6. Свойства коэффициентов

1) Если а+в+с=0, то $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$.

2) Если в = а + с, то $x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}$.

Пример 1. $4x^2 - 13x + 9 = 0$

4-13+9=0 $\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{9}{4}$

Ответ: $1;\ \frac{9}{4}$.

Пример 2. $12x^2 + 7x - 5 = 0$

7=12-5 $\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{12}$

Ответ: $-1;\ \frac{5}{12}$.

7. Метод переброски

Пример: решите уравнение $2x^2$-9x-5=0

Решение. Заменим исходное уравнение приведенным квадратным уравнением с “переброской” коэффициента а

$$y^2 - 9y - 5\cdot 2 = 0$$

$$y^2 - 9y - 10 = 0$$

(D>0), по теореме, обратной теореме Виета, подбором найдем корни

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 9 \\ y_1 \cdot y_2 = -10 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} y_1 = 10 \\ y_2 = -1 \end{array}\right.$$

вернемся к корням исходного уравнения

$$x_1 = \frac{y_1}{a} = \frac{10}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{y_2}{a} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$$

Ответ: 5; -0,5

8. Метод замены

При решении уравнения не следует торопиться выполнять преобразования. Посмотрите, нельзя ли записать уравнение проще, введя новую переменную.

Пример1. $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

Решение. Пусть $x^2 = t,\ t \ge 0$.

Тогда уравнение примет вид: $9t^2 + 5t - 4 = 0$

$$D = 5^2 - 4\cdot 9\cdot(-4) = 169,$$

$$t_1 = \frac{-5+\sqrt{169}}{2\cdot 9} = \frac{-5+13}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9},$$

$$t_2 = \frac{-5-\sqrt{169}}{2\cdot 9} = \frac{-5-13}{18} = -1 < 0,$$

не удов. условию $t \ge 0$

Вернёмся к исходной переменной x:

$$x^2 = \frac{4}{9}, \quad x = \pm\frac{2}{3}.$$

Ответ $: \pm\frac{2}{3}$.

Пример. 2

$$(5x+3)^2 = 3(5x+3) - 2$$

Решение.

Пусть: t = 5x + 3.Тогда уравнение примет вид:

$$t^2 = 3t - 2,\ t^2 - 3t + 2 = 0$$

(Устно проверим условие D > 0) по теореме, обратной теореме Виета

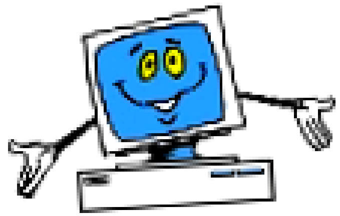
$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3, \\ t_1 \cdot t_2 = 2; \end{cases} \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 5x+3 = 2, \\ 5x+3 = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 5x = 2-3, \\ 5x = 1-3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 5x = -1, \\ 5x = -2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = -0{,}2, \\ x = -0{,}4. \end{array}\right.$$

Ответ: -0,4; -0,2

Методы решения квадратных уравнений



Успехов в изучении!

1. Метод выделения полного квадрата

Суть метода в том, чтобы привести уравнение общего вида к неполному квадратному уравнению.

В этом нам помогут формулы сокращенного умножения, а именно, квадратов суммы и разности:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Пример. $x^2-6x+8=0$

$$x^2 - 2\cdot 3x + 9 - 9 + 8 = 0$$
$$(x-3)^2 - 1 = 0$$
$$(x-3)^2 = 1$$
$$x-3=1 \qquad x-3=-1$$
$$x=4 \quad \text{или} \quad x=2$$

Ответ: 2;4.

Замечание: метод применим для любых квадратных уравнений, но не всегда удобен в использовании.

2. Метод разложения на множители

$5x^2+\underline{4x}-9=0,\ 5x^2\underline{-5x+9x}-9=0,$

$5x(x-1)+9(x-1)=0,$

$(x-1)(5x+9)=0,$

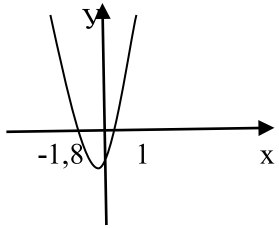
$$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ 5x+9=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=1, \\ 5x=-9; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1{,}8. \end{array}\right.$$

Ответ: -1,8; 1.

3. Графический

$5x^2+4x-9=0$

1сп. Построим график функции $y=5x^2+4x-9$ и найдём абсциссы точек пересечения с осью x.

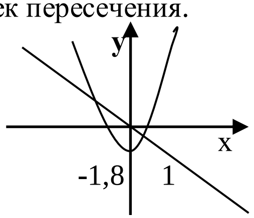


Ответ: -1,8; 1.

2сп. Преобразуем уравнение

$5x^2+4x-9=0,\ 5x^2=-4x+9$

Построим в одной системе координат графики функций $y=5x^2$ и $y=-4x+9$ и найдём абсциссы их точек пересечения.



Ответ: -1,8; 1.

4. Неполные квадратные уравнения

Уравнения вида $ax^2+c=0$**:** $-2x^2+18=0$,

$-2x^2=-18,\ x^2=9,\ x=\pm 3.$

Ответ: ± 3.

Уравнения вида $ax^2=0$**:**

$2x^2=0,\ x^2=0,\ x=0.$

Ответ: 0.

Уравнения вида $ax^2+bx=0$**:**

$$3x^2-12x=0,\ 3x(x-4)=0, \left[\begin{array}{l} 3x=0, \\ x-4=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Ответ: 0;4.

5. По формулам

I. $ax^2+bx+c=0$

$$D=b^2-4ac,\ x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

Если D<0, то уравнение не имеет корней

Если D=0, то уравнение имеет 1 корень $x=-\frac{b}{a}$.

II. $ax^2+2kx+c=0$

$$D_1=k^2-ac,\ x_1=\frac{-k+\sqrt{D_1}}{a},\ x_2=\frac{-k-\sqrt{D_1}}{a}$$

Пример 1. $2x^2+4x+7=0$

$D=4^2-4\cdot 2\cdot 7=-40<0$ – *нет корней*

Ответ: нет корней

Пример 2. $4x^2-20x+25=0$

$D=(-20)^2-4\cdot 4\cdot 25=0 \quad x=-\frac{-20}{4}=5.$

Ответ: 5.

Пример 3. $x^2-11x+24=0$

$D=(-11)^2-4\cdot 1\cdot 24=25$

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm 5}{2} \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{16}{2}, \\ x=\frac{6}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: 3;8.

6. Теорема Виета

Если x_1 *и* x_2 *корни квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0,$ *то сумма корней равна* $-\frac{b}{a}$, *а произведение корней равно* $\frac{c}{a}$.

Пример. $x^2-11x+24=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2=11, \\ x_1\cdot x_2=24; \end{cases} \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: 3;8.