  $k$  шариков, причем всего у них есть по  $k$  шариков каждого из 100 цветов. Тогда девочки могут выбрать каждая по одному из своих шариков так, чтобы все 100 шариков были разных цветов.

**Доказательство.** Будем говорить, что девочка дружит с цветом, если у нее есть шарик этого цвета. Заметим, что любые  $m = 1, 2, \dots, 100$  девочек дружат в совокупности хотя бы с  $m$  цветами

(иными словами, имеют шарики хотя бы  $m$  различных цветов): иначе по принципу Дирихле среди их  $km$  шариков какого-то цвета было бы более  $k$  шариков. Тогда по лемме Холла можно сопоставить каждой девочке дружественный ей цвет так, чтобы все сопоставленные цвета были различны – а это нам и нужно. Лемма доказана. Пусть теперь девочки придут на квадратное поле  $100 \times 100$  (для игры в большие классики), и каждая девочка выделит себе свой столбец, чтобы разложить в нем свои шарики – по одному на поле. Сначала они воспользуются леммой при  $k = 100$ , найдут у себя по шарiku так, чтобы те были разного цвета, и выложат их в первой строке. Затем, применяя лемму при  $k = 99$  (к еще не выложенным шарикам), они найдут по шарiku так, чтобы те были разного цвета, и выложат их во второй строке и так далее. В результате в каждой строке окажутся шарики разных цветов, а в каждом столбце будут выложены шарики соответствующей ему девочки. Осталось заметить, что симметрия относительно диагонали этого поля приводит к тому, что в каждом столбце лежат шарики разного цвета, и эта симметрия соответствует 4950 разрешенным обменам.

### **Вниманию наших читателей**

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mccme.ru](http://biblio.mccme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 216-40-40**

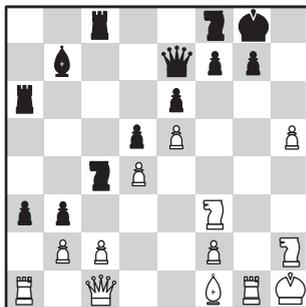
## Возвращение В ЭЛИТУ

Одним из триумфаторов турнира на кубок мира в Сочи стал российский гроссмейстер Сергей Карякин, уступивший лишь в финале Яну-Кшиштофу Дуде из Польши и завоевавший путевку в турнир претендентов на будущий год. Таким образом, Сергей «вернулся в элиту», преодолев серию неудачных выступлений, случившихся после матча с Магнусом Карлсеном.

В четвертьфинальном матче с Самом Шенклендом из США Сергею пришлось дважды отыгрываться после поражений. И оба раза он справился!

### С.Карякин – С.Шенкленд Сочи, 2021

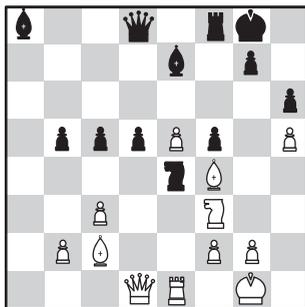
1. e4 e6 2. d3 d5 3. ♖d2 ♗f6 4. ♗g3 ♗e7 5. g3 a5 6. ♗g2 a4 7. a3 c5 8. 0-0 ♗c6 9. ♖e1 0-0 10. e5 ♗d7 11. ♗f1 b5 12. h4. Стороны проводят типичные для староиндийского начала планы – белые атакуют на королевском фланге, черные пытаются вскрыть линии на ферзевом. 12...♗b7 13. h5 h6 14. ♗f4 ♗b6 15. ♗d2 ♗fc8 16. g4 ♗d8 17. ♗1h2 ♗a6 18. ♗h1 b4 19. ♖g1 ♗f8 20. ab cb 21. d4 ♗a5? Черным нужно защищаться: 21...a3! 22. b3 ♗h7 с последующим ♗g5 и f6. 22. g5 ♗c4 23. ♗c1 hg 24. ♗g5 b3? Черные снова игнорируют угрозы, и это уже решающая ошибка. Упорнее 24...♗g5 25. ♗g5 f6. 25. ♗e7 ♗e7 26. ♗f1 a3.



27. ♖g7+! (но не 27. ♗h6? ♗g6!) ♗g7 28. ♗g4 f5 (28...♗g8 29. ♗h6) 29. ef+ ♗f6 30. ♗f6 ab (не спасает и 30...♗f6 31. ba b2 32. ♗g5+ ♗f7 33. ♗b1) 31. ♗g5+ ♗f7 32. h6 ♗g6 33. ♗h4 ba1 ♗34. ♗g6+ ♗e7 35. ♗g7+ ♗d6 36. ♗d7×. Выигрыш белых.

### С.Карякин – В.Федосеев Сочи, 2021

1. e4 e5 2. ♗f3 ♗c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♗f6 5. 0-0 ♗e7 6. ♖e1 b5 7. ♗b3 d6 8. c3 0-0 9. h3 ♗b7 10. d4 e8 11. ♗bd2 ♗f8 12. a3 h6 13. ♗c2 d5 14. de ♗e5 15. ♗e5 ♗e5 16. ♗f3 (опасно напрашивающееся 16. f4 ♗e8 17. e5 ввиду 17...d4! с контратакой) ♗e8 17. e5 ♗e4 18. ♗f4 c5 19. a4 f5 20. h4 ♗e7 21. h5 ♗f8? Первая и, по сути, определяющая результат ошибка. Черные недооценили 24-й ход белых. 22. ab ab 23. ♗a8 ♗a8.



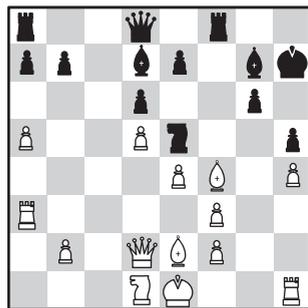
24. e6! Белые прогонят коня с e4, а проходную пешку поддержит ладья. 24...♗e8 25. ♗e5 ♗g5 26. ♗g6 d4!? Остроумная попытка обострить игру с намечаемой жертвой. 27. cd ♗f2!? 28. ♗f2! (но не 28. ♗g5 ♗g5 29. ♗f2 ♗g2) ♗f4 29. ♗f4 ♗h4+ 30. ♗g1 (30. g3? ♗h2) ♗f4 31. d5 ♗g3 32. ♖e2! (обходя последнюю ловушку: 32. ♗f5? ♗d5!) ♗g5 33. ♗d2, и черные сдались, так как проходные пешки не остановить.

После поражения в полуфинале от Сергея Карякина Владимиру Федосееву не повезло и в борьбе за третье место: он вышел на чемпиона мира, ко-

торый создал очередной позиционный шедевр.

### В.Федосеев – М.Карлсен Сочи, 2021

1. d4 ♗f6 2. c4 g6 3. h4 ♗g7 4. ♗c3 d6 5. e4 ♗c6 6. d5 ♗e5 7. ♗e2 h5 8. ♗f4 (точнее 8. ♗f3 ♗f3+ 9. gf 0-0, и слона можно удачнее развить на e3) 0-0-9. ♗f3 ♗f3+ 10. gf c6 11. ♗d2 cd 12. cd ♗h7 13. a4 ♗d7 14. a5 f5 15. ♗a3 ♗e5 16. ♗e3 f4 17. ♗f4 ♗d7 18. ♗d1.



18...♗f4! Позиционная жертва качества. Черные рассчитывают на блокаду по черным полям, а белым трудно найти активный план. 19. ♗f4 ♗h6 20. ♗g3 ♗f8 21. ♗e3 ♗f4 22. ♗g2 ♗c8 23. ♗c3 ♗c3 24. bc ♗c8 25. c4 b5 26. ab ab 27. ♗g1? Белые недооценивают вторжение ферзя. Точнее 27. 0-0 ♗h3 28. ♗h1 ♗f1 29. ♗f1 с более-менее равными шансами. 27...♗a8 28. ♗f1 ♗a2 29. ♗g2 ♗a1+? Ошибка. Сразу выигрывало 29...♗b1+ 30. ♗e1 b5! 31. cb ♗b5 32. ♗b5 ♗f3! 30. ♗e1 ♗b2 31. ♗g2? Решающая ошибка. Необходимо было разменять коней: 31. ♗d3! ♗d3 32. ♗d3. 31...♗c1+ 32. ♗e1 ♗d2 33. ♗g2 ♗g7 34. ♖g1 ♗f8 35. ♗h1 e6 36. ♖g3 ed 37. ed ♗f5 38. ♖g1 ♗f7 39. ♖g3 ♗d7 40. ♖g5 ♗g5 41. hg ♗e5, и белые сдались.

А. Русанов

# Продукты с физикой

«Ветру и орлу... нет закона»



Неужели это правда?  
Конечно, нет!

