# Инварианты и их применение при решении задач

***Инвариантом***некоторого преобразования называется ве­личина или свойство, не изменяющееся при этом преобразо­вании. В качестве инварианта чаще всего рассматриваются чётность (нечётность) и остаток от деления, хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки; раскраски и т.п. Причем, применение чётности — одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач.

Сформулируем наиболее важные утверждения, на которых основано применение этой идеи:

1. чётность суммы нескольких целых чисел совпадает с чёт­ностью количества нечётных слагаемых;
2. знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется чётностью количества отрицательных со­множителей.

## Примеры задач, решаемых данным методом.

***Задача №1.*** На доске записано 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Вам предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: за­черкнуть любые два числа и если они одинаковые, то допиши­те к оставшимся числам нуль, а если разные, то единицу. Ка­кое число останется на доске?

***Решение.***

Сумма 15 исходных чисел равна 7. 7 — число нечётное. Рассмотрим, какая сумма чисел будет получаться после выполнения операции. Если вычеркнем 2 нуля, то после дописывания нуля на доске будет 7 нулей и 7 единиц. Сумма этих 14 чисел будет нечётная. Если вычеркнем 2 единицы, то на доске останется после дописывания нуля 9 нулей и 5 еди­ниц. Сумма данных 14 чисел будет нечётной. Наконец, вычер­кивая нуль и единицу и приписывая единицу, мы получим на доске 7 нулей и 7 единиц, сумма которых снова является не­чётным числом. Таким образом, мы замечаем, что после вы­полнения данной операции получается на 1 число на доске меньше, причём сумма оставшихся чисел всё время остаётся нечётной. Так как 1 — нечётное число, а 0 — чётное, то на доске после выполнения 14 раз указанной операции получает­ся нечётное число, то есть 1.

***Задача №2.*** На плоскости расположено 13 шестерёнок, соединённых по цепочке. Могут ли все шестерёнки вращаться одновремен­но? А если шестерёнок 14?

***Решение.***

Пусть первая шестерёнка вращается по часовой стрелке, тогда вторая — против часовой стрелки, третья — по часовой стрелке и т.д. Получим, что двенадцатая будет вра­щаться против часовой стрелки, а тринадцатая - по часовой стрелке. Значит, первая должна вращаться против часовой стрелки, что противоречит тому, что она вращается по часо­вой стрелке. Поэтому, все 13 шестерёнок вращаться одновре­менно не могут. А вот 14 уже могут.

*Вывод.* Часто при решении подобного рода задач важно найти чередующиеся объекты.

***Задача №3.*** Все костяшки домино выложены в цепь. На одном кон­це цепи оказалось 3 очка. Сколько очков на другом конце?

***Решение.***

Всего костяшек с тройкой на конце 7: 0-3, 1-3, 2-3, 3-3, 4-3, 5-3, 6-3. Костяшка 3-3 имеет «тройку» на обоих концах. Без нее остается 6 костяшек. Так как при игре в доми­но в цепи они должны располагаться парами, то на другом конце цепи будет 3 очка.

*Вывод.* При решении аналогичных задач полезно иногда объекты разбивать на пары.

***Задача №4.*** Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет достоинством 1 и 5 рублей?

***Решение.***

Так как сумма 15 нечётных чисел является чис­лом нечётным, а 50 — число чётное, то разменять 50 рублей на 15 монет по 1 и 5 рублей нельзя.

***Задача №5.*** Хулиганы Вася и Петя порвали школьную стенгазету, в которой была заметка об их плохой учёбе. Причём Вася рвал каждый кусок на 5 частей, а Петя на 9. Заместитель директора школы, заметив такое безобразие, потребовала собрать обрыв­ки стенгазеты. Ребята нашли 1999 обрывков. Все ли обрывки были найдены и почему?

***Решение.***

Рассмотрим, какое число обрывков могло полу­читься. Если Вася первоначально порвал стенгазету на 5 кус­ков, а затем один из кусков снова на 5, то всего их получается 9. Если теперь Вася будет дальше рвать некоторые куски на 5, а Петя на 9, то число кусков может получаться 5, 9, 13, 17, 21 и т. д. Можно заметить, что общее число кусков можно запи­сать как *4n +* 1. Так как 1999 = 499 • 4 + 3, то ученики собрали не все обрывки стенгазеты.

*Вывод.* В данной задаче в качестве инварианта выступил остаток от деления на 4.

***Задача №6.*** Квадрат 5x5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.

***Решение.***

Найдём произведение всех чисел в квадрате. Так как произведение чисел в каждой строке отрицательно, то и произведение всех чисел будет отрицательно. Но с другой стороны, произведение всех чисел равно и произведению чи­сел в столбцах. А так как произведение всех чисел отрица­тельно, то найдется столбец, в котором произведение чисел является отрицательным.

*Вывод.* В задаче использовалась идея — нахождение про­изведения чисел.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| + | + | - | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |

***Задача №7.*** В таблице  расставлены знаки «+» и «-» так, как показано на рисунке. Разрешается изменить знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных одновременно в одной строке, в одном столбце или вдоль прямой, параллельной какой-нибудь из диагоналей (в частности, в любой угловой клетке). Можно ли с помощью таких операций получить таблицу, не содержащую ни одного минуса?

***Решение.***

Заменим плюсы и минусы числами 1 и -1. В качестве инварианта можно взять произведение чисел, находящихся в клетках, которые заштрихованы на рисунке.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|   |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Поскольку оно в результате разрешенной операции все время сохраняет первоначальное значение, равное -1. Но, значит, среди заштрихованных чисел всегда будет оставаться -1, следовательно, получить таблицу, не содержащую ни одного минуса, нельзя.

***Задача №8.*** На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вместо них написать цифру, отличную от стертых (2 вместо 0 и 1, 1 вместо 0 и 2, 0 вместо 1 и 2). Докажите, что если в результате нескольких таких операций на доске останется одна-единственная цифра, то она не зависит от порядка, в котором производились стирания.

***Решение.***

Обозначим через х0, х1, х2 число нулей, единиц и двоек соответственно. Выполнив один раз разрешенную операцию, мы изменим каждое из этих чисел на 1 и, следовательно, изменим четность всех трех чисел. Когда на доске останется одна цифра, два из этих чисел х0, х1, х2 становятся равными нулю, а третье – единице. Значит, с самого начала два из этих чисел имеют одну четность, а третье – другую. Поэтому независимо от того, в каком порядке производятся стирания, в конце единице может равняться лишь одно из чисел х0, х1, х2, которое с самого начала имело не туже четность, что два других.

***Задача №9.*** На доске написаны многочлены и . Разрешается записать на доске сумму, разность или произведение любых уже написанных многочленов. Может ли на доске получиться многочлен 

***Решение.***

Заметим, что и . То есть значения многочленов и  в точке делятся на 3. Однако если для произвольных многочленов и их значения в точке делятся на 3, то и значения , , также делятся на 3. Однако  не делится на 3, то многочлен на доске появиться не может.

***Задача №10.*** Квадратный трехчлен разрешается заменить на один из трехчленов или . Можно ли с помощью таких операций из квадратного трехчлена получить трехчлен

***Решение.***

Пусть  - квадратный трехчлен ( с дискриминантом ). После первой операции трехчлен меняется на трехчлен с дискриминантом , а после второй операции – на трехчлен с дискриминантом . Итак, при выполнении разрешенных операций дискриминант сохраняется. Но у трехчлена дискриминант равен 4, а у трехчлена он равен 64. Следовательно из квадратного трехчлена получить трехчленнельзя.

## Задачи для самостоятельного решения

1. Конь вышел с поля al шахматной доски и через не­сколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чёт­ное число ходов**.**
2. Можно ли доску размером 5 x 5 заполнить доминошками размером 1 x 2?
3. 2003 человека выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается пере­ставлять только двух людей, стоящих через одного?
4. В древней рукописи приведено описание города, распо­ложенного на 8 островах. Острова соединены между собой и с материком мостами. На материк выходят 5 мостов; на 4 ост­ровах берут начало по 4 моста, на 3 островах берут начало по 3 моста и на один остров можно пройти только по одному мосту. Может ли быть такое расположение мостов?
5. 16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них раз­ложить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?
6. Можно ли выпуклый девятиугольник разрезать на па­раллелограммы?
7. На столе стоят 7 стаканов - все вверх дном. Разрешает­ся за один раз перевернуть любые 4 стакана. Можно ли за не­сколько раз добиться того, чтобы все стаканы стояли правиль­но, то есть вниз дном?
8. Сумма 2002 натуральных чисел — число нечётное. Ка­ким числом: чётным или нечётным является произведение этих чисел?
9. На доске написаны числа 1, 2, 3, ... 1997, 1998, 1999, 2000, 2001. Разрешается стереть с доски любые 2 числа и вме­сто них записать модуль их разности. В конце концов, на дос­ке останется одно число. Может ли оно равняться нулю?
10. На доске написано в строку 2003 целых числа. Дока­зать, что из них можно стереть одно число так, что сумма ос­тавшихся чисел будет чётной. Верно ли это для 2002 чисел?
11. В каждую клетку квадратной таблицы размером 25 x 25 вписано произвольно одно из чисел: +1 или -1. Под каждым из столбцов записывается произведение всех чисел данного столбца, а справа от каждой строки — произведение всех чи­сел данной строки. Может ли сумма всех 50 произведений быть равной нулю?
12. На доске написано 8 плюсов и 13 минусов. Разрешает­ся стирать любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак оста­нется после выполнения 20 таких операций?
13. Учитель написал на листке бумаги число 10. 25 учени­ков передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу — как хочет. Может ли в ре­зультате получиться число 0?
14. В некотором государстве первоначально было 10 бан­ков. С момента перестройки общества все захотели быть бан­кирами. Но, по закону, открыть банк можно только путём деления уже существующего банка на 4 новых банка. Через 2 года министр финансов сообщил президенту, что в стране действует уже 2001 банк, после чего был немедленно уволен за некомпетентность. Что не понравилось президенту?
15. Можно ли по правилам игры в домино выложить все 28 костей в одну цепочку так, чтобы сумма на её концах была нечётной? (Дубли кладём вдоль цепи, конечной считаем вто­рую половину кости.)
16. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из его цифр не равна 9, либо, вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Моно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?
17. В таблице т х п расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке или столбце равна 1. Докажите, что т = п.
18. По кругу расставлено 7 чисел: 4 единицы и 3 нуля. Ка­ждую секунду над числами проделывают следующую опера­цию: между соседними числами ставят нуль, если они различ­ны, и единицу, если они равны; после этого старые числа сти­рают. Могут ли через некоторое время все числа стать одина­ковыми?
19. Числа 0, 1, 2, ..., 9 записаны по кругу. За один ход раз­решается прибавить к двум соседним числам одно и то же це­лое число. Можно ли за несколько ходов получить десять ну­лей?
20. В вершинах куба записаны числа 2, 0, 0, 3, 1, 9, 5, 7. За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах одного ребра, одно и то же целое число. Можно ли за несколь­ко ходов получить нули во всех вершинах?
21. У Ивана-царевича есть два волшебных меча: с помо­щью первого он может отрубить у Змея Горыныча 21 голову, а с помощью второго - 4 головы, но тогда у Змея Горыныча от­растает 1999 голов. Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 30 голов? (При­мечание: если у Змея Горыныча осталось голов 3 или 2 или 1, то никаким мечом рубить нельзя.)
22. На плоскости лежат три шайбы. Хоккеист бьет по од­ной из них так, чтобы она прошла между двумя другими и ос­тановилась в некоторой точке. Можно ли все шайбы вернуть на свои места после 2003 ударов?
23. Страницы книги пронумерованы подряд с первой до последней страницы. Хулиган Вася вырвал из разных мест книги 17 листов и сложил номера всех 34 вырванных страниц. У него получилось число 2002. Правильно ли Вася сосчитал?
24. 101 лошадь разместили в 15 конюшнях. Почему хотя бы в одной конюшне будет обязательно нечётное число лоша­дей?
25. 100 фишек стоят в ряд. Любые две фишки, располо­женные через одну, можно менять местами. Удастся ли распо­ложить фишки в обратном порядке?
26. На чудо-дереве садовник вырастил 45 бананов и 50 апельсинов. Каждый день он срывает 2 плода и тут же на де­реве вырастает новый. Причем, если он срывает 2 одинаковых плода, то вырастает апельсин, а если — 2 разных, то выраста­ет банан. Каким окажется последний плод на дереве?
27. Круг разбит на 10 секторов, в каждом из которых стоит по одной фишке. Одним ходом разрешается любые 2 фишки передвинуть в соседние секторы. Удастся ли через несколько ходов все фишки собрать в одном секторе?
28. В классе у каждого ученика не более трех врагов. До­кажите, что класс можно разбить на 2 группы так, что у каж­дого ученика в одной с ним группе будет не более одного вра­га, (Считается, что если А — враг В, то и В — враг А).
29. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя разрешается проделывать следующее: если эти числа равны а и в, то их можно заменить на и . Можно ли с помощью таких операций получить тройку из тройки ?

## Ответы и указания к решению

**1.** При каждом своем ходе конь меняет цвет поля, поэтому при возвращении обратно он должен сделать чётное число ходов.

**2.** Нет, так общее число клеток — 25 не делится на 2

**3.** Не всегда. При перестановке сохраняется чётность но­мера места. Поэтому, если самый высокий человек, например, стоит вторым, то он никогда не станет первым. Здесь число 2003 роли не играет.

**4.** Найдём число концов у всех мостов: 5 + 4 · 4 + 3 · 3 + 1 = 31.

31 — является числом нечётным. Так как число концов у всех мостов должно быть чётным, то такого расположения мостов быть не может.

**5.** Если число арбузов в соседних корзинах отличается на 1, то характер чётности числа арбузов в этих корзинах будет разным. Тогда чётность числа арбузов в корзинах бу­дет чередоваться, поэтому в половине корзин будет чётное число арбузов, а в половине нечётное. Тогда общее число арбузов в 8 корзинах с чётным числом арбузов и в 8 корзи­нах с нечётным числом арбузов будет чётным. По условию же всего арбузов — 55, а это нечётное число. Значит, раз­ложить нельзя.

**6.** Нет, так как если выпуклый многоугольник разрезается на параллелограммы, то его стороны обязательно разбиваются на пары параллельных сторон. Так как сторон 13, то у одной из сторон пары не будет.

**7.** Нет, так как в любом случае число перевёрнутых вверх дном стаканов будет числом нечётным.

**8.** Так как сумма 2002 чисел — число нечётное, то число нечётных слагаемых — нечётно. Тогда среди 2002 чисел есть хотя бы одно чётное число. А, значит, произведение 2002 чи­сел будет чётным числом.

**9.** Сумма всех записанных на доске чисел будет нечётной. При стирании 2 чисел могут быть следующие 3 варианта:

а) стираются 2 чётные числа, тогда модуль разности будет четным числом, а новая сумма будет числом нечётным;

б) стираются 2 нечётные числа, тогда модуль разности бу­дет чётным числом, а новая сумма будет числом нечётным;

в) стираются 1 чётное и 1 нечётное число, тогда модуль разности будет нечётным числом, а новая сумма будет снова числом нечётным.

Таким образом, в любом случае на доске останется нечёт­ное число. Так как нуль — число чётное, то оставшееся число нулем быть не может.

**10.** Рассмотрим 3 случая.

а) Среди 2003 целых чисел есть чётные и нечётные числа. Если количество нечётных чисел нечётно, то стираем любое из них. Если количество нечётных чисел четно, то из 2003 це­лых чисел хотя бы одно чётное. Его и стираем.

б) Пусть все 2003 числа — нечётные. Тогда стираем любое из них.

в) Пусть все 2003 числа — чётные. В этом случае стираем любое из них.

В случае, когда чисел 2002 и все они нечётные, оставшаяся сумма не может быть чётной. Поэтому для 2002 целых чисел это неверно.

**11.** Перемножая все 50 произведений, мы получим 1, так как в каждое произведение любое из чисел, вписанных в клет­ки таблицы, войдёт 2 раза (один раз в произведение по стро­кам, один раз - по столбцам). Тогда в число 50 сомножителей будет входить чётное число произведений с «-1» , а поэтому сумма чётного числа произведений с «1» и чётного числа про­изведений с

«-1» не будет равна 0. (25 — число нечётное, зна­чит, одинакового числа слагаемых не будет).

**12.** Заменяя все плюсы нулями, а минусы — единицами, заметим, что сумма двух стираемых чисел имеет тот же харак­тер чётности, что и число, записываемое вместо них. Так как сумма всех чисел была нечётной (13), то и последнее остав­шееся число будет нечётным, то есть единицей, и, значит, на доске останется минус.

**13.** От прибавления или вычитания единицы меняется ха­рактер чётности числа. Поэтому, если 25 раз менять характер чётности числа 10, то в результате получится нечётное число. Следовательно, число 0 получиться не может.

**14.** Заметим, что в результате превращения одного старого банка в четыре новых общее число банков увеличивается на 3. Таким образом, в любой момент времени число банков будет равно 10 + *Зn.* Первоначально остаток от деления количества банков на 3 был равен 1, а 2001 при делении на 3 даёт остаток 0. Значит, образоваться ровно 2001 банков в стране не могло.

**15.** В наборе домино клеток-половинок кости с одинако­вым количеством очков 8 штук, а в цепи они стоят подряд по 2 или 4. Значит, на концах может оказаться только разорван­ная пара. Поэтому сумма очков на концах будет чётной. Зна­чит, выложить цепь так, что сумма очков на концах была не­чётной, нельзя.

**16.** Пусть на доске написано число . Тогда рассматриваемые операции не изменяют число М = (*d +b*) *–* (*a +* c), так как они увеличивают (уменьшают) на единицу одно число из первой скобки, и одно число из второй скобки. Для числа 1234 М1 = (4+2) – (1+3) = 2, а для числа 2002 М2= (2+0) – (2+0) = 0. Поэтому требуемое невозможно.

**17.** Сумма чисел в таблице не зависит от способа ее под­счёта. С одной стороны, это количество строк, умноженное на 1, с другой — количество столбцов, умноженное на 1. То есть, *т* = *п.* Здесь инвариант — сумма чисел в таблице, а преобра­зование — нахождение суммы этих чисел.

**18**. Комбинация из семи единиц раньше, чем семь нулей, получиться не может, так как для появления семи единиц *пре­дыдущие цифры* должны быть одинаковыми — все нули или все единицы. Если же получилось семь нулей, то на предыду­щей стадии нули и единицы должны были чередоваться, что невозможно, так как их разное количество.

**19.** Сумма чисел, записанных по кругу, равна 45. Прибав­ляя 2 одинаковых целых числа к соседним числам, мы харак­тер чётности не меняем: сумма по-прежнему остается нечёт­ной. Так как сумма 10 нулей — нуль — число чётное, то ука­занными преобразованиями получить 10 нулей нельзя.

**20.** Так как сумма данных чисел: число 27 — нечётное, а при прибавлении двух одинаковых целых чисел чётность суммы не меняется, то получить все нули во всех вершинах не получится (сумма восьми нулей — число чётное).

**21.** Змей Горыныч теряет либо 21 голову, либо приобрета­ет 1995 голов. Оба эти числа делятся нацело на 7, а в начале поединка остаток был 2. В случае же отсутствия голов у Змея Горыныча, остаток был бы 0. Значит, отрубить все головы Змею Горынычу Иван-царевич не сможет.

**22.** После каждого удара меняется ориентация обхода шайб *А, В* и *С* (по ходу часовой стрелки — против хода часо­вой стрелки). Инвариантом будет сохранение ориентации по­сле чётного числа ударов. Значит, после 2003 ударов шайбы не удастся вернуть на свои места.

**23.** На каждом из 17 листов сумма номеров двух страниц число нечётное, так как на одной странице номер чётный, а на другой — нечётный. Тогда сумма 17 нечётных чисел будет нечётной. Так как 2002 — число чётное, то Вася ошибся при подсчёте.

**24.** Докажем задачу методом от противного. Пусть в каж­дой конюшне находится чётное число лошадей, тогда сумма чётных чисел — число чётное. А по условию всего лошадей 101 — число нечётное. Таким образом, получили противоре­чие. Значит, хотя бы в одной конюшне будет нечётное число лошадей.

**25.** Так как при перестановке фишек чётность места фиш­ки сохраняется, то первую фишку никогда не сделать послед­ней (1 — число нечётное, а 100 — число чётное)

**26.** Рассмотрим несколько случаев:

1) Садовник сорвал 2 апельсина, тогда вырастает 1 апель­син и на дереве будет 45 бананов и 49 апельсинов.

2) Садовник сорвал 2 банана, в этом случае вырастает 1 апельсин и на дереве будет 43 банана и 51 апельсин.

3) Если же садовник срывает 2 разных плода: апельсин и банан, то на дереве вырастает банан и всего плодов будет: 45 бананов и 49 апельсинов.

Итак, можно заметить, что ниже и в каждом из трёх случа­ев неизменным остается одно, а именно: количество бананов — нечётное число. Значит, инвариантом будет нечётность числа бананов на дереве, а поэтому последним плодом ока­жется банан.

**27.** Занумеруем сектора последовательно числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и присвоим каждой фишке номер сектора, в котором она находится. При передвижении какой-либо фишки в соседний сектор номер фишки меняется на единицу. Поэто­му чётность суммы номеров всех фишек при любых передви­жениях двух фишек не меняется. В первоначальном положе­нии сумма всех номеров фишек была равна 1 + 2 +... + 10 = 55 (нечетное число). Тогда как в случае, если все фиш­ки удалось собрать в одном секторе, то сумма номеров была бы чётной. Значит, собрать фишки в одном секторе не удастся.

**28.** Разобьем произвольным образом класс на 2 группы. Если в этом случае получилось, что в каждой группе у каж­дого ученика не более одного врага, то требование задачи выполнено. В противном случае, рассмотрим того ученика, пусть это будет *А,* у которого в одной с ним группе не менее 2 врагов. Значит, в другой группе у *А* будет не более одного врага. Переведём ученика *А* в другую группу (где у него вра­гов не более одного). Поступая аналогично так с каждым из учеников, у которого в одной с ним группе окажется 2 или 3 врага, мы, в конце концов, придём к искомому разбиению класса.

**29.** Нет. Так как при каждой операции сохраняется сумма квадратов чисел.

# Полуинварианты.

***Полуинвариантом*** называют величину, меняющуюся монотонным образом и принимающую конечное число различных значений.

***Задача №1.*** *В клетках таблицы вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Докажите, что после многократного повторения этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в любом столбце и в любой строке, неотрицательны.*

***Решение.***

Строки и столбцы для удобства будем называть линиями. Посмотрим, что происходит с суммой всех чисел в таблице при заданной операции. Она увеличивается, если сумма чисел на изменяемой линии отрицательна, уменьшается, если эта сумма положительна, и остается неизменной, если эта сумма равна нулю. Значит, если в таблице есть линия с отрицательной суммой чисел, то при помощи этой операции мы увеличиваем сумму всех чисел в таблице.

Но может ли сумма всех чисел в таблице увеличиваться при таких операциях бесконечно много раз?

Конечно же, нет! Ведь этими операциями можно получить лишь конечное число различных таблиц. Действительно, число, стоящее в данной клетке, либо совпадает с исходным числом, либо отличается от него только знаком. Поэтому количество различных таблиц заведомо не превосходит , и, значит, сумма всех чисел таблицы может принимать лишь конечное число различных значений.

Рассмотрим теперь исходную таблицу. Выберем в ней линию с отрицательной суммой чисел (если таких нет, то искомая таблица найдена). Применим нашу операцию к этой линии. В полученной таблице опять найдем линию с отрицательной суммой, применим нашу операцию, получим следующую таблицу и так далее. Так как на каждом шаге сумма чисел в таблице увеличивается, а эта сумма может принимать лишь конечное число значений, то либо на каком-то шаге мы получим таблицу с требуемыми свойствами, либо рано или поздно получим таблицу с максимально возможной суммой. Но она заведомо является искомой, потому что если в ней сумма чисел на какой-нибудь линии отрицательна, то, применив еще раз нашу операцию, мы получили бы таблицу с еще большей суммой.

***Задача №2.****. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и n прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что из этих точек можно опустить попарно непересекающиеся перпендикуляры на эти прямые так, чтобы на каждую прямую был опущен ровно один перпендикуляр.*

***Решение.***

Опустим перпендикуляры из данных точек на данные прямые произвольно (по одному на каждую прямую). Если никакие два не пересекаются, то требование задачи выполнено.

В противном случае рассмотрим два пересекающихся перпендикуляра АА1 и ВВ1, опущенные из точек А и В на прямые m и n соответственно. Пусть Р – точка их пересечения. Заменим теперь перпендикуляры АА1 и ВВ1 перпендикулярами АА2 и ВВ2, на прямые n и m соответственно. Докажем, что при этой замене сумма длин перпендикуляров уменьшится. В самом деле, и ; складывая эти неравенства, мы получаем .

Теперь поступим так же, как в предыдущей задаче. Рассмот­рим начальную картинку, состоящую из n прямых и n перпенди­куляров. Выберем на ней два пересекающихся перпендикуляра и применим нашу операцию: заменим эти два перпендикуляра на два других с меньшей суммой длин. В полученной картинке слова найдем два пересекающихся перпендикуляра, снова при­меним к ним нашу операцию и так далее. Тогда либо на каком­-то шаге мы получим картинку с попарно непересекающимися перпендикулярами, либо в конце концов получим картинку с минимально возможной суммой длин перпендикуляров (так как эта сумма может принимать лишь конечное число значений; почему?). Эта картинка и является искомой: если два перпенди­куляра на ней пересекаются, то, применив нашу операцию еще раз, мы получили бы картинку с еще меньшей суммой длин перпендикуляров.

n

A

B

P

A2

A1

B2

B1

m

Проанализируем эти два решения. Мы действовали в них по одной схеме: вводили некоторую величину (в первой задаче это сумма всех чисел таблицы, а во второй - сумма длин перпенди­куляров) и операцию, и результате применения которой эта величина менялась определенным образом: в первой задаче увеличивалась, а во второй - уменьшалась. Решение основыва­лось на том, что введенная величина может принимать лишь конечное число различных значений. Следовательно, данная операция может быть применена лишь конечное число раз, и мы неизбежно придем к требуемой в задаче ситуации.

С этой точки зрения вторая задача труднее первой, так как в ней нам пришлось придумать не только искомую величину, за изменением которой мы должны проследить, но и саму опера­цию.

Кроме того, вторая задача - прекрасный пример того, как легко можно пойти по ложному следу: новые перпендикуляры АА2 и ВВ2 не пересекаются, и поэтому кажется удобным следить за количеством точек пересечении наших n перпендикуляров, которое, на первый взгляд, всегда уменьшается при описанной операции. Однако это не так (постройте соответствующий при­мер).

Научиться придумывать нужную пару "операция - величина" далеко не просто. Здесь требуются опыт и интуиция.

***Задача 3.***  *Докажите, что любые 2п точек на плоскости являются концами n непересекающихся отрезков.*

B

***Решение.***

Проведем n отрезков с концами в данных точках произволь­ным образом. Если никакие два из них не пересекаются, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотримпару пересекающихся отрезков *АВ* иCD (рис.2). В качестве искомой операции естественно рассмотреть замену пересекающихся отрезков *АВ и CD* на непересекающиеся отрезки АС и *BD.*

Осталось найти полуинвариант - величину, которая при этой операции ведет себя монотонно. Так как сумма длин диагоналей *АВ и CD* выпуклого четырехугольника *АСВD* больше, чем сумма длин противоположных сторон АС и *ВD,* в качестве полуинварианта можно взять сумму длин всех n отрезков. Ясно, что эта сумма может принимать лишь конечное число значений. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, в конце концов получаем набор из n отрезков с минимальной суммой длин. Нетрудно понять, что в нем никакие два отрезка не пересекаются.

В задаче 3, по сути дела, вначале не было ни операции, ни полуинварианта. Однако после того, как мы подобрали опера­цию, выбор полуинварианта не представлял труда.

***Задача 4.*** *По окружности расставлены n чисел. Если подряд стоят числа а, b, с и d и при этом (а - d)(b - с) >0, то числа b и с разрешается поменять местами. Докажите, что через несколько шагов нам не удастся произвести ни одной такой перестановки.*

***Решение.***

Здесь операция замены чисел задана. Несмотря на то, что она затрагивает лишь два числа, удобно воспринимать эту операцию на всем наборе чисел, считая, что все остальные числа операция оставляет неизменными: ведь в соответствии с нашей «филосо­фией решения» необходимо подобрать некоторую величину, зависящую от всего набора чисел.

Итак, пусть подряд идущие числа *а, b, с и d* таковы, что *(а - d)(b - с)* > 0, т.е.

 *ab + сd > ас +bd.* При выполнении нашей операции мы перешли от четверки *а, b, с, d* к четверке *а, с, b, d,* причем мы видим, что сумма произведений соседних чисел изменилась:

*аb + bc + сd > aс + cb + bd.*

Теперь ясно, что полуинвариантом в этой задаче является сумма попарных произведений соседних чисел всего набора. При данной операции полуинвариант уменьшается, и так как он может принимать лишь конечное число значений (почему?), то наша операция может быть применена лишь конечное число раз.

***Задача 5.*** *С невыпуклым многоугольником производятся следующие операции. Если он лежит по одну сторону от прямой АВ, где А и В - несмежные вершины многоугольника, то одна из частей, на которые контур многоугольника делится точками А и В, центрально симметрично отражается относи­тельно середины отрезка АВ. Докажите, что после нескольких таких операций многоугольник станет выпуклым.*

***Решение.***

Итак, операция снова задана - это преобразование много­угольника. Полуинвариант, монотонно увеличивающийся при этой операции, здесь очевиден - это площадь многоугольника. Несколько менееочевидно, что площадь многоугольника в процессе наших преобразований многоугольника может прини­мать лишь конечное число значений. Чтобы это дока­зать, рассмотрим набор век­торов, идущих по сторонам многоугольника. При дан­ной операции этот набор не меняется; изменяется лишь порядок следования векто­ров друг за другом (рис.3). Значит, количество много­угольников, которые можно получить из данного многоугольника при помощи описанной операции, конечно, откуда и следует, что наш полуинвариант может принимать лишь конечное число значений.

***Задача 6.*** *В парламенте у каждого его члена**не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.*

***Решение.***

Разобьем парламент на палаты произвольным образом. Если у каждого парламентария при этом в одной с ним палате не более одного врага, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотрим парламентария А, у которого в одной с ним палате не менеедвух врагов. В качестве полуинварианта рассмот­рим число пар врагов, находящихся в одной палате. Понятно, что перемещав парламентария А в другую палату, мы уменьшаем это число. Остается лишь произнести стандартную фразу: «Полуинвариант может принимать лишь конечное число значений».

***Задача 7.*** *При дворе* короля *Артура собрались 2N рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более N - 1 врага. Докажите, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за Круглый Стол, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.*

***Решение.***

Рассадим рыцарей за Круглым Столом произвольным обра­зом. Если при этом получится, что никакие два врага не сидят рядом, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотрим рыцаря А, сидящего слева от своего врага В (рис.4,a).

Как и в предыдущей задаче, в качестве полуинварианта (это подсказывается самим условием задачи) рассмотрим число пар врагов-соседей. Нужно придумать операцию, уменьшающую это число. Это и есть самая сложная часть решения.

Среди друзей рыцаря А обязательно найдется такой рыцарь С, что его правый сосед D - друг рыцаря В (иначе у рыцаря В врагов более N - 1). Теперь "развернем" весь участок пола от В до С (справа от В, рис.4,б) в "обратную" сторону (рис.4,в). При этом рыцарь *В* станетсоседом рыцаря *D,* рыцарь С - соседом рыцаря А. Остальные пары соседей не изменятся. Следователь­но, полуинвариант действительно уменьшается.

В задачах на полуинвариант естественно возникает вопрос о времени, за которое заканчивается рассматриваемый процесс. Мы рекомендуем вам проанализировать с этой точки зрения все разобранные задачи. Вы убедитесь, что обычно это непростой вопрос. Мы приведем лишь один пример.

***Задача 8.*** *На доске в ряд произвольным образом написаны N чисел, каждое из которых равно + 1 или -1. За один ход разрешается* поменять *знак у нескольких подряд идущих чисел. За какое наименьшее число ходов можно заведомо получить из исходного набора набор из одних единиц?*

***Решение.***

Операция нам задана, а в качестве полуинварианта рассмотрим число пар соседей разного знака. При выполнении одной операции замены знаков этот полуинвариант может измениться не более чем на два.

Докажем теперь, что из набора чисел -1, +1, -1, +1, ... нельзя получить набор +1, +1, +1, ... менее чем за [(N + 1)/2] шагов. (Через [х]обозначена целая часть числа x.)Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного N. Пусть N = 2k, , т.е. [(N + 1)/2] = k. Тогда вначале полуинвариант равен 2k -1, а в конце он должен быть равен нулю. Но за k - 1 ход добиться требуемого невозможно.

Пусть N = 2k + 1, т.е. [(N + 1)/2] = k + 1. В этом случае полуинвариант исходного набора равен 2k, поэтому за k - 1 ход исходный набор заведомо нельзя перевести в набор из одних единиц. Докажем, что это нельзя сделать и за k ходов. Для этого достаточно заметить, что по крайней мере один раз полуинвариант изменится не более чем на единицу (это произойдёт тогда, когда операция замены знаков затронет какие-то из крайних чисел -1).

Остается показать, что за [(N +1)/2] ходов из любого исходного набора можно получить набор из одних единиц. Выделим в исходном наборе все группы подряд идущих чисел - 1, их не более [(N + 1)/2]. Теперь последовательно изменим знаки у чисел этих групп.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** На плоскости дано 2N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, N из них окрашены в красный цвет, остальные - в синий. Докажите, что эти точки можно соединить N непересекающимися отрезками, каждый из которых будет соединять красную точку с синей.

**2.** На плоскости дано N точек, некоторые из которых соединены отрезками. Известно, что из любой точки выходит нe более 11 отрезков. Докажите, что эти точки можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы отрезков с одноцветными концами было не более N.

**3.** Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку особой, если более полови­ны соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

**4.** На каждой грани куба написано число, причем не все эти числа одинаковы. Каждое из написанных чисел заменяется на среднее ариф­метическое чисел, написанных на четырех соседних гранях. Могут ли через несколько таких операций на всех гранях оказаться исходные числа?

**5.** По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны.

**6.** На доске написаны 10 чисел: единица и девять нулей. Разрешается выбрать любые два числа и заменить каждое их средним арифметичес­ким. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы после серии таких операций?

**7.** На бесконечном клетчатом листе белой бумаги несколько клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени t = 1, 2, 3, ... происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка К принимает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки К и ее соседей справа и сверху. Докажите, что через некоторое время на листе не останется черных клеток.

**8.** По кругy стоят несколько ребят, у каждого из них несколько конфет. По сигналу ведущего каждый передает половину своих конфет стоящему справа (если число конфет у кого-нибудь нечетно, то ведущий предварительно добавляет ему одну конфету). Это повторяется много раз. Докажите, что когда-нибудь у всех ребят будет поровну конфет.

**9.** По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконеч­ное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое конечное число пианистов (в одной комнате может жить и несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах - k-й и (k + 1)-й, - приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в (k - 1)-ю и (k + 2)-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

**10.** В библиотеке на полке в произвольном порядке расставлены N томов Британской энциклопедии. Робот-библиотекарь каждую минуту делает следующее: берет произвольный том, не стоящий на своем месте, и ставит его на место (т.е. если номер тома - k, то он ставит его k-м по счету). Докажите, что через некоторое время все тома будут стоять на своем месте.

## Ответы и указания к решению.

1. Соедините красные точки с синими N отрезками произвольным образом и к двум пересекающимся отрезкам примените операцию, описанную в задаче №3 так, чтобы два новых отрезка также соединяли красные и синие точки.
2. Раскрасьте точки в четыре цвета произвольным образом. Если отрезок с одноцветными концами больше N, то из какой-то точки выходит не менее трех таких отрезков. Эту точку можно перекрасить так, чтобы количество отрезков с одноцветными концами уменьшилось.
3. В качестве полуинварианта рассмотрите количество отрезков с концами одного цвета.
4. Не могут. В качестве полуинварианта рассмотрите разность между наибольшим и наименьшим из чисел.
5. В качестве полуинварианта рассмотрите сумму всех чисел на окружности.
6. . В качестве полуинварианта рассмотрите величину , где через m обозначено наименьшее положительное число среди написанных на доске, а через n - количество нулей на доске.
7. Заключим всю совокупность черных клеток в большой прямоугольник и введем прямоугольную систему координат с началом в нижнем углу этого прямоугольника. Для каждой черной клетки вычислим сумму ее координат. В качестве полуинварианта рассмотрите максимальное из этих чисел.
8. Заметим, что минимальное число конфет у одного человека в процессе игры не уменьшается, а максимальное может увеличиться не более чем на единицу, если оно нечетно, и не может увеличиться, если оно четно. Если исходный максимум был равен М0, то в любой момент сумма чисел на окружности не превосходит (М0+1)n, где n – число участников игры. Поэтому, начиная с какого-то момента, ведущий перестает добавлять конфеты, а это значит, что начиная с этого момента, все числа будут четны. Теперь в качестве полуинварианта рассмотрите величину , где М – максимальное число конфет у одного игрока, а k – количество игроков с М конфетами.
9. В качестве полуинварианта рассмотрите величину , где  - номера комнат, в которых живут пианисты в данный момент. Докажите, что эта величина монотонно возрастает и ограничена сверху (на самом деле каждое из чисел  может принимать лишь конечное число значений).
10. Назовем в данной перестановке том «правым», если он стоит справа от своего настоящего места, и «левым», если он стоит слева от своего настоящего места. С каждым «правым» томом с номером k свяжем число . В качестве полуинварианта рассмотрите сумму всех этих чисел. Другое решение этой задачи может быть основано на использовании в качестве полуинварианта величины , где  - номер места, на котором стоит k-й том.