Внеаудиторная самостоятельная работа № 3.

Тема: ***«***Математические операции над случайными величинами».

Цель: научится выполнять математические операции над случайными величинами.

Вначале введем понятие независимости случайных величин.

Две случайные величины называются *независимыми,* если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. Так, если дискретная случайная величина *X* может принимать значения *хi* (*i=1,2,...,n*), а случайная величина *Y* — значения *yj* (*j=l,2,...,m*), то независимость дискретных случайных величин *X* и *Y* означает независимость событий *X = хi, к Y* = *уj*- при любых *i=1,2,...,n* и*j=l,2,...,m*. В противном случае случайные величины называются *зависимыми.*

Например, если имеются билеты двух различных денежных лотерей, то случайные величины *X* и *Y,* выражающие соответственно выигрыш по каждому билету (в денежных единицах) будут независимыми, так как при любом выигрыше по билету одной лотереи (например, при *Х = xi*) закон распределе­ния выигрыша по другому билету (*Y*) не изменится. Если же случайные величины *X* и *Y* выражают выигрыш по билетам о д н о й денежной лотереи, то в этом случае *X* и *Y* являются зависимыми, ибо любой выигрыш по одному билету (*Х = xi*)приводит к изменению вероятностей выигрыша по другому билету (*Y*) т. е. к изменению закона распределения *Y*.

Определим математические операции над дискретные случайными величинами.

Пусть даны две случайные величины:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | *x1* | *x2* | … | *xn* |
|  | *pi* | *p1* | *p2* | *…* | *pn* |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y:* | *yj* | *у1* | *у2* | … | *уm* |
|  | *pj* | *p1* | *p2* | *…* | *pm* |

*Произведением kX случайной величины X на постоянную величи­ну k* называется случайная величина, которая принимает значе­ние *kxi* с теми же вероятностями *pi* (*i=1,2,...,n*).

*m-й* *степенью случайной величины X,* т.е. *Xm ,* называется случайная величина, которая принимает значения *хim* с теми же вероятностями *pi* (*i=1,2,...,n*).

**Пример** 1. Дана случайная величина

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | -2 | 1 | 2 |
|  | *pi* | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

Найти закон распределения случайных величин: a) *Y=3X;* б) *Z=X2.*

Решение.а) Значения случайной величины *Y* будут: $3∙\left(-2\right)=-6; 3∙1=3; 3∙2=6 $с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2, т.е.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y:* | *yi* | -6 | 3 | 6 |
|  | *pi* | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

б) Значения случайной величины *Z* будут: $\left(-2\right)^{2}=4; 1^{2}=1; 2^{2}=4 $с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2. Так как значение *Z* = 4 может быть получено возведением в квадрат значений (—2) с вероятностью 0,5 и (+2) с вероятностью 0,2, то по теореме сло­жения P (Z=4) = 0,5+0,2 = 0,7. Итак, закон распределения случайной величины

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Z:* | *zi* | 1 | 4 |
|  | *pi* | 0,3 | 0,7 |

*Суммой (разностью* или *произведением) случайных величин X и Y* называется случайная величина, которая принимает все воз­можные значения вида *xi + yj* (*xi* — *yj* или *xi* $∙$ *yj* )*, i=1,2,...,n*; *j=l,2,...,m,* с вероятностями *рij* того, что случайная величина *X* примет значение *хi* a *Y* — значение *уj:*

*pij = P [(Х = xi)( Y* = *уj)].*

Если случайные величины *X и Y* независимы, т.е. независи­мы любые события *Х = xi ,Y=yj,* то по теореме умножения вероят­ностей для независимых событий

*pij =P(X = xi)*$ ∙ $*P(Y* = *уj) = pi* $∙$ *pj.*

**Замечание.** Приведенные выше определения операций над дискретными случайными величинами нуждаются в уточне­нии, так как в ряде случаев одни и те же значения *хim* , *xi* ± *уj* , *xi* $∙$ *yj* могут получаться разными способами при раз­личных значениях *xi , уj* , вообще говоря, с различными вероят­ностями *pi, pij* .

**Пример 2**. Даны законы распределения двух независи­мых случайных величин:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 0 | 2 | 4 |
|  | *pi* | 0,5 | 0,2 | 0,3 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y:* | *yj* | -2 | 0 | 2 |
|  | *pj* | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

Найти закон распределения случайных величин a) *Z = X—Y;* б) *U=XY.*

Р е ш е н и е. Для удобства нахождения всех значений раз­ности *Z=X—Y* иих вероятностей составим вспомогательную таб­лицу, в каждой клетке которой поместим в левом углу значения разности *Z=X—Y,* а в правом углу — вероятности этих значений, полученные в результате перемножения вероятностей соответст­вующих значений случайных величин *Х* и *Y.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *уj* | -2 | 0 | 2 |
| *xi* | *pi  pj* | 0,1 | 0,6 | 0,3 |
| 0 | 0,5 | 20,05 | 0 0,30 | -2 0,15 |
| 2 | 0,2 | 4 0,02 | 2 0,12 | 0 0,06 |
| 4 | 0,3 | 6 0,03 | 4 0,18 | 2 0,09 |

Например, если *X* = 4 (последняя строка таблицы), a *Y= -2* (третий столбец таблицы), то случайная величина *Z=X — Y* при­нимает значение Z = 4 - ( -2) = 6 с вероятностью

*P(Z=6)* = P( X=4) $∙$ P(Y = - 2) = 0,3 - 0,1= 0,03 (эти числа Z=6 и *Р=0,03* нахо­дятся в клетке на пересечении последней строки и третьего столбца).

Так как среди 9 значений Z имеются одинаковые, то соот­ветствующие вероятности их складываем по теореме сложения вероятностей. Например, значение *Z =X— Y =2* может быть по­лучено, когда *Х=0, Y= -2* (с вероятностью 0,05); *Х=2,* У=0 (с ве­роятностью 0,12); *X=4;Y=2* (с вероятностью 0,09), поэтому *P(Z =* 2) = 0,15 + 0,12 + 0,09 = 0,26 и т.д. В результате получим распределение:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Z:* | *zk* | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 |
|  | *pk* | 0,15 | 0,36 | 0,26 | 0,20 | 0,03 |

Убеждаемся в том, что условие $\sum\_{i=1}^{5}p\_{i}=1$ выполнено.

б) Распределение *U=XY* находится аналогично п. а).

**Контрольные вопросы.**

1. Дайте определение независимых случайных величин.
2. Дайте определение произведения случайной величины X на постоянную величи­ну k.
3. Дайте определение m-й степени случайной величины X.
4. Дайте определение суммы случайных величин X и Y.
5. Дайте определение разности случайных величин X и Y.
6. Дайте определение произведения случайных величин X и Y.

**Перечень задач для решения.**

1. По данным примера 2 найдите распределение *U=XY.*
2. Пусть X, Y, Z – случайные величины: X – выручка фирмы, Y – ее затраты, Z = X–Y – прибыль. Найти распределение прибыли Z, если затраты и выручка независимы и заданы законами распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | х1 | х2 | х3 |  | *Y:* | *yj* | у1 | у2 |
|  | *pi* | 1/3 | 1/3 | 1/3 |  |  | *pj* | 1/2 | 1/2 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | **Значение переменной** | **Вариант** | **Значение переменной** |
|  х1 | х2 | х3 | у1 | у2 | х1 | х2 | х3 | у1 | у2 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | **9** | 1 | 3 | 5 | 1 | 3 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | **10** | 2 | 4 | 6 | 2 | 4 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 | **11** | 3 | 5 | 7 | 3 | 5 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 4 | 5 | **12** | 4 | 6 | 8 | 4 | 6 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 5 | 6 | **13** | 5 | 7 | 9 | 5 | 7 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 6 | 7 | **14** | 6 | 8 | 10 | 6 | 8 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 7 | 8 | **15** | 7 | 9 | 11 | 7 | 9 |
| **8** | 8 | 9 | 10 | 8 | 9 | **16** | 8 | 10 | 12 | 8 | 10 |