Н. Г. Миндюк
И. С. Шлыкова

Алгебра

Методические рекомендации

7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
М61

16+

Миндюк Н. Г.

М61 Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Н. Г. Миндюк, И. С. Шлыкова. — М. : Просвещение, 2017. — 176 с. : ил. ISBN 978-5-09-042970-2.

Эта книга предназначена для учителей, ведущих преподавание по учебнику «Алгебра, 7» авторов Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой под редакцией С. А. Теляковского. В ней дана характеристика курса алгебры 7 класса, приведены методические рекомендации по всем темам и указания к упражнениям учебника и рабочей тетради. В пособии содержится примерное планирование учебного материала, а также тексты контрольных работ и тест для итогового зачёта.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-042970-2

Предисловие

Содержание и методические особенности учебника алгебры для 7 класса под редакцией С. А. Теляковского

Данное методическое пособие предназначено для учителей, ведущих преподавание по учебнику «Алгебра, 7» Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой под редакцией С. А. Теляковского. Представленный в нём курс отвечает требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования и ориентирован на реализацию целей интеллектуального и общекультурного развития учащихся.

В учебник «Алгебра, 7» включён материал из следующих фундаментальных разделов: арифметика, алгебра, функции, статистика. Содержание материала каждого из этих разделов раскрывается последовательно, составляя соответствующую содержательно-методическую линию. В учебнике реализуется принцип сбалансированного развития указанных линий курса, их взаимосвязи и взаимодействия.

Преобразования выражений используются для решения новых задач вычислительного характера, для расширения круга рассматриваемых уравнений, а также для исследования функций.

Решение уравнений связывается с вычислениями и тождественными преобразованиями, а также с различными задачами функционального характера. Свойства функций являются опорными при исследовании уравнений с одной переменной и систем уравнений с двумя переменными, а также при сравнении значений выражений. При изучении сведений из статистики находят применение вычисления и решение уравнений. Благодаря взаимосвязи и взаимодействию содержательно-методических линий создаются условия для усвоения учащимися теории и овладения математическим аппаратом.

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования представленный в учебнике материал ориентирован на достижение учащимися трёх групп образовательных результатов обучения: личностных, метапредметных и предметных.

Реализованный в учебнике подход к построению курса способствует личностному развитию учащихся, создаёт условия для определения каждым из них индивидуальной траектории изучения курса. Система упражнений в каждом пункте учебника начинается с простейших заданий, очерчивающих тот минимум умений, без которого невозможно дальнейшее изучение курса. Разобранные в учебнике авторские примеры, пошаговое нарастание трудности заданий, сквозная линия упражнений для повторения, наличие раздела «Сведения из курса математики 5—6 классов» — всё это создаёт предпосылки для усвоения курса слабыми учениками. В то же время в поле зрения авторов постоянно находятся учащиеся, проявляющие интерес и склонности к математике. Усложнённые задания, включённые в число основных и дополнительных упражнений к главам, в пункты под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», в раздел «Задачи повышенной трудности», стимулируют учащихся, интересующихся математикой, к мобилизации своих сил для перехода на более высокую ступень в овладении материалом.

Личностному развитию учащихся способствуют также включённый в учебник раздел «Исторические сведения» и представленные в некоторых пунктах сведения из жизни великих учёных. Ознакомление с материалом исторического характера играет важную роль в формировании мировоззрения учащихся.

Принятый в учебнике подход к изложению теоретического материала и построению системы упражнений создаёт условия для достижения учащимися метапредметных результатов обучения.

В предисловии учебника и преамбулах к главам раскрываются цели изучения курса и практическая значимость формируемых знаний и умений. В ходе изучения материала вырабатывается умение учащихся применять модели и схемы, знаки и символы. Например, переходить от описания реальной ситуации к уравнению, от формулы, задающей функцию, к соответствующему графическому образу и т. п.

Выработке умения учащихся строить логические рассуждения и делать выводы способствуют включённые в учебник задания с проблемной постановкой вопроса: является ли данное равенство тождеством; нет ли в задаче лишних данных и т. п. В ходе выполнения таких упражнений семиклассники учатся аргументировать свой ответ, вести доказательные рассуждения.

Включение в учебник заданий для работы в парах и задач-исследований способствует формированию коммуникативной компетентности учащихся. Задания для работы в парах нацеливают учащихся на совместное составление плана решения и взаимную проверку правильности его выполнения. Задачи-исследования направлены на совместную работу учащихся под руководством учителя. В ходе их выполнения формируются умения учащихся прислушиваться к мнению учителя, вести поиск пути решения задачи под его руководством в контакте с одноклассниками, делать выводы и обобщения.

Содержание материала, представленного в учебнике «Алгебра, 7», и принятый подход к его изложению создают предпосылки для достижения учащимися предметных результатов обучения, предусмотренных Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования.

В процессе изучения теоретического материала и выполнения упражнений учащиеся получают представление о математике как методе познания действительности. Они знакомятся с примерами зависимостей между реальными величинами. На этих примерах раскрывается содержание таких понятий, как «независимая переменная» и «зависимая переменная». Тем самым создаётся база для усвоения учащимися понятий «аргумент» и «функция», формируется умение использовать функционально-графические представления для анализа и описания реальных зависимостей между величинами.

Постепенно, шаг за шагом, учащиеся овладевают символьным языком алгебры. Они учатся выполнять различные преобразования целых выражений: умножение одночлена на одночлен или многочлен, сложение, вычитание и умножение многочленов, преобразование целых выражений с использованием формул сокращённого умножения и т. п. Учащиеся знакомятся с приёмами решения линейных уравнений с одной переменной и систем линейных уравнений с двумя переменными. Формируется умение учащихся применять аппарат уравнений при решении текстовых задач, в частности задач на движение, на совместную работу, на смеси и сплавы. Учащиеся получают начальные представления об организации статистических исследований. Они знакомятся с такими характеристиками, как среднее арифметическое, размах, мода, медиана, учатся использовать их при анализе данных.

Представленная в учебнике «Алгебра, 7» под редакцией С. А. Теляковского система построения курса создаёт благоприятные условия для усвоения данного курса учащимися и их дальнейших шагов в овладении математическими знаниями.

К данному курсу существует **Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональными особенностями ЭФУ являются:

— удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;

— работа в онлайн- и офлайн-режимах;

— тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;

— возможность добавления материалов, созданных учителем;

— инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок.

Использование ЭФУ предоставляет учителю следующие возможности:

— организовать контроль и самоконтроль по результатам изучения темы;

— реализовать технологии мобильного, дистанционного или смешанного обучения;

— реализовать требования ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

Учебные пособия, дополняющие учебник «Алгебра, 7» под редакцией С. А. Теляковского

1. Миндюк Н. Г. Алгебра. Рабочая тетрадь. 7 класс. В 2 ч. / Н. Г. Миндюк, И. С. Шлыкова. — М.: Просвещение, 2011—2014.

Рабочая тетрадь содержит 40 работ, составленных ко всем пунктам учебника, за исключением дополнительных пунктов под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше». Она представлена в двух частях. В первую часть вошли работы, относящиеся к первым трём главам, во вторую — к трём последующим главам. Каждая работа состоит из двух разделов. В разделе I содержатся несложные задания, способствующие усвоению вводимых понятий и алгоритмов, формированию фундаментальных умений, установлению связей нового материала с ранее изученным. В раздел II включены более сложные задания, выполнение которых требует свободного владения сформированными знаниями и умениями, проявления интеллектуальной гибкости.

Упражнения, представленные в рабочей тетради, разнообразны по форме предъявления. Учащимся предлагается закончить начатое решение, установить некоторое соответствие, проиллюстрировав его с помощью стрелок, выбрать верный ответ, обведя кружком соответствующий номер, и т. п. Наличие подготовленных таблиц, вычерченной системы координат, некоторых пояснений к составлению уравнений или систем уравнений и т. п. создаёт предпосылки для интенсификации учебного процесса.

Рабочая тетрадь предоставляет широкие возможности для организации работы учащихся в классе и дома.

2. Звавич Л. И. Алгебра. Дидактические материалы. 7 класс / Л. И. Звавич, Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова. — М.: Просвещение, 2015.

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной работы учащихся и контроля за их знаниями и умениями. В них включены самостоятельные и контрольные работы, а также задания для подготовки к школьным олимпиадам.

Самостоятельные работы составлены в двух вариантах, каждый из которых содержит два блока заданий. Первый блок включает тренировочные задания, способствующие достижению учащимися уровня обязательной подготовки, определённого стандартом математического образования. Второй блок состоит из усложнённых заданий, выполнение которых требует умения свободно оперировать приобретёнными знаниями. Хорошо успевающим учащимся можно порекомендовать выполнять упражнения из второго блока заданий, минуя упражнения первого блока или части из них.

Контрольные работы даны в четырёх равноценных вариантах. Каждая контрольная работа включает задания обязательного уровня и более сложные задания. В дидактические материалы включены также задания олимпиадного уровня, позволяющие готовить учащихся к осенней, новогодней и весенней школьным олимпиадам.

3. Жохов В. И. Уроки алгебры в 7 классе: книга для учителя / В. И. Жохов, Л. Б. Крайнева. — М.: Просвещение, 2014—2016.

Книга нацелена на то, чтобы помочь учителю в подготовке к урокам. В ней даются рекомендации по организации уроков алгебры в 7 классе. Для каждого урока предложены соответствующие устные упражнения, приведён отбор теоретических сведений, тренировочных упражнений для работы в классе, а также упражнений для повторения, даются предложения по подведению итога урока и отбору упражнений для задания на дом.

В книге предложены два варианта примерного тематического планирования, рассчитанного на разное число недельных часов, выделенных на изучение алгебры. Приводятся тексты контрольных работ.

Содержание и структура пособия «Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс»

В данном методическом пособии даются рекомендации для учителей, ведущих преподавание по учебнику «Алгебра, 7» под редакцией С. А. Теляковского. Эти рекомендации представлены в виде отдельных глав, которые делятся на параграфы. Названия глав и параграфов дублируют соответствующие названия в учебнике. В каждом параграфе указано число часов, отводимых на изучение входящих в него пунктов (для второго варианта планирования это число записано в скобках). Обозначено место соответствующих контрольных работ. В параграфах выделяются следующие рубрики: «Содержание материала», «Основная цель», «Характеристика основных видов деятельности учащихся», «Методический комментарий». Представленный в них материал позволяет учителю оценить роль каждой темы в общей системе обучения, правильно расставить акценты при организации учебного процесса.

В разделе «Методический комментарий» даётся характеристика изучаемого в параграфе материала, анализируется его роль в общей системе обучения, содержатся рекомендации по использованию в учебном процессе упражнений, представленных в данном параграфе учебника, а также дополнительных упражнений.

В разделах «Указания к основным упражнениям учебника» и «Указания к дополнительным упражнениям учебника» раскрываются приёмы решения некоторых задач. Подробно разбираются способы выполнения заданий из дополнительных пунктов под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», а также из раздела «Задачи повышенной трудности». Разбираются некоторые упражнения из рабочей тетради для 7 класса авторов Н. Г. Миндюк и И. С. Шлыковой.

В пособии содержатся тексты текущих контрольных работ по всем основным темам курса и итоговой контрольной работы. Эти тексты даются в двух вариантах. Здесь также приводится тест для итогового зачёта по курсу алгебры 7 класса (в двух вариантах).

Завершает пособие «Примерное планирование учебного материала», в котором указано время, отводимое на изучение каждого параграфа, и место контрольных работ по курсу алгебры 7 класса.

ГЛАВА I

Выражения, тождества, уравнения

§ 1. Выражения

Номер пункта	Название пункта	Число уроков[1]
1	Числовые выражения	2(2)
2	Выражения с переменными	2(3)
3	Сравнение значений выражений	2(2)

Содержание материала

Числовые выражения. Значение числового выражения. Числовые выражения, не имеющие смысла. Выражения с переменными. Значение выражения с переменными при указанных значениях переменных. Формулы. Сравнение значений выражений. Строгие и нестрогие неравенства. Двойные неравенства.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы систематизировать, обобщить и углубить сведения о числовых и буквенных выражениях, полученные учащимися в 5—6 классах.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь вычислять значения числовых выражений, а также значения выражений с переменными при указанных значениях переменных, использовать знаки $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, читать и составлять числовые неравенства.

Методический комментарий

На первом уроке алгебры рекомендуется ознакомить учащихся со структурой учебника, с используемыми в нём обозначениями, рассказать о разделах, дополняющих основные главы. Следует обратить внимание учащихся на раздел «Сведения из курса математики 5—6 классов», который поможет им при необходимости повторить ранее изученный материал. Полезно рассказать учащимся об исто-

[1] Здесь и далее в скобках указывается число уроков, выделяемых при втором варианте планирования.

рии возникновения алгебры, используя при этом материал под рубрикой «Как появилась алгебра», включённый в раздел «Исторические сведения».

Первая глава учебника «Выражения, тождества, уравнения» является связующим звеном между курсом математики **5—6** классов и курсом алгебры 7 класса. В младших классах учащиеся ознакомились с понятиями «числовое выражение», «буквенное выражение» («выражение с переменными»). Они научились выполнять простейшие преобразования выражений, решать несложные уравнения, использовать знаки неравенства. В первой главе начальные сведения о числовых и буквенных выражениях, о преобразовании выражений, об уравнениях и неравенствах систематизируются и углубляются.

В пункте 1 «Числовые выражения» предлагаются простейшие задания на действия с обыкновенными и десятичными дробями, положительными и отрицательными числами, которые позволяют освежить в памяти учащихся основные правила действий с числами и дают возможность учителю выявить учащихся, имеющих серьёзные пробелы в соответствующих знаниях и умениях. Этим учащимся следует предложить в качестве вспомогательных упражнений соответствующие простейшие задания из рабочей тетради или дидактических материалов. Своевременная коррекция сформированных ранее умений облегчит учащимся усвоение последующих разделов курса.

Аналогичные рекомендации относятся к заданиям **7—10**, связанным с процентными расчётами. Усвоение сведений о процентах является необходимым условием для успешного изучения не только алгебры, но и смежных дисциплин.

В пункте 1 «Числовые выражения» учащиеся впервые встречаются с понятием «числовое выражение, не имеющее смысла». Это понятие используется в дальнейшем при решении некоторых уравнений и неравенств с переменной в знаменателе дроби, при исследовании функций и т. п. В связи с этим рекомендуется рассмотреть в классе упражнения **13** и **14**, дополняя их при необходимости аналогичными заданиями из рабочей тетради и дидактических материалов.

В число основных и дополнительных упражнений, относящихся к пункту 1, входят нестандартные задания **11**, **18**, **208**, **209**, способствующие интеллектуальному развитию учащихся. Специально рекомендуется остановиться на задаче **18**, открывающей серию упражнений под рубрикой «Задача-исследование». При выполнении упражнений из этой серии учитель должен организовывать коллективную работу учащихся, вырабатывая у них умение формулировать и отстаивать своё мнение. Рекомендуется поощрять учащихся, проявивших сообразительность, сумевших найти и обосновать необходимые шаги в поисках верного ответа.

В пункте 2 «Выражения с переменными» учащиеся знакомятся с новыми понятиями «переменная», «выражение с переменными», «значение выражения с переменными». Задания на нахождение значений выражения с переменными при указанных значениях переменных позволяют продолжить работу по формированию вычислительных навыков. В системе упражнений рекомендуется обратить внимание учащихся на задание **31**. Разбивая фигуру на прямоугольники разными способами, они могут составить различные выражения. Естественно возникает вопрос: получится ли один и тот же ответ при выполнении вычислений по соответствующим формулам? К этому вопросу полезно вернуться при изучении пункта 5 «Тождества. Тождественные преобразования» и предложить учащимся провести соответствующие доказательства.

В число упражнений, предназначенных для работы в классе, обязательно следует включить задания **33** и **34**, иллюстрирующие практическую значимость изучаемого материала. Важно формировать у учащихся умение анализировать структуру выражения с переменными. В этом плане ценными являются упражнения **35** и **36**.

При изучении данного пункта учащиеся впервые встречаются с понятием «выражение с переменными, не имеющее смысла при некоторых значениях переменных». Это понятие является опорным при рассмотрении вопроса об области определения некоторых функций, а также при решении уравнений и неравенств с переменной в знаменателе дроби. В связи с этим следует уделить внимание упражнениям **39** и **40**, которые учащиеся должны выполнять устно.

При рассмотрении выражений с переменными приводятся примеры формул, включающих такие выражения. Необходимо добиваться от учащихся запоминания некоторых формул, находящих широкое применение в курсе: формул чётного и нечётного чисел, а также целого числа, кратного натуральному числу n.

Рекомендуется обратить внимание на упражнение **43**, при выполнении которого используется новая форма работы — работа в парах. При наличии времени можно рассмотреть с учащимися упражнения **213**, **214**, в которых предлагается составить выражение или формулу для решения некоторых задач.

Тему «Выражения» завершает пункт 3 «Сравнение значений выражений». В нём повторяются и расширяются известные учащимся сведения о неравенствах. С использованием знаков > и < учащиеся уже знакомы. В данном пункте вводятся знаки ⩾ и ⩽. Учащиеся знакомятся с терминами «строгое неравенство», «нестрогое неравенство». Важным шагом является введение понятия «двойное неравенство». Задания на сравнение числовых выражений обеспечивают продолжение работы по формированию вычислительных умений. Важно показать учащимся, что для сравнения значений выражений достаточно иногда использовать прикидку результата или провести специальные рассуждения. В этом плане полезными являются упражнения **48**, **49**, а также дополнительные упражнения **219—222**. Эти упражнения способствуют формированию умения проводить рассуждения, аргументировать свои выводы.

Каждый пункт учебника, начиная с пункта 2, завершается упражнениями для повторения. Такая структура учебника позволяет систематически возвращаться к узловым вопросам курса и создаёт предпосылки для успешного их усвоения. В пунктах 2 и 3 упражнения для повторения направлены на выработку умений, связанных с процентными расчётами.

Контрольные вопросы и задания, помещённые в конце параграфа, позволяют учителю проверить, насколько глубоко и основательно усвоили учащиеся представленный в данном параграфе материал.

Указания к основным упражнениям учебника

10. Полезно обратить внимание учащихся на то, что задачу можно решить двумя способами.

I способ. Стоимость первой книги равна $320 \cdot 0{,}3 = 96$ (р.); стоимость второй книги — $320 \cdot 0{,}45 = 144$ (р.). Значит, первая книга дешевле второй на $144 - 96 = 48$ (р.).

II способ. Стоимость первой книги меньше стоимости второй книги на $45\% - 30\% = 15\%$ израсходованных денег, что составляет $320 \cdot 0{,}15 = 48$ (р.).

11. Упражнение решается методом проб.

а) $2 + 2 + 2$; б) $2 \cdot 2 \cdot 2$; в) $2 + 2 : 2$; г) $2 - 2 : 2$.

17. Следует обратить внимание учащихся на то, что выражение называют по последнему действию, которое надо выполнить.

Например, $(10 - 2{,}7) : 5$ — частное от деления разности чисел 10 и 2,7 на 5;

$6{,}1 \cdot (8{,}4 : 4)$ — произведение числа 6,1 и частного от деления числа 8,4 на 4.

18. (*Задача-исследование.*) В этом упражнении учащиеся впервые встречаются с ситуацией, когда ход решения задачи и полученный результат коллективно обсуждается ими под руководством учителя. Приведём решение задачи.

Число учащихся класса, изучающих хотя бы один из указанных языков, равно $25 + 18 = 43$. Это число больше общего числа учащихся класса на $43 - 36 = 7$, что составляет $\frac{7}{36} \cdot 100\% \approx 19\%$ всех учащихся класса. Значит, оба языка изучают примерно 19% всех учащихся класса. Следует обратить внимание учащихся на то, что в процентных расчётах результат обычно округляется до целого числа процентов.

27. При выполнении этого упражнения следует учесть, что соответствующие значения выражений $a - b$ и $b - a$ являются противоположными числами. Отсюда $b - a = -4$. Квадраты противоположных чисел равны, значит, $(b - a)^2 = (a - b)^2 = 16$.

$$\frac{12}{b-a} + \frac{16}{(b-a)^2} = -3 + 1 = -2.$$

Верный ответ под номером 1.

31. Для определения площади указанной фигуры надо разбить её на прямоугольники. В зависимости от способа разбиения можно составить различные выражения, например такие (рис. 1):

а) $2bd + (a - 2d)(b - c)$; б) $ny + m(x - y)$.

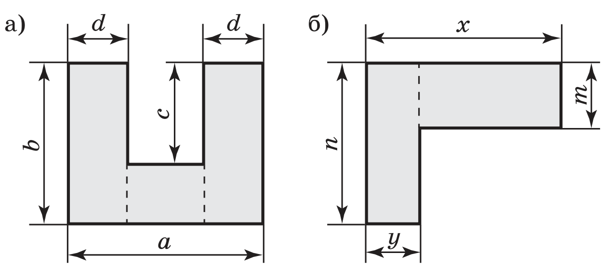

Рис. 1

Учителю следует поощрить тех учащихся, которые предложат другие способы разбиения заданных фигур на прямоугольники.

33. Масса раствора после добавления в него 5 г соли стала равна $250 + 5 = 255$ (г), а соли в нём стало $(x + 5)$ г. Верный ответ под номером 4.

34. После добавления в сплав 2 кг олова его масса стала равна $20 + 2 = 22$ (кг), а масса олова в сплаве стала $(x + 2)$ кг. Следовательно, процентное содержание олова в сплаве оказалось равным $\frac{x+2}{22} \cdot 100\%$.

43. (*Для работы в парах.*) В этом упражнении паре учащихся предлагается совместно установить справедливость указанного свойства и провести его доказательство. В подобных упражнениях формируется умение учащихся прислушиваться к мнению одноклассника и исправлять обнаруженные ошибки и неточности.

1) Возьмём, например, из третьего десятка простое число 23, а из седьмого десятка число 67. Имеем $23+1=24$ кратно 6, $67-1=66$ кратно 6.

2) Справедливость указанного свойства следует из того, что из трёх последовательных целых чисел хотя бы одно является чётным и одно из трёх последовательных целых чисел кратно 3.

3) Доказательство. Простое число p, большее 5, является нечётным, следовательно, числа $(p-1)$ и $(p+1)$ — чётные. Из трёх последовательных натуральных чисел $p-1$, p, $p+1$, где p — простое число, большее 5, одно число делится на 3. Поскольку число p на 3 не делится, то на 3 делится одно из чисел: $(p-1)$ или $(p+1)$. Итак, одно из чисел $(p-1)$ или $(p+1)$ является одновременно чётным и кратным 3, следовательно, оно кратно 6.

48. Учащиеся должны обосновать свой ответ.

а) $56 \cdot \frac{2}{7} = 56 : \frac{7}{2}$, так как дроби $\frac{2}{7}$ и $\frac{7}{2}$ являются взаимно обратными числами;

в) $2{,}1 - 5{,}8 < 2{,}1 - 1{,}7$, так как первая разность является отрицательным числом, а вторая — положительным.

49. в) $5{,}7 - 3{,}11 < 5{,}7 - 2{,}16$, так как уменьшаемые равны, а первое вычитаемое больше второго;

г) $65{,}4 \cdot \frac{5}{6} < 65{,}4 : \frac{5}{6}$, так как при умножении на правильную дробь число уменьшается, а при делении увеличивается.

59. Так как $a > b$, то $b < a$; так как $c > a$, то $a < c$. Из неравенств $b < a$ и $a < c$ следует, что

$$b < a < c.$$

Значит, крайняя левая точка означает число b, средняя — число a, а крайняя правая — число c (рис. 2).

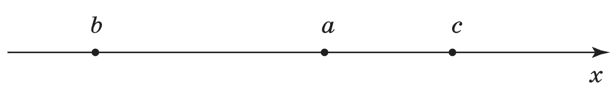

Рис. 2

63. а) $x < 0$; б) $m > 0$; в) $y \geqslant 0$; г) $z \leqslant 0$.

67. Число рабочих на комбинате сократилось на $(1600-1200)$ человек, что составляет $\frac{400}{1600} \cdot 100\% = 25\%$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

208. Сумма всех целых чисел от -102 до 102 включительно равна нулю, так как равна нулю сумма каждой пары противоположных чисел. Поэтому сумма всех целых чисел от -102 до 104 включительно равна $103 + 104$, т. е. равна 207.

209. Произведение всех целых чисел от -11 до 13 равно нулю, так как один из множителей равен нулю.

211. Из условия $2(a + b) = -8{,}1$ следует, что $a + b = -4{,}05$.

б) $-0{,}5(a + b) = -0{,}5 \cdot (-4{,}05) = 2{,}025$;

в) $4a + 4b = 4(a + b) = 4 \cdot (-4{,}05) = -16{,}2$;

г) $-5a - 5b = -5(a + b) = -5 \cdot (-4{,}05) = 20{,}25$.

Следует обратить внимание учащихся на то, что в заданиях «в» и «г» при выполнении преобразований используется распределительное свойство умножения.

213. в) $\dfrac{s}{v_1 + v_2}$ ч. Следует подчеркнуть, что за час расстояние между автомобилями уменьшается на $(v_1 + v_2)$ км.

г) $\dfrac{s}{v_2 - v_1}$ ч. За час расстояние между мотоциклистом и велосипедистом уменьшается на $(v_2 - v_1)$ км, где $v_2 > v_1$.

214. Коробка представляет собой параллелепипед, длины рёбер которого равны $(a - 2x)$ см, $(b - 2x)$ см и x см, следовательно, его объём равен:

$$V = (a - 2x)(b - 2x)x \ (\text{см}^3).$$

Важно обратить внимание учащихся на то, что значения x должны удовлетворять условию $x < 12{,}5$ см и соответствовать практическому смыслу задачи.

219. а) Неверно. Например, $|-7 + 4| = |-3| = 3$, тогда как $|-7| + |4| = 7 + 4 = 11$.

220. Неверно. Например, $|-5| = |5|$, но $-5 \neq 5$.

221. Неверно. Например, $|-3| < |-8|$, но $-3 > -8$.

222. Возможно. Например, $|-6| > |-2|$, но $-6 < -2$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 1

7. Следует обратить внимание учащихся на то, что задачу можно решить двумя способами.

I способ. В июне Антон решил $40 \cdot 0{,}2 = 8$ задач, ему осталось решить $40 - 8 = 32$ задачи. В июле Антон решил $32 \cdot 0{,}25 = 8$ задач. Следовательно, в августе ему осталось решить $32 - 8 = 24$ задачи.

II способ. В июле и августе Антону осталось решить $100\% - 20\% = 80\%$ задач; в июле он решил $80\% \cdot 0,25 = 20\%$ всех задач, следовательно, в августе ему осталось решить $80\% - 20\% = 60\%$ всех задач, т. е. $40 \cdot 0,6 = 24$ задачи.

12. Концентрация раствора сахара в стакане равна

$$\frac{30}{180} \cdot 100\% = \frac{1}{6} \cdot 100\% = 16\frac{2}{3}\%.$$

Концентрация раствора сахара в кружке равна

$$\frac{50}{240} \cdot 100\% = \frac{125}{6}\% = 20\frac{5}{6}\%.$$

В кружке концентрация сахара больше, поэтому Вере надо выбрать кружку.

13. После того как в первый день продали 30% картофеля, осталось $100\% - 30\% = 70\%$ всего завезённого в палатку картофеля. Во второй день продали $70\% \cdot 0,2 = 14\%$ всего картофеля. После двух дней продажи в палатке осталось $70\% - 14\% = 56\%$ картофеля.

Верный ответ под номером 2.

14. Через первую трубу за 1 ч можно наполнить $\frac{1}{4}$ часть бассейна, через вторую — $\frac{1}{6}$ часть, через третью — $\frac{1}{5}$ часть. Если открыть три трубы, то за 1 ч можно наполнить $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)$ часть бассейна, т. е. $\frac{37}{60}$ бассейна. Следовательно, бассейн можно наполнить за

$$\frac{60}{37} = 1\frac{23}{37}\text{ ч} \approx 1,6 \text{ ч} = 1 \text{ ч } 36 \text{ мин}.$$

15. Рекомендуется обратить внимание учащихся на последовательность действий, которые необходимо выполнить при нахождении значений выражений подобного вида.

а) $$3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3-1}}} = 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2}}} =$$

$$= 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2\frac{1}{2}}} = 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{5}} = 3 - \cfrac{1}{2\frac{3}{5}} = 3 - \frac{5}{13} = 2\frac{8}{13}.$$

16. Хотя бы в одной олимпиаде участвовали $23 + 16$, т. е. 39, членов математического кружка, следовательно, в двух олимпиадах участвовали $39 - 25 = 14$ членов кружка, что составляет $\frac{14}{25} \cdot 100\% = 56\%$.

Пункт 2

12. Надо найти такие значения натурального числа n, при которых разность $47 - 3n$ оканчивается цифрой 0 или 5, т. е. значение выражения $3n$ оканчивается цифрой 7 или 2 и $3n < 47$. Это числа 4, 9 и 14.

14. В первоначальном сплаве процентное содержание золота равно $\frac{x}{150} \cdot 100\%$. В новом сплаве процентное содержание золота равно $\frac{x+10}{160} \cdot 100\%$.

Пункт 3

13. Концентрация первого раствора соли равна $\frac{6}{100} \cdot 100\%$, т. е. равна 6%, а концентрация второго раствора равна $\frac{8}{250} \cdot 100\%$, т. е. равна 3,2%. Следовательно, концентрация первого раствора больше.

15. Площадь прямоугольника со сторонами 12 см и 36 см равна $12 \cdot 36 = 432$ (см^2), его периметр равен

$$2 \cdot (12 + 36) = 96 \text{ (см)}.$$

Периметр квадрата также равен 96 см, следовательно, его сторона равна $96 : 4 = 24$ (см), а площадь равна $24^2 = 576$ (см^2). Площадь квадрата больше, чем площадь прямоугольника.

16. Так как $a > c$, то $c < a$. Имеем $b < d$, $d < c$ и $c < a$, т. е. $b < d < c < a$.

Следовательно, крайняя левая точка b, следующая d, затем c и крайняя правая a.

§ 2. Преобразование выражений

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
4	Свойства действий над числами	1(1)
5	Тождества. Тождественные преобразования выражений	3(4)
	Контрольная работа № 1	1

Содержание материала

Свойства действий над числами и их следствия. Тождества. Тождественно равные выражения. Простейшие тождественные преобразования выражений: приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «плюс» или «минус».

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы дать начальные представления о тождестве и тождественных преобразованиях выражений и выработать умение применять свойства действий над числами при выполнении простейших тождественных преобразований.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа формируются умения учащихся применять свойства действий над числами при нахождении значений числовых выражений, выполнять простейшие тождественные преобразования выражений: приводить подобные слагаемые, раскрывать скобки, перед которыми стоит знак «плюс» или «минус».

Методический комментарий

Тождественные преобразования выражений составляют одну из важнейших содержательно-методических линий курса алгебры. Изучение их охватывает весь курс алгебры 7—9 классов, начиная с преобразования целых выражений в 7 классе и заканчивая преобразованием корней n-й степени в 9 классе. В старших классах учащиеся встречаются с тождественными преобразованиями более сложных выражений.

В данном параграфе рассматриваются простейшие преобразования выражений — приведение подобных слагаемых и раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «плюс» или «минус». Важно добиваться от учащихся понимания того, что правила выполнения этих преобразований непосредственно следуют из свойств действий над числами. В связи с этим изучение § 2 «Преобразование выражений» начинается с пункта 4 «Свойства действий над числами». Здесь напоминаются основные свойства действий над числами: переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения, а также распределительное свойство умножения. Важно, чтобы учащиеся запомнили формулировки вытекающих из них следствий о возможности в любой сумме переставлять слагаемые и произвольным образом объединять их в группы, а также в любом произведении переставлять множители и произвольным образом объединять их в группы. Следует добиваться от учащихся, чтобы при выполнении упражнений они называли соответствующее свойство действия над числами или формулировали следствие из него. Важно обратить внимание учащихся на то, что применение свойств действий над числами позволяет существенно упростить вычисления в заданиях **71—78**, а также в дополнительных заданиях **223**, **224**. Из включённых в данный пункт упражнений для повторения рекомендуется предложить учащимся задание **84**, предназначенное для работы в парах. Это задание позволяет повторить с учащимися правила сравнения чисел.

В данном параграфе учащиеся впервые встречаются с такими важными понятиями, как «тождество» и «тождественное преобразование выражений». Тождество определяется как равенство, верное при любых значениях входящих в него переменных. В дальнейшем, в курсе алгебры 8 класса, при изучении преобразований дробных выражений понятие «тождество» будет расширено — тождество будет определяться как равенство, верное при любых допустимых значениях входящих в него переменных. Важно, чтобы учащиеся понимали, что для доказательства того факта, что некоторое равенство не является тождеством, достаточно указать какую-либо одну совокупность значений переменных, при которой равенство не выполняется. Например, равенство $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ верно при $a = 0$, $b = 0$, при $a = 5$, $b = 5$, при $a = 4$, $b = 0$. Убедиться в том, что оно не является тождеством, можно, взяв, например, $a = 3$, $b = 2$.

В упражнениях, включённых в данный пункт, можно выделить два блока. Первый из них составляют задания **85—100**, направленные на усвоение введённых понятий и непосредственное применение сформулированных правил. Второй блок состоит из комплексных заданий, связанных с использованием нескольких правил преобразований и вычислением значений выражений. Из дополнительных упражнений рекомендуется обратить внимание на задания **225**, **226**, способствующие усвоению понятия «тождество», а также на задания **231**, **232**, в которых преобразования выражений используются для доказательства некоторых общих утверждений.

На последнем уроке, посвящённом изучению данного параграфа, рекомендуется с помощью контрольных вопросов и заданий, помещённых в конце параграфа, проверить усвоение основных понятий.

Указания к основным упражнениям учебника

71. Учащиеся должны выбрать такой способ группировки слагаемых, который позволит упростить вычисления.

в) $15{,}21 - 3{,}9 - 4{,}7 + 6{,}79 = (15{,}21 + 6{,}79) - (3{,}9 + 4{,}7) = 22 - 8{,}6 = 13{,}4$;

г) $-4{,}27 + 3{,}8 - 5{,}73 - 3{,}3 = (-4{,}27 - 5{,}73) + (3{,}8 - 3{,}3) = -10 + 0{,}5 = -9{,}5$.

72. в) $7{,}15 - 9{,}42 + 12{,}85 - 0{,}58 = (7{,}15 + 12{,}85) - (9{,}42 + 0{,}58) = 20 - 10 = 10;$

г) $18{,}9 - 6{,}8 - 5{,}2 - 4{,}1 = (18{,}9 - 4{,}1) - (5{,}2 + 6{,}8) = 14{,}8 - 12 = 2{,}8.$

74. а) $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{7} + 1\frac{1}{4} - 4\frac{6}{7} = \left(5\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4}\right) - \left(2\frac{1}{7} + 4\frac{6}{7}\right) = 7 - 7 = 0;$

б) $8\frac{2}{3} - 6\frac{3}{5} - 2\frac{2}{5} + 1\frac{7}{9} = \left(8\frac{2}{3} + 1\frac{7}{9}\right) - \left(6\frac{3}{5} + 2\frac{2}{5}\right) = 10\frac{4}{9} - 9 = 1\frac{4}{9}.$

75. В данном упражнении учащимся следует выбрать наиболее удобный способ группировки множителей.

б) $-75{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 20 = -75{,}7 \cdot (0{,}5 \cdot 20) = -75{,}7 \cdot 10 = -757;$

в) $25 \cdot (-15{,}8) \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot (-15{,}8) = 100 \cdot (-15{,}8) = -1580.$

77. При выполнении действий целесообразно применить распределительное свойство умножения.

б) $12{,}4 \cdot 14{,}3 - 12{,}4 \cdot 4{,}3 = 12{,}4 \cdot (14{,}3 - 4{,}3) = 12{,}4 \cdot 10 = 124.$

79. б) Воспользовавшись распределительным свойством умножения, получим

$$34 \cdot 85 + 34 \cdot 36 = 34 \cdot (85 + 36) = 34 \cdot 121.$$

Поскольку 121 делится на 11, то и произведение $34 \cdot 121$ делится на 11.

84. (*Для работы в парах.*) Желательно, чтобы при проверке этого задания учащиеся формулировали соответствующие правила сравнения чисел.

б) $2{,}01 > 2\frac{1}{11} > 2{,}001$, так как $2\frac{1}{11} \approx 2{,}009.$

89. Тождеством не является равенство 2, так как $a - a = 0$ и $25 \cdot 0 = 0$.

94. $2(b - a) = 2b - 2a$ — применяется распределительное свойство умножения;

$-2(a - b) = -2a + 2b = 2b - 2a$ — применяются распределительное свойство умножения и переместительное свойство сложения;

$-2a + 2b = 2b - 2a$ — применяется переместительное свойство сложения.

107. а) Во втором альбоме у Игоря $(a + 15)$ марок, в третьем — $3(a + 15)$ марок. Следовательно, общее число марок в трёх альбомах равно

$$a + (a + 15) + 3(a + 15) = a + a + 15 + 3a + 45 = 5a + 60.$$

б) Приобретённые Петром билеты лотереи «Удача» стоили $6a$ р., а билеты лотереи «Надежда» — $8 \cdot 1{,}1a$ р. Следовательно, стоимость покупки равна $6a + 8 \cdot 1{,}1a = 14{,}8a$ (р.).

Указания к дополнительным упражнениям учебника

224. Важно, чтобы при выполнении преобразований, позволяющих упростить вычисления, учащиеся называли применяемые свойства действий.

а) $(1{,}25 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}8 - 1{,}7) \cdot 3{,}45 = 1{,}7 \cdot (1{,}25 \cdot 0{,}8 - 1) \cdot 3{,}45 = 1{,}7 \cdot (1 - 1) \cdot 3{,}45 = 0$;

б) $3{,}947 : (3{,}6 - 2{,}6 \cdot 4 \cdot 0{,}25) = 3{,}947 : (3{,}6 - 2{,}6 \cdot 1) = 3{,}947$.

225. б) $|x - y| = |y - x|$, так как значения выражений $x - y$ и $y - x$ являются противоположными числами;

в) $|2c| = |2| \cdot |c| = 2|c|$.

226. г) Нет. Например, при $a = -1$, $b = 5$ имеем $|a + b| - |a| = |-1 + 5| - |-1| = 4 - 1 = 3$, а $|b| = 5$.

227. а) $(a + b) + (a - b) = a + b + a - b = 2a$;

б) $(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b$.

230. Для упрощения вычислений следует предварительно преобразовать данное выражение: $8a - (4b + 3a) - (4a - 3b) = 8a - 4b - 3a - 4a + 3b = a - b$.

а) При $a = 6{,}8$, $b = 7{,}3$ получим $a - b = 6{,}8 - 7{,}3 = -0{,}5$;

б) при $a = -8{,}9$, $b = -9{,}9$ получим $a - b = -8{,}9 + 9{,}9 = 1$.

231. а) $a + (2a - (3a - 5)) = a + (2a - 3a + 5) = a + (-a + 5) = a - a + 5 = 5$;

б) $a - (6a - (5a - 8)) = a - (6a - 5a + 8) = a - (a + 8) = a - a - 8 = -8$.

232. Число, кратное 3, имеет вид $3m$, а число, кратное 5, имеет вид $5n$, где m и n — целые числа. Тогда произведение этих чисел равно

$$3m \cdot 5n = (3 \cdot 5)mn = 15mn,$$

где mn — целое число. Это означает, что данное произведение кратно 15.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 4

10. $17 \cdot 22 + 8 \cdot 44 = 22 \cdot (17 + 16) = 22 \cdot 33 = 2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 11 = 121 \cdot 6$.

11. $8{,}7 \cdot 5{,}2 + 7{,}8 \cdot 8{,}7 - 13 \cdot 1{,}7 = 8{,}7 \cdot (5{,}2 + 7{,}8) - 13 \cdot 1{,}7 = 13 \cdot (8{,}7 - 1{,}7) = 91$.

Учащиеся должны понимать, что в этих преобразованиях дважды применяется распределительное свойство умножения.

13. б) $\frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{7} - \frac{1}{10} = \frac{3}{70}$.

П у н к т 5

5. Ошибка допущена в задании «г». После приведения подобных слагаемых в этом выражении должно получиться $0{,}01x + 3y$.

13. Утверждение верно, так как $11(2n+1) - 9(n-4) - 21 = 22n + 11 - 9n + 36 - 21 = 13n + 26 = 13(n+2)$.

15. Утверждение верно, так как

$$(3n - 5(n+6)) + 4(n+9) = \\ = 3n - 5n - 30 + 4n + 36 = 2n + 6 = 2(n+3),$$

а при натуральном n число $(n+3)$ также является натуральным.

17. После повышения цены на 20% изделие стало стоить $1{,}2a$ р. Один процент от новой цены составляет $\frac{1{,}2a}{100}$ р., а 20% составляют $\frac{1{,}2a \cdot 20}{100} = \frac{1{,}2a}{5} = 0{,}24a$ (р.). Значит, окончательная цена равна $1{,}2a - 0{,}24a = 0{,}96a$ (р.).

18. После снижения цены на 10% товар стал стоить $a - 0{,}1a = 0{,}9a$ (р.). После второго снижения цены на 10% товар стал стоить $0{,}9a - 0{,}9a \cdot 0{,}1 = 0{,}9a - 0{,}09a = 0{,}81a$ (р.).

§ 3. Уравнения с одной переменной

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
6	Уравнение и его корни	1(1)
7	Линейное уравнение с одной переменной	3(3)
8	Решение задач с помощью уравнений	3(4)

Содержание материала

Уравнения с одной переменной. Корень уравнения. Равносильность уравнений. Линейное уравнение с одной переменной. Решение уравнений с одной переменной, сводящихся к линейным. Решение текстовых задач с помощью уравнений.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы систематизировать и дополнить сведения об уравнениях, полученные учащимися в младших классах, продолжить работу по формированию умений решать уравнения с одной переменной, сводящиеся к линейным, и использовать аппарат уравнений для решения текстовых задач.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь решать уравнения вида $ax = b$ при различных значениях a, в том числе при $a = 0$, а также решать несложные уравнения, сводящиеся к линейным, с помощью известных преобразований выражений, применять аппарат уравнений при решении текстовых задач и интерпретировать результат.

Методический комментарий

К изучению § 3 «Уравнения с одной переменной» учащиеся приступают, уже имея определённый запас знаний об уравнениях. Им известны понятия «уравнение», «корень уравнения», они умеют решать несложные уравнения, применять в простейших случаях уравнения для решения текстовых задач. В 7 классе сведения об уравнениях повторяются и расширяются. Приводятся примеры уравнений, имеющих более одного корня, не имеющих корней. Впервые учащиеся знакомятся с понятием «равносильные уравнения». Заметим, что здесь речь не идёт об изучении каких-либо теорем о равносильности уравнений. Задача состоит в том, чтобы учащиеся поняли смысл понятия равносильности, усвоили условия перехода от одного уравнения к другому, ему равносильному. Они должны запомнить соответствующие формулировки. Важно, чтобы учащиеся понимали, что эти условия равносильности уравнений непосредственно вытекают из свойств числовых равенств: если к обеим частям верного числового равенства прибавить одно и то же число, а также обе его части умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится верное равенство.

Приведённые в пункте 6 упражнения **111—120** способствуют усвоению понятия «корень уравнения», пониманию того, что уравнение с одной переменной может иметь один корень, более одного корня, может не иметь корней. Следует обратить внимание учащихся на упражнение **121**, при выполнении которого требуется формулировать соответствующие условия равносильности уравнений. Упражнения данного пункта целесообразно дополнить заданиями **235—238** из раздела «Дополнительные упражнения к главе». Важно требовать от учащихся, чтобы при выполнении этих упражнений они приводили соответствующие обоснования.

Основной массив упражнений, представленных в пункте 7, составляют задания на решение уравнений, сводящихся к линейным. Здесь учащиеся получают возможность убедиться в важности тех умений, которые они приобрели при изучении приёмов тождественных преобразований выражений. В число упражнений, выполняемых в классе, рекомендуется включить задания **135** и **136**, а также задание **244** из дополнительных упражнений к главе, в которых требуется составить уравнение, используя соотношение между выражениями. Эти упражнения готовят учащихся к составлению уравнений по условиям текстовых задач. При наличии времени можно предложить учащимся выполнить упражнения **240**, **243**, отличающиеся от основных упражнений сложностью преобразований.

Хорошей иллюстрацией применения алгебраического аппарата является решение текстовых задач с помощью уравнений. Этому посвящён заключительный пункт 8 данного параграфа.

В решении текстовых задач с помощью уравнений выделяются три этапа, соответствующие трём этапам решения любой практической задачи: обозначение неизвестного числа буквой и составление уравнения по условию задачи (этап формализации), решение уравнения (этап внутримодельного решения задачи), истолкование найденного ответа в соответствии с условием задачи (этап интерпретации результата). Если с первыми двумя этапами решения текстовых задач с помощью уравнений учащиеся уже неоднократно встречались в младших классах, то третьему этапу почти не уделялось внимания. В связи с этим в учебник включён авторский пример, иллюстрирующий тот случай, когда корень уравнения, составленного по условию задачи, не соответствует её смыслу. С подобной ситуацией учащиеся встречаются в задаче **152**. Заметим, что позже при решении квадратных и дробных рациональных уравнений учащиеся часто будут встречаться со случаями, когда корень уравнения, составленного по условию задачи, не соответствует её смыслу.

Задачи, включённые в пункт 8 «Решение задач с помощью уравнений», разнообразны по тематике. В их число входят задачи на проценты (**148**, **149**), на движение (**155**, **156**), на сопоставление данных (**160—162**). Интерес учащихся обычно вызывают старинные задачи (**147**, **157**). При решении задачи **157** полезно напомнить учащимся о соотношении таких единиц измерения, как верста и километр. Рекомендуется остановиться на задачах **152** и **153** с проблемной постановкой вопроса. Специальное внимание следует уделить задаче **159**, предназначенной для работы в парах. Прежде чем учащиеся приступят к её решению, необходимо выяснить с ними, каким условиям должно удовлетворять число, пропущенное в тексте задачи. По окончании работы пар рекомендуется обсудить с классом полученные ответы.

В ходе решения текстовых задач учащиеся убеждаются в значимости приобретённых ими умений выполнять преобразования выражений с переменными и решать уравнения, сводящиеся к линейным. Задачи, входящие в данный пункт, но не рассмотренные при его изучении, рекомендуется включать в число классных и домашних заданий на последующих уроках.

Указания к основным упражнениям учебника

118. Не имеет корней уравнение $3x + 11 = 3(x + 4)$, так как значение выражения, стоящего в левой его части, меньше соответствующего значения выражения, стоящего в правой части.

120. При решении данных уравнений следует повторить с учащимися определение модуля числа.

а) Уравнение имеет два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$;

б) уравнение имеет один корень: $x = 0$;

в) уравнение не имеет корней, так как модуль любого числа — число неотрицательное.

138. В данном упражнении учащиеся встречаются с особыми случаями, когда уравнение не имеет корней или когда любое число является корнем уравнения.

а) $15x + 30 - 30 = 12x$; $15x - 12x = 0$; $x = 0$;

б) $6 + 30x = 5 + 30x$ — корней нет;

в) $3y + y - 2 = 4y - 2$ — любое число является корнем уравнения;

г) $6y - y + 1 = 4 + 5y$ — корней нет.

146. Уравнение $x + (x + 17) + 703 = 6940$, где x м — длина меньшего тоннеля.

147. Уравнение $x + 2x + 3 \cdot (2x) + 4 \cdot (6x) = 132$, где x рупий — сумма, которую дал первый жертвователь.

148. Уравнение $x + 1{,}15x = 86$, где x — число деталей, изготовленных вторым рабочим.

149. Уравнение $x + 1{,}1x = 126\ 000$, где x р. — прибыль, полученная фирмой в первом квартале.

151. Уравнение $x + 5x + (x - 5) = 555$, где x г — расход шерсти на шапку.

152. В этой задаче учащиеся встречаются с ситуацией, в которой корень уравнения не соответствует смыслу задачи. Уравнение $x + (x + 8) + (x - 5) = 158$, где x — число книг на первой полке. Отсюда $x = 51\frac{2}{3}$. Значит, разложить книги указанным способом нельзя.

155. Обозначим через x км/ч собственную скорость теплохода, тогда $(x + 2)$ км/ч — скорость теплохода по течению реки, а $(x - 2)$ км/ч — скорость теплохода против течения. Получим уравнение $9(x + 2) = 11(x - 2)$.

157. Пусть второй пешеход догонит первого через x дней после своего выхода, тогда пройденное им расстояние составит $45x$ вёрст. К этому моменту первый пешеход находился в пути $(x + 1)$ день и прошёл расстояние $40(x + 1)$ вёрст. Имеем уравнение $45x = 40(x + 1)$.

158. Уравнение $2{,}5x + 4 = 4(x - 2)$, где x — первоначальное число плотников в бригаде.

159. (*Для работы в парах.*) Важным моментом в этой задаче является отсутствие значения общего числа учащихся в классе. Из условия следует, что это число должно быть кратно девяти. По смыслу задачи оно может быть равно 18, 27 или 36. Соответствующие уравнения имеют вид $5x + 4x = 18$, $5x + 4x = 27$, $5x + 4x = 36$, где $5x$ — число девочек, а $4x$ — число мальчиков.

Эта задача интересна тем, что она имеет несколько вариантов верных ответов.

161. Уравнение $x + 5x = 3(x + 2)$, где x кг — масса первого арбуза.

162. Уравнение $2(50 - 3x) = 50 - x$, где x кг — масса сахара, взятого из второго мешка.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

235. В заданиях «а» и «б» легко найти ответ на поставленный вопрос, раскрыв скобки. Эти уравнения корней не имеют. В задании «в» уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

236. б) Уравнение не имеет корней, так как $|x| \geqslant 0$ при любом значении x, следовательно, $|x| + 3 > 0$ при любом значении x.

237. б) $|a| = 17$, $a_1 = -17$, $a_2 = 17$.

238. Уравнение $mx = 5$ имеет единственный корень, если $m \neq 0$; уравнение не имеет корней, если $m = 0$; значений m, при которых это уравнение имеет бесконечно много корней, не существует.

241. г) Произведение нескольких множителей равно нулю в том случае, когда хотя бы один из множителей равен нулю, т. е.

$x + 1 = 0$, или $x - 1 = 0$, или $x - 5 = 0$.

Отсюда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$.

242. а) Уравнение не может иметь положительного корня, так как при $x > 0$ значение выражения, стоящего в левой части уравнения, есть число положительное.

243. в) $(0{,}7x - 2{,}1) - (0{,}5 - 2x) = 0{,}9(3x - 1) + 0{,}1$;

$0{,}7x - 2{,}1 - 0{,}5 + 2x = 2{,}7x - 0{,}9 + 0{,}1$;

$2{,}7x - 2{,}6 = 2{,}7x - 0{,}8$; $2{,}7(x - x) = 1{,}8$.

Корней нет, так как $2{,}7(x - x) = 0$ при любом значении x.

245. Корень уравнения $ax = 6$ является целым числом, если число a является делителем числа 6. Это числа -6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6.

246. Корень уравнения не может быть целым числом, так как при любом целом значении x значение выражения $7(2x + 1)$ кратно 7, тогда как 13 на 7 не делится.

247. Уравнение $4x + 2(1000 - x) = 3150$, где x — число кроликов.

248. Уравнение $x + 12 = 1{,}5(x - 3)$, где x — число кустов смородины на втором участке.

250. Уравнение $40x = 25(x + 6)$, где x — число дней, за которое ученик должен был прочитать книгу.

251. Уравнение $40x = 60(x - 3)$, где x – число дней, за которое артель должна была выполнить заказ.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 6

8. а) Уравнение имеет один корень при $b - 2 = 0$, т. е. при $b = 2$;

б) уравнение имеет два корня при $b > 2$;

в) уравнение не имеет корней при $b < 2$.

11. а) Уравнения неравносильны, так как первое уравнение имеет один корень, а второе — два;

б) уравнения равносильны.

Пункт 7

12. $2bx - 3b + 3b - 6 = 16$; $2bx = 22$; $bx = 11$; $x = \frac{11}{b}$.

Корень x является натуральным числом, если b — делитель числа 11, т. е. $b = 1$ или $b = 11$.

13. $(15 + m) - (2 + 3m) = -3(m + 2) + (2 - m)$;

$15 + m - 2 - 3m = -3m - 6 + 2 - m$;

$m - 3m + 3m + m = -6 + 2 - 15 + 2$;

$2m = -17$; $m = -8{,}5$.

14. а) Уравнение имеет один корень при $b \neq 0$. Корень уравнения: $x = \frac{3b-2}{b}$;

б) ни при каком значении b уравнение не может иметь бесконечно много корней;

в) уравнение не имеет корней при $b = 0$, так как в этом случае при любом значении x левая часть уравнения равна нулю, а правая равна -2.

17. После раскрытия скобок уравнение примет вид $kx = k - 1$.

а) Уравнение имеет один корень при $k \neq 0$;

б) значения k, при котором уравнение имеет бесконечно много корней, не существует;

в) уравнение не имеет корней при $k = 0$.

18. $ax - 16 = 5x - 1$; $ax - 5x = 15$; $(a - 5)x = 15$.

Натуральное число $a - 5$ должно быть делителем числа 15, т. е. быть равным 1, 3, 5 или 15. Следовательно, a может принимать значения 6, 8, 10 или 20.

Пункт 8

8. Уравнение $\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}x - 2\right) + 32 = x$, где x — число туристов, участвовавших в походе. Отсюда $x = 90$.

10. Уравнение $x + (x + 20) + 120 \cdot 0{,}3 = 120$, где x мин — время, затраченное на выполнение задания по физике. Получим, что на задание по физике затрачено 32 мин, на задание по алгебре — 52 мин, а на задание по русскому языку — 36 мин.

11. Уравнение $2 \cdot 8 + 2 \cdot (30 - 2x) = 64$, где x см — неизвестная сторона заштрихованного прямоугольника.

12. Уравнение $2 \cdot x + 0{,}5 \cdot 1{,}2x = 39$, где x км/ч — первоначальная скорость велосипедиста. Отсюда $x = 15$.

13. Пусть с первого участка собрали x кг картофеля, тогда со второго участка собрали $(x - 0{,}16x)$ кг, т. е. $0{,}84x$ кг, а с первых двух участков вместе собрали $1{,}84x$ кг. Значит, с третьего участка собрали $(1{,}84x - 96)$ кг картофеля. Составим уравнение $1{,}84x + (1{,}84x - 96) = 456$. Решив его, получим, что с первого участка собрали 150 кг картофеля, со второго — 126 кг, а с третьего — 180 кг.

14. Уравнение $1{,}1(1{,}1x) = 1331$, где x р. — первоначальная цена товара. Отсюда $x = 1100$.

§ 4. Статистические характеристики

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
9	Среднее арифметическое, размах и мода	3(3)
10	Медиана как статистическая характеристика	1(1)
	Контрольная работа № 2	1

Содержание материала

Среднее арифметическое ряда данных как один из основных статистических показателей. Размах как характеристика наибольшего различия чисел в ряду данных. Мода как статистический показатель. Случаи, когда при анализе данных предпочтение отдаётся моде, а не среднему арифметическому. Медиана ряда данных как статистический показатель. Нахождение медианы упорядоченного ряда чисел при нечётном и чётном числе членов этого ряда.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы сформировать у учащихся представление о простейших статистических характеристиках и их использовании для анализа ряда данных, полученных в результате статистического исследования.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны научиться использовать простейшие статистические характеристики (среднее арифметическое, размах, мода, медиана) для анализа в несложных ситуациях ряда данных, полученных в результате некоторого исследования.

Методический комментарий

На современном этапе развития общества, когда в жизнь стремительно вошли референдумы и социологические опросы, кредиты и страховые полисы, разнообразные банковские начисления и т. п., становится очевидной актуальность включения в школьный курс основных сведений из статистики. Изучение элементов статистики распределяется между курсами 7 и 8 классов. В 7 классе вводятся основные статистические характеристики, в 8 классе учащиеся знакомятся с такими вопросами, как сбор и группировка статистических данных, наглядное представление статистической информации.

В курсе алгебры 7 класса рассматриваются такие характеристики, как среднее арифметическое, размах, мода и медиана.

Среднее арифметическое ряда данных является одним из важнейших статистических показателей. Учащиеся должны понимать, что вычисление среднего арифметического позволяет переходить от частных случаев к некоторым обобщениям. Эта мысль раскрывается в учебнике на примере вычисления времени, затраченного семиклассниками в определённый день на выполнение домашнего задания по алгебре. Важно подчеркнуть, что с помощью аналогичных наблюдений за этой группой учащихся можно проследить, как изменялась в течение недели средняя затрата времени на выполнение домашнего задания по алгебре, сравнить среднюю затрату времени на выполнение в какой-либо день домашних заданий по алгебре и русскому языку и т. п. Следует сразу сделать оговорку, что для серьёзных выводов, безусловно, надо выделить более многочисленную группу.

С помощью среднего арифметического можно сравнивать, например, хозяйства по средней урожайности пшеницы с 1 га или молочные фермы по среднему суточному удою молока от одной коровы.

Необходимо обратить внимание учащихся на то, что среднее арифметическое ряда данных является абстрактной обобщающей величиной. В связи с этим даже в тех случаях, когда ряд данных состоит из натуральных чисел, среднее арифметическое ряда может выражаться дробным числом. У учащихся не должны вызывать недоумения такие обороты речи, как «в среднем в каждом ящике находится по 42,3 детали», «в среднем учащиеся класса допустили в работе по 2,8 ошибки».

Наряду со средним арифметическим при анализе данных используется такой показатель, как размах ряда. Размах ряда характеризует наибольшее различие данных в ряду. Например, в ряду чисел

$$12,\ 44,\ 36,\ 44,\ 18,\ 20,\ 12,\ 12$$

наибольшее из значений равно 44, а наименьшее равно 12. Размах ряда равен разности $44 - 12$, т. е. равен 32.

Широкое применение в статистике находят такие характеристики, как мода и медиана. Их называют структурными средними, так как значения этих характеристик определяются общей структурой ряда.

Модой ряда называется число, наиболее часто встречающееся в ряду данных. Особенность этого показателя состоит в том, что ряд может иметь более одной моды или не иметь моды совсем. Внимание учащихся надо обратить на соответствующие примеры, которые приведены в учебнике. Важно разъяснить им, что во многих случаях при анализе данных предпочтение отдаётся не среднему арифметическому, а моде. Например, при изучении спроса населения на одежду или обувь определённого размера представляет интерес выявление моды. В статистических исследованиях моду иногда используют как вспомогательный показатель, характеризующий типичность среднего арифметического в случае, когда оно близко к моде.

Упражнения пункта 9 разнообразны по содержанию и существенно различаются по степени сложности. Наряду с простейшими заданиями, непосредственно направленными на усвоение новых понятий, здесь немало заданий, требующих определённых рассуждений, сопоставлений и обоснований (**170**, **173—176**, **180**, **184**). Специальное внимание следует уделить упражнению **176**, предназначенному для работы в парах. После его выполнения рекомендуется провести в классе коллективное обсуждение найденных ответов и обратить внимание учащихся на необходимость учитывать два возможных случая — когда пропущено наименьшее число и когда пропущено наибольшее число. При организации классной работы в число предлагаемых учащимся упражнений обязательно следует включить задачу-исследование **184**. Учителю необходимо организовать коллективное обсуждение хода решения и проверку найденного ответа. Из дополнительных упражнений рекомендуется использовать усложнённые задания **253** и **255**.

В пункте 10 учащиеся встречаются ещё с одной статистической характеристикой — медианой. Медиана определяется сначала для упорядоченного ряда данных. При этом различают два случая: когда число членов ряда нечётное и когда оно чётное. Полезно обратить внимание учащихся на происхождение термина «медиана» и его связь с соответствующим термином из геометрии. Медианой произвольного ряда чисел называют медиану соответствующего упорядоченного ряда.

Учащиеся должны понимать, что медиана позволяет уточнить некоторую информацию о ряде данных, которую даёт среднее арифметическое. В связи с этим рекомендуется рассмотреть в классе приведённый в объяснительном тексте учебника пример, в котором представлен случай, когда медиана лучше, чем среднее арифметическое, отражает реальную ситуацию с распределением акций между сотрудниками отдела.

В систему упражнений данного пункта включены задания, в которых учащиеся должны найти медиану ряда (**186**, **187**, **189**, **190**), а также усложнённые задания, в которых предлагается найти различные статистические характеристики и объяснить их практический смысл.

Выполняя различные задания из данного параграфа, семиклассники учатся аргументировать свои ответы, иллюстрировать их примерами.

Указания к основным упражнениям учебника

169. в) Среднее арифметическое ряда приближённо равно 67,7. Размах ряда равен 22. Ряд имеет две моды: 61 и 64.

г) Среднее арифметическое ряда равно −0,5. Размах ряда равен 20. Мода равна 0.

170. а) Размах ряда увеличится, так как в рассматриваемой разности увеличится уменьшаемое, а вычитаемое останется прежним. Если ряд имел моду, то она не изменится, так как добавленное число не совпадает ни с одним из чисел данного ряда.

б) Размах ряда уменьшится, так как в рассматриваемой разности увеличится вычитаемое, а уменьшаемое останется прежним. Если ряд имел моду, то она не изменится, так как вычеркнутое число не совпадает ни с одним из оставшихся чисел.

в) Размах ряда не изменится. Мода ряда может не измениться, если она совпадала с наибольшим числом. Если мода была меньше наибольшего числа, то после добавления числа, равного наибольшему, может появиться ещё одна мода. Если ряд не имел моды, то в полученном ряду чисел мода окажется равной наибольшему числу.

173. Сумма членов ряда равна $15 \cdot 10$, т. е. 150. После добавления числа 37 сумма членов ряда стала равной $150 + 37$, т. е. 187, а число членов ряда стало равным 11. Значит, среднее арифметическое нового ряда равно $187 : 11$, т. е. 17.

174. Сумма членов ряда равна $13 \cdot 9$, т. е. 117. После вычёркивания числа 3 сумма членов ряда стала равной $117 - 3$, т. е. 114, а число членов ряда стало равным 8. Значит, среднее арифметическое членов нового ряда равно $114 : 8$, т. е. 14,25.

175. Обозначим стёртое число через x. Тогда $\frac{2+7+10+x+18+19+27}{7} = 14$. Отсюда $83 + x = 14 \cdot 7$, $x = 15$.

176. (*Для работы в парах*.) а) Пусть x — пропущенное число, тогда $\frac{3+8+15+30+x+24}{6} = 18$. Отсюда $80 + x = 6 \cdot 18$, $x = 28$.

б) Если пропущено наибольшее число x, то $x - 3 = 40$, $x = 43$;

если пропущено наименьшее число x, то $30 - x = 40$, $x = -10$.

В задании «б» получилось два ответа, так как в условии задачи не указано, какое число пропущено — наибольшее или наименьшее.

179. Средний балл равен среднему арифметическому. Наиболее типичная оценка равна моде ряда.

Для Ильина средний балл равен $\frac{5 \cdot 6 + 4 \cdot 9}{15} = 4{,}4$; наиболее типичной оценкой является оценка «4».

Для Семёнова средний балл равен $\frac{5 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 9}{15} \approx 3{,}5$; наиболее типична оценка «3».

Для Попова средний балл равен $\frac{5 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{15} \approx 4{,}7$; наиболее типична оценка «5».

Для Романова средний балл равен $\frac{5 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 4}{15} = 3{,}8$; наиболее типична оценка «4».

180. Всего было собрано $(18 \cdot 12 + 19 \cdot 8 + 23 \cdot 6)$ ц.

Общая площадь трёх участков равна $(12 + 8 + 6)$ га. Средняя урожайность равна

$$\frac{18 \cdot 12 + 19 \cdot 8 + 23 \cdot 6}{12 + 8 + 6} = \frac{506}{26} \approx 19{,}5 \text{ (ц/га)}.$$

181. Среднее арифметическое ряда равно

$$\frac{0 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2}{10} = 1{,}7,$$

т. е. в среднем на каждый ящик приходится по 1,7 бракованной детали. Мода ряда равна 2, т. е. преимущественно встречаются ящики, в каждом из которых 2 бракованные детали.

184. (*Задача-исследование.*) 1) Следует обратить внимание учащихся на то, что средний возраст сотрудников увеличился. Из этого можно сделать вывод, что Игорю больше двадцати лет.

2) Первоначальный суммарный возраст сотрудников отдела равен $30{,}5 \cdot 12 = 366$ (лет).

3) Новый суммарный возраст сотрудников отдела равен $(366 - 20 + x)$ лет, где x — возраст Игоря.

4) Средний возраст сотрудников отдела стал равен $\frac{346 + x}{12}$ (лет).

5) Имеем уравнение $\frac{346 + x}{12} = 31$. Отсюда $x = 26$.

Возраст Игоря — 26 лет.

Расчёты подтвердили справедливость сделанного в пункте 1 предположения о возрасте Игоря.

187. а) Среднее арифметическое ряда равно

$$\frac{3{,}8 + 7{,}2 + 6{,}4 + 6{,}8 + 7{,}2}{5} = 6{,}28.$$

Для определения медианы составим упорядоченный ряд:

3,8; 6,4; 6,8; 7,2; 7,2.

Медиана данного ряда равна 6,8.

188. а) Может, так как частное от деления суммы натуральных чисел на натуральное число может быть дробным числом;

б) нет, так как мода выражается числом, которое встречается в ряду данных;

в) нет, так как разность двух натуральных чисел является целым числом;

г) может, если в ряду данных чётное число членов.

190. По данным таблицы следует составить упорядоченный ряд. Медиана ряда равна 4,5.

193. Среднее арифметическое ряда данных приближённо равно 36. Следует учесть, что сумму количества всех поступивших писем, равную 1101, надо делить на 31. Размах ряда равен $64 - 0 = 64$. Ряд имеет две моды: 0 и 38. Медианой служит 16-й член соответствующего упорядоченного ряда данных. Составив упорядоченный ряд, находим, что медиана равна 38.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

253. Сумма чисел данного ряда равна $7 \cdot 10$, т. е. 70. После добавления двух новых чисел сумма ряда стала равной $70 + 17 + 18$, т. е. 105, а число членов ряда стало равным 12. Значит, среднее арифметическое стало равно $\frac{105}{12} = 8{,}75$.

254. а) Если упорядочить данный ряд чисел, то до 15-го члена в полученном ряду будет находиться 14 членов, а так как 15-й член является медианой, то после него в ряду также находится 14 членов. Значит, всего в ряду $14 + 1 + 14 = 29$ членов.

б) Если упорядочить данный ряд чисел, то до 17-го члена будет находиться 16 членов ряда. Так как 17-й и 18-й члены расположены в упорядоченном ряду посередине, то и после 18-го члена стоят 16 членов ряда. Всего в ряду $16 + 2 + 16 = 34$ члена.

255. По условию задачи

$$\frac{12 + x + 2x + 7 + 15 + 20}{6} = 13,$$

где x и $2x$ — неизвестные члены ряда. Отсюда

$$3x + 54 = 78;\ x = 8.$$

Искомые числа: 8 и 16.

256. По условию задачи

$$\frac{8 + 16 + 26 + x + 48 + (x + 20) + 46}{7} = 32,$$

где x и $(x + 20)$ — неизвестные числа. Отсюда

$$2x + 164 = 224;\ x = 30.$$

Искомые числа: 30 и 50.

257. а) Среднее арифметическое ряда увеличится на $\frac{6}{12}$, т. е. на 0,5.

б) Размах ряда увеличится на 6, так как наибольшее число увеличится на 6, а наименьшее останется без изменения. Следовательно, разность между наибольшим и наименьшим числами увеличится на 6.

в) Мода ряда не изменится; по смыслу задачи в ряду есть наибольшее число, и, значит, мода с ним не совпадает, а при увеличении наибольшего числа новое число не может быть модой.

г) Медиана ряда не изменится, так как в соответствующем упорядоченном ряду числа, записанные посередине, не изменятся.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 9

7. Размах ряда не изменится, так как не меняется ни наибольшее, ни наименьшее число этого ряда.

Если ряд имел моду, то она сохранится или к ней добавится ещё одна мода. Если моды не было, то наименьшее число, записанное дважды, станет модой этого ряда.

8. Обозначим пропущенное число через x. Тогда

$$\frac{6+8+11+14+x+20}{6}=13.$$

Отсюда $x=19$.

9. а) Пусть x — наибольшее число. Тогда

$$x-5=36;\ x=41.$$

б) Пусть x — наименьшее число. Тогда

$$24-x=36;\ x=-12.$$

10. Сумма членов исходного ряда была равна $28\cdot 11$. После добавления нового члена сумма стала равной $28\cdot 11+48$, а число членов ряда стало равным 12.

Среднее арифметическое $x=\frac{28\cdot 11+48}{12}=\frac{356}{12}\approx 29{,}7.$

12. Сумма членов исходного ряда $38\cdot 22$. После вычёркивания двух чисел сумма ряда стала равной $38\cdot 22-59$, а число членов ряда оказалось равным 20.

Среднее арифметическое нового ряда равно

$$\frac{38\cdot 22-59}{20}=\frac{777}{20}=38{,}85.$$

13. а) Среднее арифметическое ряда уменьшилось; б) размах ряда увеличился; в) мода ряда не изменилась.

Пункт 10

8. Упорядоченный ряд данных имеет вид

0; 0; 0; 0; 1,5; 2; 2,5; 2,5; 2,5; 2,5; 3;
3; 3; 3,5; 3,5; 4; 4; 4; 4; 4,5; 4,5; 5; 5.

Среднее арифметическое ряда равно $\frac{64,5}{23} \approx 2,8$.

Размах ряда равен $5 - 0 = 5$.
Ряд имеет 3 моды: 0, 2,5 и 4.
Медиана ряда равна 3.

9. Среднее арифметическое ряда данных равно $\frac{114}{14} \approx 8,1$.

Медина ряда равна 2.

Медиана описывает реальную ситуацию лучше, чем среднее арифметическое, так как почти половина всех сотрудников приобрели по 2 акции, а значение среднего арифметического оказалось таким большим из-за того, что один сотрудник приобрёл очень много акций.

11. а) Среднее арифметическое уменьшится на 0,2, так как сумма уменьшилась на 2, а число слагаемых осталось равным 10;

б) размах ряда увеличится на 2, так как в разности между наибольшим и наименьшим числами ряда вычитаемое уменьшится на 2, а уменьшаемое останется без изменения;

в) мода не изменится; г) медиана не изменится.

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 11. Формулы

Методический комментарий

Одна из особенностей учебника «Алгебра, 7» под редакцией С. А. Теляковского состоит в создании условий для интенсивного развития учащихся, проявляющих интерес и склонности к математике. Важным шагом в этом направлении является включение в каждую главу дополнительных пунктов под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше». Тематика подобных дополнений определена таким образом, чтобы представленный в них теоретический и задачный материал был связан с основным материалом главы и позволял учащимся подняться на новую ступень в его усвоении.

Главу I завершает пункт 11 «Формулы». Понятие «формула» не является новым для учащихся. Из курса математики младших классов им известны формулы площади и периметра прямоугольника, длины окружности, площади круга. В курсе алгебры 7 класса учащиеся уже встречались с формулами чётного и нечётного чисел, а также с формулой целого числа, кратного натуральному числу n. В данном пункте известные учащимся сведения о формулах существенно расширяются.

В начале пункта приводятся отрывки из книги Жюля Верна «Дети капитана Гранта». В этих отрывках учащиеся встречаются с измерением длины в дюймах, скорости в морских милях в час, температуры в градусах по Фаренгейту. Естественно, встаёт вопрос о необходимости знать, как указанные единицы измерения соотносятся с единицами измерения, хорошо известными учащимся. В учебнике приводятся соответствующие формулы, расчёты по которым позволяют понять, о каких величинах говорится в отрывках из книги Жюля Верна, представленных в данном пункте.

Рассмотренный в учебнике авторский пример 1, безусловно, привлечёт учащихся неожиданностью полученного ответа. Желательно предварительно выяснить, какой ответ они ожидают получить. Обычно учащиеся называют такие числа, как 10% и 20%. Однако, выполнив необходимые расчёты, они убеждаются, что площадь прямоугольника увеличится на 21%. Этот неожиданный для учащихся ответ хорошо иллюстрирует приведённый в учебнике рисунок 6. После разбора этого примера полезно обсудить решение задачи **201**.

Важное общеобразовательное значение имеет умение выражать из формулы некоторую переменную через другие. Соответствующие преобразования выполняются в примере 2 учебного текста. Формирование подобного умения важно не только для курса алгебры, но и для смежных дисциплин — геометрии, информатики, физики, химии.

В ходе выполнения представленных в данном пункте упражнений учащиеся знакомятся с формулами, выражающими связь старинных единиц измерения (вёрсты, пуды, фунты) с единицами метрической системы мер, что имеет важное общеобразовательное значение, учатся применять формулы в процентных расчётах.

Материал, включённый в данный пункт и в последующие пункты под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», позволяет учащимся, проявляющим интерес и склонности к математике, сделать новые шаги в достижении личностных, метапредметных и предметных результатов обучения, определённых Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования.

Работа с материалами пунктов под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», может быть организована в форме индивидуальных заданий учащимся, занятий математического кружка, факультативных занятий. Полезно, чтобы учащиеся, интересующиеся математикой, имели специальную тетрадь для выполнения заданий, представленных в этих пунктах. Желательно, чтобы учитель периодически проверял эти тетради, оценивая правильные решения задач высокими баллами.

Указания к упражнениям учебника

196—198. При переходе от одних единиц измерения к другим в случае необходимости рекомендуется пользоваться калькулятором.

199. а) Пусть первоначальная длина прямоугольника равна a см, а ширина — b см. Тогда его площадь составляет ab см^2. После уменьшения на 10% длина прямоугольника станет равной $0{,}9a$ см, а ширина — $0{,}9b$ см. Площадь полученного прямоугольника составит $0{,}9a \cdot 0{,}9b$, т. е. $0{,}81ab$ см^2.

Имеем $ab - 0{,}81ab = 0{,}19ab$; $\frac{0{,}19ab}{ab} \cdot 100\% = 19\%$.

Площадь прямоугольника уменьшится на 19%.

201. Новая цена товара меньше первоначальной, так как при снижении цены 15% брались от большей величины. Верный ответ под номером 1.

202. Пусть первоначально костюм стоил a р. После снижения цены на 20% он стал стоить $0{,}8a$ р. Чтобы вернуться к первоначальной цене, надо новую цену увеличить на $0{,}2a$ р., т. е. на $\frac{0{,}2}{0{,}8} \cdot 100\% = 25\%$. Значит, новую цену надо повысить на 25%.

203. а) По формуле $f = 1{,}8c + 32$, полученной в примере 2, разобранном в тексте учебника, находим: если $c = 4$ °C, то $f = 39{,}2$ °F; если $c = -15$ °C, то $f = 5$ °F; если $c = 0$ °C, то $f = 32$ °F.

б) По формуле $c = \frac{5(f-32)}{9}$ находим: если $f = 20$ °F, то $c \approx -7$ °C; если $f = -16$ °F, то $c \approx -27$ °C; если $f = 0$ °F, то $c \approx -18$ °C.

204. а) Не может, так как если $c > 0$, то $f = 1{,}8c + 32 > 0$;

б) может. Например, при $f = 23$ °F имеем $c = \frac{5 \cdot (23-32)}{9} = -5$ °C.

205. б) $a = \frac{v - v_0}{t}$; в) $b = \frac{2S}{h} - a$.

ГЛАВА II

Функции

§ 5. Функции и их графики

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
12	Что такое функция	1(2)
13	Вычисление значений функции по формуле	2(2)
14	График функции	2(2)

Содержание материала

Зависимость одной переменной от другой. Аргумент и функция. Область определения функции. Задание функции с помощью формулы. График функции. Примеры графиков функциональных зависимостей между реальными величинами.

Основная цель

Основная цель изучения данного параграфа состоит в том, чтобы ознакомить учащихся с понятиями «функция», «область определения функции», «график функции», выработать умение читать и строить графики простейших функциональных зависимостей.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа формируются умения учащихся: вычислять значение функции, заданной формулой, по известному значению аргумента; с помощью графика функции находить значение функции, соответствующее заданному значению аргумента, и решать обратную задачу: определять, при каких значениях аргумента функция принимает указанное значение; извлекать информацию из графиков функций, описывающих реальные процессы.

Методический комментарий

Материал данной главы является начальным этапом в систематическом изучении функций, которое в курсе алгебры распределяется между 7, 8 и 9 классами и получает продолжение в курсе алгебры и начал математического анализа 10—11 классов.

В пункте 12 «Что такое функция» рассматриваются примеры зависимостей одной переменной от другой, заданных формулой (примеры 1 и 2), графиком (пример 3) или таблицей (пример 4). Подчёркивается существенная особенность этих зависимостей, состоящая в том, что в них каждому значению одной переменной соответствует единственное значение другой и вводится понятие функциональной зависимости или функции. Учащиеся узнают, что независимую переменную называют аргументом, а зависимую — функцией. Рекомендуется обратить их внимание на то, что термин «функция» употребляется в двух смыслах — им обозначается как определённого вида зависимость одной переменной от другой, так и сама зависимая переменная. Для учащихся должны стать привычными обороты речи типа «зависимость площади квадрата от длины его стороны является функцией» или «площадь квадрата является функцией длины его стороны». К важнейшим понятиям, с которыми учащиеся встречаются в данном пункте, относится понятие области определения функции. Полезно, чтобы учащиеся указали область определения для каждой из функций, рассмотренных в данном пункте учебника в примерах 1—4. Заметим, что вопрос об области значений функции будет рассмотрен позже, при изучении курса алгебры 9 класса.

Усвоению вводимых понятий способствуют включённые в пункт 12 упражнения **258—264**.

В классе рекомендуется рассмотреть задания **260**, **261**, **263**. Они достаточно просты и могут быть выполнены учащимися устно. Важно, чтобы учащиеся давали развёрнутые ответы, используя введённые термины.

В пункте 13 «Вычисление значений функции по формуле» рассмотрен один из способов задания функции, с которым учащимся придётся постоянно встречаться в курсе алгебры. В связи с этим предлагаются два типа заданий: вычисление значения функции, соответствующего указанному значению аргумента, и нахождение значений аргумента, при которых функция, заданная формулой, принимает указанное значение. На данном этапе изучения задания второго типа могут быть предложены только в том случае, когда их решение сводится к решению линейного уравнения.

Важно обратить внимание учащихся на то, что в случае, когда область определения функции, заданной формулой, не указана, условились считать, что она состоит из тех значений переменной, при которых формула имеет смысл. Соответствующие упражнения включены в число основных **(272)** и дополнительных **(351)**. При наличии времени рекомендуется рассмотреть дополнительные задания

352, 353, в которых предлагается составить формулу, задающую некоторую функциональную зависимость. В домашнее задание для учащихся рекомендуется включить упражнения **281, 282**, готовящие к построению и чтению графиков функций.

Данный параграф завершается пунктом 14 «График функции». Понятие графика функции является одним из важнейших в курсе математики. Графики широко используются в качестве наглядных опорных моделей как в курсе алгебры 7—9 классов, так и в старших классах при ознакомлении с началами математического анализа. Они находят применение и в смежных дисциплинах — физике, информатике.

Изучение темы «График функции» начинается с рассмотрения функции $y = \frac{6}{x+3}$, заданной на множестве значений переменной x, удовлетворяющих условию $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Учитель может предложить учащимся ознакомиться с приведённой в учебнике таблицей значений этой функции и рассмотреть рисунок 11, на котором изображены соответствующие точки. Важно обратить внимание учащихся на то, что эти точки намечают линию, изображённую на рисунке 12, причём, выбирая другие значения x, удовлетворяющие условию $-2 \leqslant x \leqslant 3$, мы будет получать новые точки, принадлежащие этой линии. Следует подчеркнуть, что все такие точки образуют график функции. Учащиеся должны запомнить определение понятия «график функции» и пользоваться им при выполнении упражнений.

Упражнения на построение и чтение графиков функций разнообразны по содержанию. В их число включены задания эмпирического характера, иллюстрирующие значимость формируемых умений. Следует иметь в виду, что в число основных упражнений данного пункта входят задания, предназначенные для работы в парах (**287, 290, 293**). После выполнения парами этих заданий необходимо организовать коллективное обсуждение в классе полученных ответов. Из дополнительных упражнений рекомендуется использовать задания **355, 356** на построение и чтение эмпирических графиков.

Указания к основным упражнениям учебника

273. Значение функции y равно 6 при $x = 0$; $y = 8$ при $x = -0{,}4$; $y = 100$ при $x = -18{,}8$. Важно, чтобы учащиеся давали ответ, используя введённые термины.

278. $s = 60 - 12t$;

а) если $t = 3{,}5$, то $s = 60 - 42 = 18$ (км);

б) если $s = 30$, то $t = \frac{60-30}{12} = 2{,}5$ (ч).

279. $y = 80 - 10x$. Область определения функции — множество чисел 1, 2, ..., 8. Следует обратить внимание учащихся, что область определения функции находится, исходя из смысла задачи.

287. (*Для работы в парах.*) В этом упражнении возможны расхождения в ответах учащихся на $0{,}1 - 0{,}2$, так как значения переменных находятся приближённо.

В задании «а» невозможно получить более одного искомого значения; в задании «б» возможны несколько искомых значений. При ответе на последний вопрос задачи следует требовать от учащихся соответствующих обоснований.

288. Важно, чтобы учащиеся правильно определили, какой масштаб выбран при построении графика.

290. (*Для работы в парах.*) а) Чтобы ответить на данный вопрос, надо определить по рисунку абсциссу точки пересечения графиков. Уровни жидкости в сосудах окажутся одинаковыми, если в них налить по 2,5 л жидкости.

б) По графику, соответствующему уровню жидкости в первом сосуде, находим ординату точки с абсциссой 1,5, а затем на втором графике находим точку с такой же ординатой. Абсцисса найденной точки приближённо равна 1,9. Значит, чтобы получить искомый уровень жидкости, надо во второй сосуд налить примерно 1,9 л жидкости.

291. Прежде чем учащиеся приступят к построению графика, рекомендуется обсудить с ними, какой масштаб удобно выбрать по оси абсцисс и по оси ординат.

293. (*Для работы в парах.*) а) При скорости 50 км/ч тормозной путь автомобиля на сухом асфальте приближённо равен 30 м, на мокром асфальте — 70 м, при гололёде — 160 м.

б) Чтобы тормозной путь автомобиля не превышал 60 м, скорость автомобиля на сухом асфальте не должна превышать 80 км/ч, на мокром асфальте — 45 км/ч, при гололёде — 30 км/ч.

Различие в тормозном пути автомобиля на сухом и мокром асфальте при скорости 50 км/ч приближённо равно 40 м, а при скорости 80 км/ч эта разница составит уже почти 90 м.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

351. Следует ещё раз напомнить учащимся, какое множество является областью определения функции, заданной формулой.

а) Область определения функции состоит из всех чисел, кроме 2 и -2;

б) область определения функции — множество всех чисел.

354. Необходимо подчеркнуть, что значения функций совпадают в тех точках, где пересекаются графики этих функций.

а) При $x = -0{,}5$ и $x = 3$; б) при $-0{,}5 < x < 3$; в) при $x < -0{,}5$ и при $x > 3$.

355. а) Расстояние от дома до озера 8 км;

б) до озера рыболов шёл 1,5 ч; на обратный путь он затратил тоже 1,5 ч;

в) на озере рыболов был 6,5 ч;

г) через час после выхода из дома рыболов был от него на расстоянии 5 км;

д) на расстоянии 6 км от дома рыболов был через 1 ч после выхода;

е) средняя скорость рыболова на пути к озеру и на обратном пути равна $\frac{8}{1{,}5} \approx 5{,}3$ км/ч.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 11

8. Подбором находим искомые значения аргумента: 17; 26; 35; 44; 53; 62; 71; 80.

9. Следует вспомнить с учащимися определение площади поверхности куба. Тогда станет ясно, какова искомая формула: $S = 6a^2$.

Если $a = 7{,}5$, то $S = 6 \cdot 56{,}25 = 337{,}5$.

Обратная задача решается с помощью уравнения.

Если $S = 24$, то $24 = 6a^2$, $a = 2$; если $S = 150$, то $150 = 6a^2$, $a = 5$.

12. Можно заметить, что каждое число во второй строке таблицы на 1 меньше квадрата соответствующего числа, стоящего в первой строке. Отсюда формула $y = x^2 - 1$.

Пункт 12

11. Зависимость вместимости V коробки от x можно выразить формулой $V = (20 - 2x)^2 \cdot x$.

Если $x = 5$, то $V = 500$;

если $x = 4$, то $V = 576$;

если $x = 3$, то $V = 588$.

16. Из равенства $23 = 4 \cdot 5 + a$ найдём значение $a = 3$. Воспользовавшись формулой $y = 4x + 3$, заполним таблицу.

Пункт 13

16. а) По просёлочной дороге туристы шли 2 ч;

б) автобус туристы ждали 1 ч;

в) по просёлочной дороге туристы двигались со скоростью $\frac{10}{2} = 5$ км/ч, а по шоссе — со скоростью $\frac{90 - 10}{2} = 40$ км/ч.

§ 6. Линейная функция

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
15	Прямая пропорциональность и её график	2(2)
16	Линейная функция и её график	3(3)
	Контрольная работа № 3	1

Содержание материала

Прямая пропорциональность как функция, задаваемая формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная, k — число, отличное от нуля. График прямой пропорциональности, расположение графика в координатной плоскости в зависимости от знака k.

Линейная функция как функция, задаваемая формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа. График линейной функции. Угловой коэффициент прямой. Взаимное расположение графиков двух линейных функций с одинаковыми и различными угловыми коэффициентами.

Основная цель

Основная цель изучения данного параграфа состоит в том, чтобы ознакомить учащихся со свойствами и графиком прямой пропорциональности и использовать эти сведения в качестве опорных при изучении линейной функции общего вида.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь строить и читать графики прямой пропорциональности и линейной функции общего вида, изображать схематически график функции $y = kx$ при $k > 0$ и $k < 0$, а также функции $y = kx + b$ при различных значениях k и b. Они также должны уметь извлекать информацию из графиков реальных зависимостей, описываемых формулами вида $y = kx$, где $k \neq 0$, и $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

Методический комментарий

Общие сведения о функциях, рассмотренные в § 5, являются опорными при изучении в курсе алгебры 7—9 классов свойств функций различного вида. Сначала разбираются свойства линейной функции, т. е. функции, задаваемой формулой $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа. Прежде всего рассматриваются свойства функции, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная, k — число, отличное от нуля, т. е. функции, представляющей частный случай линейной функции и называемой прямой пропорциональностью. Такой подход к структурированию материала соответствует общему подходу, принятому в курсе математики, когда от более простых случаев переходят к более сложным: например, от функции $y = ax^2$ к функциям $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$, $y = ax^2 + bx + c$, от функции $y = \sin x$ к функциям $y = a\sin x$, $y = \sin x + b$, $y = a\sin x + b$ и т. п.

При введении понятия прямой пропорциональности как функции особого вида следует обратить внимание учащихся на то, что название этой функции связано со справедливостью пропорции $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$,, где x_1 и x_2 — значения аргумента, каждое из которых отлично от нуля, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции. Учащиеся знакомятся с примерами 1—3 учебного текста, указывая в каждом из них независимую и зависимую переменные. После этого рассматривается график прямой пропорциональности. Учащимся рекомендуется предложить ознакомиться с таблицей значений функции $y = 0{,}5x$, проанализировать по рисунку 22 особенность расположения точек, координаты которых помещены в таблице, и рассмотреть график функции, изображённый на рисунке 23. Утверждение о том, что графиком прямой пропорциональности является прямая линия, принимается без доказательства. Учащимся предлагается построить график функции $y = -1{,}5x$. Этот график они строят по двум точкам, одной из которых служит начало координат. Полезно предложить учащимся выполнить упражнение **301**, предназначенное для работы в парах.

Далее анализируются особенности расположения в координатной плоскости графика функции $y = kx$ при $k > 0$ и $k < 0$. Знание этих особенностей является хорошим средством для самоконтроля. Учащимся предлагаются более сложные задания на построение и чтение графиков. Рекомендуется остановиться на заданиях **307—309**, в которых рассматривается зависимость между реальными величинами. Заметим, что задание **307** интересно тем, что в нём требуется составить формулу, приближённо описывающую реальную ситуацию. Из дополнительных упражнений полезно уделить внимание заданию **357**, в котором для построения графика требуется выбрать соответствующий масштаб. Ознакомление с прямой пропорциональностью является хорошей подготовкой к изучению линейной функции общего вида.

Определение линейной функции рекомендуется дать после рассмотрения примеров 1 и 2, приведённых в пункте 16. Важно подчеркнуть, что прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции. Усвоению понятия линейной функции способствуют упражнения **313—318**, которые используются для классной и домашней работы. Целесообразно предложить учащимся выполнить также дополнительные упражнения **363**, **366**.

Особое внимание следует уделить понятию графика линейной функции. С графиками различных линейных функций учащиеся будут неоднократно встречаться как в курсе алгебры, так и при изучении смежных дисциплин.

Вопрос о графике линейной функции решается с опорой на интуитивные представления учащихся. Сопоставляются значения функции $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 2$, соответствующие одинаковым значениям аргумента, и делается вывод, что график функции $y = 0{,}5x + 2$ может быть получен из графика функции $y = 0{,}5x$ сдвигом на две единицы вверх и представляет собой прямую, параллельную графику функции $y = 0{,}5x$. Утверждение, что графиком линейной функции $y = kx + b$ при $k \neq 0$ является прямая, параллельная графику функции $y = kx$, принимается без доказательства. Важно остановиться на случае, когда линейная функция задана формулой $y = b$, где b — некоторое число. Учащиеся должны усвоить, что при $k = 0$ и $b \neq 0$ графиком функции $y = 0x + b$, т. е. $y = b$, является прямая, параллельная оси x, а при $k = 0$ и $b = 0$ — сама ось x.

Уже на первом уроке, отводимом на изучение пункта 16 «Линейная функция и её график», можно предложить учащимся выполнить в классе или дома некоторые задания на построение графиков линейных функций (упражнения **319**, **320**, **325**, **326**).

На последующих уроках круг сведений о графике линейной функции расширяется. Важно разъяснить учащимся, что графики функций $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$, $y = kx + b_3$ и т. п., где k — отличное от нуля число, b_1, b_2, b_3, ... — некоторые отличные от нуля числа, параллельны графику прямой пропорциональности $y = kx$ и потому наклонены к оси x под тем же углом. Этот угол называют углом наклона графика функции $y = kx + b$. При $k > 0$ угол наклона графика — острый, а при $k < 0$ — тупой. Соответствующие иллюстрации приведены в учебнике на рисунке 37. Учащиеся должны понимать, что из формулы $y = kx + b$ при $x = 0$ следует равенство $y = b$. Это означает, что график линейной функции $y = kx + b$ пересекает ось y в точке с координатами $(0;\ b)$.

На втором и третьем уроках, отводимых на изучение пункта 16, учащимся предлагаются различные упражнения, связанные с понятием «график линейной функции». К ним относятся задания **321—324**, **327**. Специальное внимание следует уделить заданиям **328**, **329**, при выполнении которых учащиеся должны учитывать особенности расположения графика линейной функции в координатной плоскости. Интерес учащихся обычно вызывают упражнения **330—335**, связанные с чтением и построением графиков, описывающих реальные зависимости между величинами. Такого рода задания убеждают учащихся в практической значимости приобретаемых ими знаний и умений. В их число входят задания **330** и **335**, предназначенные для работы в парах. Результаты выполнения этих заданий обязательно следует обсудить в классе, формируя умение учащихся излагать и обосновывать свои рассуждения.

При изучении сведений о линейной функции можно предложить учащимся выполнить задания **361**, **364**, **367—372** из числа дополнительных упражнений к § 6.

На завершающем этапе изучения данного параграфа рекомендуется проверить усвоение материала учащимися, используя для этого контрольные вопросы и задания, помещённые в конце параграфа.

Указания к основным упражнениям учебника

301. (*Для работы в парах.*) а) $y = -9x$; б) $y = -9x$.

Следует обратить внимание учащихся на то, что графики функций $y = kx$ и $y = -kx$ симметричны как относительно оси x, так и относительно оси y.

302. При ответе на последний вопрос из уравнения $-150 = -0{,}5x$ находим $x = 300$. При этом полезно пояснить учащимся, что график функции $y = -0{,}5x$ бесконечен и на чертеже изображена лишь его часть.

304. График прямой пропорциональности $y = kx$ проходит через точку $A(3;\ 21)$. Из условия $21 = k \cdot 3$ находим $k = 7$. График проходит через точку B.

305. (*Для работы в парах.*) Выполнив задания «а»—«г», учащиеся могут сделать вывод о том, как расположены графики в заданиях «д» и «е».

В задании «д» графиком функции является прямая, проходящая через начало координат и расположенная в I и III координатных четвертях, а в задании «е» — прямая, проходящая через начало координат и расположенная во II и IV координатных четвертях.

307. При построении точек удобно выбрать масштаб: 1 ч изображается на оси x отрезком длиной 2 см, 1 км изображается на оси y отрезком длиной 1 см. Точки располагаются близко от прямой, проходящей через начало координат и точку (1; 4). Приближённо зависимость y от x выражается формулой $y = 4x$.

308. а) Абсциссы точек A и B — время движения (в часах) пешехода и велосипедиста соответственно. Пешеход был в пути 4 ч, велосипедист — 2 ч.

б) Ординаты точек A и B — путь (в километрах), пройденный пешеходом и велосипедистом. Пешеход прошёл 20 км, велосипедист проехал 30 км.

в) Скорость движения (в километрах в час) вычисляем по формуле $v = \frac{s}{t}$. Пешеход двигался со скоростью $\frac{20}{4} = 5$ км/ч, а велосипедист — со скоростью $\frac{30}{2} = 15$ км/ч.

г) Путь, который проехал за 2 ч велосипедист, в 3 раза больше пути, пройденного за то же время пешеходом, так как скорость велосипедиста в 3 раза больше скорости пешехода.

309. Зависимость удлинения проволоки y от силы F является прямой пропорциональностью при $0 \leqslant F \leqslant 1000$ (Н).

314. Длина прямоугольника x см, а ширина $(x - 3)$ см. Зависимость периметра прямоугольника от его длины можно выразить формулой $P = 2(x + x - 3) = 4x - 6$, а зависимость площади прямоугольника от его длины — формулой $S = x(x - 3)$.

Линейной функцией является зависимость периметра прямоугольника от его длины.

Заметим, что зависимость площади прямоугольника от его длины не является линейной функцией.

316. Линейными являются функции в заданиях «а», «б», «в» и «е», так как каждую из них можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

320. (*Задача-исследование.*) а) Прямые, являющиеся графиками функций $y = kx + 4$ и $y = -x$, параллельны в том случае, когда равны их угловые коэффициенты. Следовательно, $k = -1$.

б) Так как ось абсцисс является графиком функции $y = 0$, то график функции $y = kx + 4$ не пересекает ось абсцисс, т. е. параллелен ей при $k = 0$.

в) Подставив в уравнение $y = kx + 4$ значения $x = 3$, $y = 0$, получим $0 = 3k + 4$. Отсюда $k = -\frac{4}{3}$.

г) Найдём координаты точки пересечения графиков функций $y = 12 - x$ и $y = x + 4$. Имеем $12 - x = x + 4$. Отсюда $x = 4$, тогда $y = 4 + 4 = 8$. Подставив в уравнение $y = kx + 4$ значения $x = 4$, $y = 8$, получим $8 = 4k + 4$. Отсюда $k = 1$.

322. а) График функции пересекает ось y в точке, абсцисса которой равна 0, и пересекает ось x в точке, ордината которой равна 0.

Из равенства $-2{,}4x+9{,}6=0$ находим, что $x=4$, а из равенства $y=-2{,}4\cdot 0+9{,}6$ находим, что $y=9{,}6$, значит, прямая пересекает ось x в точке (4; 0), а ось y — в точке (0; 9,6).

в) Из равенства

$$1{,}2x+6=0$$

находим, что $x=5$, а из равенства

$$y=1{,}2\cdot 0+6$$

находим, что $y=6$. Значит, прямая пересекает ось x в точке (−5; 0), а ось y — в точке (0; 6).

324. а) График проходит через точку $A(100; 113)$, так как $113=1{,}2\cdot 100-7$.

в) График не проходит через точку $C(-10; 5)$, так как $5\neq 1{,}2\cdot(-10)-7$.

330. (*Для работы в парах.*) а) Массу пустого бидона находим по графику как ординату точки с абсциссой, равной нулю. Эта масса равна 1 кг.

б) Массу бидона с 1 л жидкости находим по графику как ординату точки с абсциссой 1. Эта масса равна 2 кг.

в) Масса 1 л жидкости равна разности (2 − 1) кг, т. е. равна 1 кг.

г) Зная, что общая масса бидона и жидкости равна 3 кг, находим по графику объём жидкости в бидоне как абсциссу точки с ординатой 3. Этот объём равен 2 л.

332. а) Дачник ехал по шоссе 0,5 ч и проехал 40 км, следовательно, его скорость была равна $40:0{,}5=80$ (км/ч);

б) по просёлочной дороге дачник ехал 0,5 ч и проехал 30 км, следовательно, его скорость была равна $30:0{,}5=$ $=60$ (км/ч).

333. Зависимость задаётся формулой $y=1{,}5x+10$. Из равенства $1{,}5x+10=100$ находим, что $x=60$. Значит, область определения этой функции $0\leqslant x\leqslant 60$. Можно выбрать следующий масштаб: по оси x в 1 см 10 единиц, по оси y в 1 см 20 единиц.

335. (*Для работы в парах.*) Для определения скорости движения следует пройденный каждой машиной путь разделить на время движения. Удобно воспользоваться для определения скорости движения точкой пересечения графиков.

Из рисунка 44 учебника видно, что расстояние, равное 140 км, первая машина прошла за 2 ч, следовательно, её скорость $v_1=\frac{140}{2}=70$ (км/ч), а вторая машина двигалась со скоростью $v_2=\frac{140}{2-1}=140$ (км/ч).

Абсцисса точки пересечения графиков означает время, когда машины встретились, а ордината — пройденное ими расстояние до момента встречи.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

361. б) Линейная функция задаётся формулой $y = kx + b$. Значение b находим из равенства $5 = 0 \cdot k + b$, имеем $b = 5$, а из равенства $6 = k \cdot 10 + 5$ находим, что $k = 0{,}1$. Заполняем таблицу, пользуясь формулой $y = 0{,}1x + 5$.

362. Учащиеся должны заметить закономерность: у каждого двузначного числа число десятков равно значению x, которому это число соответствует, а число единиц равно 1. Поэтому функцию можно задать формулой $y = 10x + 1$.

364. Из условия $-1{,}4 = 3{,}5a$ находим, что $a = -0{,}4$.

366. Скорость распространения звука в зимний день при температуре -35 °C равна

$$v = 331 + 0{,}6 \cdot (-35) = 310 \text{ (м/с)},$$

а в летний день при температуре 30 °C равна

$$v = 331 + 0{,}6 \cdot 30 = 349 \text{ (м/с)}.$$

370. Функцию можно задать формулой $y = kx + b$. Из условия параллельности графиков следует, что $k = 1{,}5$. Из равенства

$$3 = 1{,}5 \cdot 2 + b$$

находим, что $b = 0$. Следовательно, $y = 1{,}5x$.

371. Линейная функция, графиком которой служит прямая, параллельная оси абсцисс, задаётся формулой $y = b$. Поскольку эта прямая проходит через точку $A(5;\ 8)$, то $b = 8$. Значит, функцию можно задать формулой $y = 8$.

372. б) $16x - 7 = 21x + 8$; $5x = -15$; $x = -3$; $y = -55$.

Точка пересечения графиков имеет координаты $(-3;\ -55)$.

373. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо построить графики данных линейных функций.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 14

16. При выполнении задания следует учитывать знак коэффициента пропорциональности.

а) Наибольшее значение 15, наименьшее значение -5; б) наибольшее значение 3, наименьшее значение -9.

18. Из рисунка видно, что функцию, график которой изображён, можно задать формулой $y = 2x$. График функции $y = kx$ располагается между этой прямой и осью y при значениях $k > 2$.

19. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо для каждых трёх точек составить отношения ординаты к абсциссе. В случае равенства всех трёх отношений точки лежат на одной прямой, являющейся графиком функции $y = kx$.

а) $\frac{6}{2} = \frac{-3}{-1} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$. Точки лежат на одной прямой $y = 3x$;

б) $\frac{-6}{2}=\frac{-3}{1}=\frac{-15}{5}=-3$. Точки лежат на одной прямой $y=-3x$;

в) $\frac{6}{2}=\frac{1{,}5}{0{,}5}\neq\frac{-3}{-1}$. Точки не лежат на одной прямой;

г) $\frac{-4}{2}=\frac{2}{-1}=\frac{-12}{6}=-2$. Точки лежат на одной прямой $y=-2x$.

Пункт 15

6. Зависимость y от t является линейной функцией, которая задаётся формулой $y=100-5t$. Область определения функции $0 < t \leqslant 20$.

10. а) График пересекает ось x в точке с ординатой, равной нулю. Имеем уравнение

$$0=0{,}2x-18;\ x=90.$$

График пересекает ось x в точке $(90;\ 0)$.

14. Если один из углов треугольника равен $b°$, а другой угол равен $(b+40)°$, то третий угол $a°$ можно найти по формуле

$$a=180-b-(b+40).$$

Формулой $a=140-2b$ задаётся линейная функция. Её область определения $0<b<70°$, так как значение угла треугольника должно быть положительным числом.

16. Так как $x+y=6$, то $y=-x+6$. Сопоставив эту формулу с формулой заданной функции $y=kx+b$, можно сделать вывод, что $k=-1$, $b=6$.

18. Функция задаётся формулой $y=kx+b$. Из условия параллельности графиков следует, что $k=2{,}5$. Из равенства $3=2{,}5\cdot(-1)+b$ находим, что $b=5{,}5$.

19. а) Велосипедисты сближаются каждый час на 45 км. За t ч они проедут расстояние $45t$ км. Следовательно, до встречи им останется проехать расстояние $s=225-45t$. Чтобы определить, через какое время расстояние между ними составит 45 км, надо решить уравнение

$$225-45t=45.$$

Отсюда $t=4$.

б) Если велосипедисты продолжают движение после встречи, то они удаляются друг от друга со скоростью 45 км/ч. Тогда расстояние между ними через t ч станет равным $s=45t-225$. Чтобы определить, когда это расстояние составит 45 км, надо решить уравнение

$$45t-225=45.$$

Отсюда $t=6$.

Пункт 17. Задание функции несколькими формулами

Методический комментарий

В данном пункте расширяются сведения о функциях, с которыми учащиеся ознакомились при изучении параграфов 5 и 6. Если раньше они встречались только с функциями, заданными одной формулой, то теперь им приходится иметь дело с функциями, заданными несколькими формулами. Так, в примере 1 рассматривается случай, когда зависимость расстояния от дома до места нахождения туриста задаётся с помощью трёх формул, которые кратко можно записать так:

$$s = \begin{cases} 6t, \text{ если } 0 \leqslant t < 1{,}5, \\ 9, \text{ если } 1{,}5 \leqslant t \leqslant 2, \\ 5t - 1, \text{ если } 2 < t \leqslant 3, \end{cases}$$

где t — число часов, прошедших с момента выхода туриста из дома, s — расстояние от дома до места нахождения туриста. Каждому из указанных в этих формулах моментов времени соответствует единственное значение функции, выражающее расстояние от дома до места нахождения туриста.

Важно подчеркнуть, что при задании функции несколькими формулами необходимо правильно указывать соответствующие множества значений аргумента, не допуская случаев, когда одно и то же значение аргумента повторяется дважды.

В примере 2 рассматривается вопрос о построении графика функции, заданной формулой, в записи которой используется знак модуля. Соответствующее умение будет неоднократно использоваться в курсе алгебры.

Пример 3, приведённый в данном пункте, является достаточно сложным для учащихся. Здесь рассматривается случай, когда от словесного описания ситуации надо перейти к заданию функции с помощью нескольких формул. Можно опустить его на этом этапе изучения сведений о функциях, чтобы вернуться к нему позже на этапе заключительного повторения.

Усвоению сведений о формулах, представленных в данном пункте, способствуют включённые в него упражнения **339—347**. Особое внимание следует уделить заданиям **340**, **345—347**, связанным с рассмотрением конкретных физических процессов. В упражнении **340** предлагается задать аналитически описанную зависимость между объёмом воды в баке и временем, в течение которого вода вытекала. В упражнениях **345, 346** рассматриваются функции, описывающие реальную зависимость между величинами с помощью нескольких формул. При выполнении их учащиеся должны предварительно определить, в какой промежуток попадает заданное значение аргумента. В упражнении **347** предлагается перейти от графического способа задания функции к заданию её с помощью формул.

Изучение пункта 17 можно провести в форме занятия математического кружка. На этом занятии один из учащихся может рассказать о разобранном в учебнике примере 1, другой — о примере 2. После этого члены математического кружка могут приступить к выполнению некоторых упражнений из данного пункта.

Указания к упражнениям учебника

339. Из графика видно, что функцию можно задать тремя формулами

$$y=\begin{cases}-x+1, \text{ если } x<0,\\ 1, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, \text{ если } x>1.\end{cases}$$

340. Объём воды, которая может вытечь из бака через кран, равен $0{,}9\cdot 20$, т. е. 18 л. Этот объём вытечет за 9 мин ($18:2=9$). После этого в течение оставшихся 3 мин в баке будет находиться 2 л воды ($20-18=2$). Значит, функцию можно задать формулами

$$V=\begin{cases}20-2x, \text{ если } 0\leqslant x<9,\\ 2, \text{ если } 9\leqslant x\leqslant 12.\end{cases}$$

341. б) График состоит из двух отрезков. Один из них — часть прямой $y=2x$, ограниченная точками с абсциссами -1 и 1, причём только первая точка принадлежит области определения. Другой отрезок — часть прямой $y=3-x$, ограниченная точками с абсциссами 1 и 4.

342. Воспользовавшись определением модуля, предварительно заменяем каждую формулу двумя:

а) $y=\begin{cases}-0{,}25x+1, \text{ если } x<0,\\ 0{,}25x+1, \text{ если } x\geqslant 0;\end{cases}$

б) $y=\begin{cases}-0{,}5x, \text{ если } x<0,\\ 1{,}5x, \text{ если } x\geqslant 0;\end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -x+2, \text{ если } x<0, \\ x-2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

343. Функцию можно задать формулой $y = |x| + 2$.
344. Функцию можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} x+1, \text{ если } -2 \leqslant x < 1, \\ -x+3, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x-3, \text{ если } 3 < x \leqslant 6. \end{cases}$$

345. При $0 \leqslant t < 20$ вода нагревалась от 20 до 100°, при $20 \leqslant t \leqslant 30$ вода кипела, при $30 < t \leqslant 90$ вода остывала.

346. Если $t = 0$, то $s = 0$; если $t = \frac{1}{2}$, то $s = 3$; если $t = 1$, то $s = 5$; если $t = 1{,}5$, то $s = 2{,}5$; если $t = 2$, то $s = 0$.

347. Из графика видно, что функцию можно задать аналитически с помощью трёх формул

$$y = \begin{cases} 60x, \text{ если } 0 \leqslant x < 1{,}5, \\ 90, \text{ если } 1{,}5 \leqslant x \leqslant 2, \\ 90x - 90, \text{ если } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

До остановки автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч, а после остановки — со скоростью 90 км/ч.

Степень с натуральным показателем

§ 7. Степень и её свойства

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
18	Определение степени с натуральным показателем	1(1)
19	Умножение и деление степеней	2(3)
20	Возведение в степень произведения и степени	2(2)

Содержание материала

Определение степени с натуральным показателем. Возведение в степень положительных и отрицательных чисел. Нахождение значения степени с помощью калькулятора. Умножение и деление степеней. Степень с нулевым показателем. Возведение в степень произведения и степени.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы ознакомить учащихся со свойствами степеней с натуральными показателями и выработать умение выполнять умножение и деление степеней, возведение в степень произведения и степени.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь вычислять значения выражений вида a^n, где a — произвольное число, n — натуральное число, устно и письменно, а также с помощью калькулятора, находить значения выражений, содержащих степени с натуральными показателями, формулировать, записывать в символическом виде и обосновывать свойства степеней с натуральными показателями, выполнять умножение и деление степеней с натуральными показателями, возведение в натуральную степень произведения и степени.

Методический комментарий

Материал § 7 «Степень и её свойства» составляет тот фундамент, на котором строится изучение широкого круга тождественных преобразований выражений различного вида. К ним относятся изучаемые в 7 классе преобразования целых выражений, в 8 классе преобразования дробных выражений, квадратных корней и степеней с целыми показателями, в 9 классе — корней n-й степени. В связи с этим изучению материала данного параграфа необходимо уделить особое внимание, добиваясь его усвоения всеми учащимися.

Изучение пункта 18 «Определение степени с натуральным показателем» начинается с введения соответствующего определения, в котором выделяются два случая: случай, когда показатель степени больше 1, и случай, когда он равен 1. Следует обратить внимание учащихся на свойства степени отрицательного числа с чётным и нечётным показателями, на справедливость неравенства $a^2 \geqslant 0$ при любом значении a. Усвоению фундаментальных понятий и свойств, рассмотренных в данном пункте, способствуют упражнения **374—377**. При наличии времени можно дополнить их некоторыми из заданий **511—518**, входящих в раздел «Дополнительные упражнения к главе III». В данном пункте учащиеся ознакомятся с приёмом возведения чисел в степень с натуральным показателем с помощью калькулятора, рассмотренным в примере 3. Этот приём находит применение в упражнениях **378**, **379**.

Специальное внимание в пункте 18 уделяется вычислению значений выражений, содержащих степени. Учащихся следует ознакомить с принятым порядком действий, согласно которому при отсутствии скобок сначала выполняют возведение в степень, затем умножение и деление и, наконец, сложение и вычитание. В конце пункта предлагаются различные упражнения на нахождение значений выражений, в том числе и задания **389**, **390**, где выражения, содержащие степени, надо предварительно составить. В число упражнений, предлагаемых учащимся, включена задача-исследование **394**. Выполнив разложение на простые множители чисел 90 и 15, они должны под руководством учителя высказать свои соображения о значениях a и найти эти значения. Интерес представляет упражнение **395**, где в первых трёх заданиях учащиеся должны степени заменить произведением и подсчитать число множителей в нём, а в последнем задании уже нужно сообразить, что число множителей в произведении $a^{20}a^{12}$ можно определить, не выписывая их. Упражнение **397**, предназначенное для работы в парах, учащиеся должны выполнить, анализируя структуру выражений. Полученные ответы рекомендуется проверить при коллективной работе класса. Упражнения **398** и **399**, а также упражнение **519** из числа дополнительных упражнений к главе III готовят учащихся к чтению формул сокращённого умножения.

В пункте 19 «Умножение и деление степеней» рассматривается свойство степени, выражаемое равенством $a^m a^n = a^{m+n}$. Важно объяснить учащимся, что это свойство называют основным свойством степени, так как из него вытекают правила деления степеней с натуральными показателями и возведения степени в степень. Учащиеся должны знать основное свойство степени и уметь его доказывать. Что касается деления степеней с одинаковыми основаниями, то от учащихся достаточно требовать знания соответствующего правила и умения применять в расчётах и преобразованиях формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$ при любом $a \neq 0$ и произвольных натуральных числах m и n, где $m > n$.

Предлагаемые в данном пункте упражнения **403—412** и примыкающие к ним дополнительные упражнения **531—535** достаточно просты и не вызывают затруднений у учащихся.

В связи с рассмотрением правила деления степеней с одинаковыми основаниями и натуральными показателями вводится понятие степени с нулевым показателем. Необходимо специально подчеркнуть, что выражение 0^0 не имеет смысла. Следует обратить внимание учащихся на то, что после введения понятия степени с нулевым показателем мы можем применить формулу $a^m a^n = a^{m+n}$, где $a \neq 0$, и в том случае, когда один из показателей m или n равен нулю либо оба показателя равны нулю. Формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, можно теперь применять при любых целых неотрицательных значениях показателей m и n, удовлетворяющих условию $m \geqslant n$. Усвоению понятия степени с нулевым показателем способствуют упражнения **420**, **421** и примыкающее к ним дополнительное упражнение **537**.

Данный параграф завершает пункт 20 «Возведение в степень произведения и степени». Выводу представленных здесь правил преобразований выражений предшествует рассмотрение конкретных примеров, на которых прослеживается схема рассуждений. Внимание учащихся следует обратить на то, что при выводе правила возведения в степень произведения используются переместительное и сочетательное свойства умножения, а при выводе правила возведения степени в степень используется основное свойство степени.

Предлагаемые в пункте упражнения **428—433** достаточно просты. Далее следуют задания **434** и **435**, предназначенные для работы в парах. После их выполнения необходимо проверить полученные учащимися ответы и выслушать соответствующие обоснования. Следует обратить внимание на задание **437**, в котором используется представление произведения степеней в виде степени. Включённые в данный пункт упражнения должны выполняться учащимися с большой тщательностью, так как здесь закладывается база для изучения последующих тождественных преобразований выражений разного вида. При наличии времени рекомендуется использовать некоторые задания из дополнительных упражнений к главе. Полезно, в частности, организовать обсуждение в классе ответов на вопросы, поставленные в заданиях **549—551**.

Указания к основным упражнениям учебника

380. Полезно, чтобы учащиеся запомнили значения степеней числа 2 с показателями от 1 до 10 и степеней числа 3 с показателями от 1 до 5.

381. а) Например, $1\frac{24}{25} = \frac{49}{25} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(-\frac{7}{5}\right)^2$.

386. Важно, чтобы при выполнении задания учащиеся обращали внимание на структуру выражения.

б) $\left(9 \cdot \frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} = 56\frac{1}{4}$;

з) $2700 \cdot (-0{,}1)^3 = 2700 \cdot (-0{,}001) = -2{,}7$.

388. Перед выполнением упражнения учащимся следует напомнить принятый порядок действий при вычислении значения числового выражения.

ж) $3^4 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4} = 81 - \frac{4}{25} \cdot \frac{25}{4} = 81 - 1 = 80$.

389. Площадь окна $S = S_1 + S_2$, где S_1 — площадь прямоугольника со сторонами a см и $1{,}5a$ см, а S_2 — площадь полукруга с радиусом $\frac{a}{2}$ см.

$$S_1 = a \cdot 1{,}5a = 1{,}5a^2,\ \ S_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Отсюда $S = 1{,}5a^2 + \frac{\pi a^2}{8}$ (см^2).

394. (*Задача-исследование.*) Разложим на простые множители числа 90 и 15. Получим

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ \ 15 = 3 \cdot 5.$$

Выясним, при каких значениях a число 90 является общим кратным чисел 15 и a. Это возможно тогда, когда число a принимает одно из следующих шести значений: либо $a = 2 \cdot 3$, либо $a = 3^2$, либо $a = 2 \cdot 5$, либо $a = 2 \cdot 3 \cdot 5$, либо $a = 2 \cdot 3^2$, либо $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. В первых четырёх случаях число 90 не является наименьшим общим кратным чисел 15 и a, так как НОК (6, 15) = 30, НОК (9, 15) = 45, НОК (10, 15) = 30, НОК (30, 15) = 30. Следовательно, искомыми совокупностями множителей являются $2 \cdot 3^2$ и $2 \cdot 3^2 \cdot 5$, т. е. $a = 18$ и $a = 90$.

395. г) Так как по определению степени

$$a^{20} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{20\ \text{раз}}, \quad a^{12} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{12\ \text{раз}},$$

то $a^{20} \cdot a^{12} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{32\ \text{раза}} = a^{32}$.

Это упражнение готовит учащихся к пониманию доказательства основного свойства степени.

397. (*Для работы в парах.*) а) При любом значении a верны неравенства

$$a^2 + 1 > 0,\ 3 + (5 - a)^2 > 0,\ a^4 + a^2 + 8 > 0,$$

так как $a^2 \geqslant 0,\ (5 - a)^2 \geqslant 0,\ a^4 + a^2 \geqslant 0$.

б) При любом значении a верны неравенства

$$-a^6 - 4a^8 - 1 < 0,\ -a^8 - 9 < 0,$$

так как $-a^6 - 4a^8 \leqslant 0,\ -a^8 \leqslant 0$.

Полезно обсудить с учащимися, что значения выражений $-a^4$ и $-a - a^3$ равны нулю при $a = 0$, а выражения $-a^2 + 8,\ 3a + 4,\ -7a - 4$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

412. в) Заменяя множитель 2187 на 3^7, а множитель 9 на 3^2, получаем

$$9 \cdot 2187 = 3^2 \cdot 3^7 = 3^9 = 19\,683.$$

г) Заменяя множители степенями числа 3, получаем

$$27 \cdot 243 = 3^3 \cdot 3^5 = 3^8 = 6561.$$

417. г) $\dfrac{\left(1\frac{1}{2}\right)^4}{\left(1\frac{1}{2}\right)^2} = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4};$

д) $\dfrac{\left(-2\frac{1}{3}\right)^6}{\left(-2\frac{1}{3}\right)^3} = \left(-2\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{7}{3}\right)^3 = -\frac{343}{27} = -12\frac{19}{27}.$

420. г) Можно сразу заметить, что $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$, поэтому на значение выражения влияет только значение переменной c.

При $a = \frac{2}{3},\ c = -\frac{1}{3}$ имеем $27a^0c^3 = 27c^3 = 27 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) = -1$.

432. Площадь квадрата со стороной a равна a^2. Если сторона квадрата увеличится в n раз, где n — натуральное число, то площадь его станет равной $(na)^2 = n^2a^2$, т. е. увеличится в n^2 раз.

433. Объём куба с ребром a равен a^3. Если ребро куба увеличится в n раз, где n — натуральное число, то его объём станет равным $(na)^3 = n^3a^3$, т. е. увеличится в n^3 раз.

434. (*Для работы в парах.*) Площадь поверхности куба с ребром a равна $6a^2$. Если ребро куба равно $3a$, то площадь его поверхности равна $6 \cdot (3a)^2 = 54a^2$, что в 9 раз больше площади поверхности первоначального куба. Следовательно, на покраску нового куба потребуется $40 \cdot 9 = 360$ г краски. Значит, 1 кг краски хватит на покраску нового куба.

435. (*Для работы в парах.*) Объём куба с ребром a равен a^3. Если ребро куба увеличить в 2 раза, то его объём увеличится в 2^3 раз, т. е. в 8 раз. Следовательно, чтобы его наполнить водой, потребуется $40 \cdot 8$ мин, или 5 ч 20 мин. Значит, за 5 ч наполнить этот бассейн не успеют.

437. Воспользуемся равенством $a^nb^n = (ab)^n$.

б) $4^3 \cdot 25^3 = (4 \cdot 25)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot 1{,}5^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^7 = 1^7 = 1$;

е) $0{,}2^6 \cdot 50^7 = \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot 5^7 \cdot 10^7 = \left(\frac{1}{5} \cdot 5\right)^6 \cdot 5 \cdot 10^7 = 50000000$.

444. Воспользуемся равенством $a^{mn} = (a^m)^n$.

а) $2^{60} = (2^2)^{30} = 4^{30}$; в) $2^{60} = (2^4)^{15} = 16^{15}$.

450. г) $\frac{3^7 \cdot 27}{(3^4)^3} = \frac{3^7 \cdot 3^3}{3^{12}} = \frac{3^{10}}{3^{12}} = \frac{1}{3^{12-10}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

512. Следует обратить внимание учащихся, что число 26^7 оканчивается цифрой 6, число 15^5 — цифрой 5, число 11^9 — цифрой 1. Следовательно, число, равное $26^7 + 15^5 - 11^9$, оканчивается цифрой 0, т. е. кратно 10.

515. В этом задании ответ находится подбором.

а) $6 = 2^2 + 2$; б) $18 = 2^4 + 2$; в) $42 = 2^5 + 2^3 + 2$.

524. а) $10^n - 1 = \underbrace{99\ \ldots\ 9}_{n \text{ раз}}$. Это число кратно 9;

б) число $10^n + 8$ при любом натуральном n кратно 9, так как сумма его цифр равна 9;

в) число $10^n - 4$ имеет вид $1\underbrace{00\ \ldots\ 0}_{n \text{ раз}} - 4 = 99\ldots96$, где цифра 9 повторяется $(n - 1)$ раз. Сумма цифр этого числа делится на 3, следовательно, число $10^n - 4$ кратно 3.

529. Уравнение не имеет отрицательных корней, так как при любом отрицательном значении x каждое из выражений x^6, $-x^5$, x^4, $-x^3$, x^2, $-x$ является положительным числом.

536. б) $10^{n+1} : 10^{n-1} = 10^{n+1-(n-1)} = 10^2 = 100$. Необходимо подчеркнуть, что n – натуральное число.

537. а) $(217 - 43{,}07 \cdot 5)^0 + 5 \cdot \frac{1}{3} = 1 + 1\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Следует отметить, что значение выражения $217 - 43{,}07 \cdot 5$ не равно нулю, поэтому выражение $(217 - 43{,}07 \cdot 5)^0$ имеет смысл.

542. В данном упражнении выполняются преобразования, позволяющие применить равенство $a^m b^m = (ab)^m$, где $m \in \boldsymbol{N}$.

д) $0{,}2^6 \cdot 25^3 = (0{,}2^2)^3 \cdot 25^3 = (0{,}04 \cdot 25)^3 = 1^3 = 1$;

е) $\left(\frac{1}{9}\right)^6 \cdot 81^4 = \left(\frac{1}{9}\right)^6 \cdot 9^8 = \left(\frac{1}{9} \cdot 9\right)^6 \cdot 9^2 = 1^6 \cdot 9^2 = 81$.

543. а) $10^7 < 2^8 \cdot 5^7$, так как $2^8 \cdot 5^7 = (2^7 \cdot 5^7) \cdot 2 = 10^7 \cdot 2$;

б) $6^{12} > 2^{13} \cdot 3^{11}$, так как $6^{12} = 6^{11} \cdot 6$, а

$$2^{13} \cdot 3^{11} = (2^{11} \cdot 3^{11}) \cdot 2^2 = 6^{11} \cdot 4.$$

544. Внимание учащихся следует обращать на структуру выражения.

б) $(-3^2)^3 = -3^6$; г) $-(-3^2)^3 = -(-3^6) = 3^6$.

546. в) Из равенства $p^3c^8 = c^{20}$ получаем, что $p^3 = c^{12}$, т. е. $p^3 = (c^4)^3$. Значит, $p = c^4$;

г) из равенства $y^{15} = p^3$ получаем, что $(y^5)^3 = p^3$, т. е. $p = y^5$.

547. Для того чтобы частное представить в виде степени, надо делимое и делитель представить в виде степеней с одинаковыми основаниями.

в) $8^5 \cdot 16^{13} = (2^3)^5 \cdot (2^4)^{13} = 2^{15} \cdot 2^{52} = 2^{67}$.

549. а) Двумя способами: $(2^3)^5$ и $(2^5)^3$;

б) тремя способами: $(2^3)^2$, $(2^2)^3$, $(-2^3)^2$.

550. а) Каждое из чисел равно нулю;

б) каждое из чисел равно нулю, или они являются противоположными числами.

551. Числа a и a^n, где a и n — натуральные числа, оканчиваются одинаковыми цифрами, если число a оканчивается цифрой 1, 5 или 6.

552. а) $3^{4k} = (3^4)^k = 81^k$, а число 81^k оканчивается единицей;

б) $10^k - 1 = \underbrace{99\ \ldots\ 9}_{k \text{ раз}}$, сумма цифр этого числа делится на 3, следовательно, число $10^k - 1$ кратно 3.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 16

17. Искомый ряд чисел: $3,\ 3^3,\ 333,\ 33^3,\ 3^{33}$. Следует объяснить, почему $33^3 < 3^{33}$.

$$33^3 = 3^3 \cdot 11^3,\ \text{а}\ 3^{33} = (3^3)^{11} = 3^3 \cdot (3^3)^{10} = 3^3 \cdot 27^{10}.$$

Так как $11^3 < 27^3$, то $11^3 < 27^{10}$, и, следовательно, $33^3 < 3^{33}$.

18. а) Число $16^7 + 15^3 - 21^4$ оканчивается нулём, так как 16^7 оканчивается цифрой 6, 15^3 — цифрой 5, а 21^4 — единицей.

19. а) Утверждение верно, так как значение выражения $16^7 + 15^3 - 21^4$ оканчивается нулём;

б) утверждение верно, так как значение выражения $46^3 - 51^2 + 25^5$ оканчивается нулём.

Пункт 17

11. а) $0{,}9^{n+1} : 0{,}9^{n-1} = 0{,}9^{n+1-(n-1)} = 0{,}9^2 = 0{,}81$;

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{n+3} : \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{n+3-(n+1)} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$;

в) $\left(-\frac{1}{201}\right)^{2n} : \left(-\frac{1}{201}\right)^{2n-1} = \left(-\frac{1}{201}\right)^{2n-(2n-1)} = \left(-\frac{1}{201}\right)^1 = -\frac{1}{201}$.

12. в) $3^{n+3} \cdot \frac{1}{9} = 3^n \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{9} = 3^n \cdot \frac{27}{9} = 729 \cdot 3 = 2187$;

г) $3^{n+4} : 81 = 3^n \cdot 3^4 : 3^4 = 729$.

15. в) $2^{n+1} \cdot (-1)^7 = 2^n \cdot 2 \cdot (-1) = -2a$;

г) $2^{n+2} - 9a = 2^n \cdot 2^2 - 9a = 4a - 9a = -5a$.

Пункт 18

6. Для выполнения задания требуется преобразовать данные выражения.

в) $-1{,}7a^8 = -1{,}7(a^2)^4 = -1{,}7(5p)^4 = -1{,}7 \cdot 625p^4 = -1062{,}5p^4$;

г) $0{,}08a^6 = 0{,}08 \cdot (a^2)^3 = 0{,}08(5p)^3 = 0{,}08 \cdot 125p^3 = 10p^3$.

13. а) $3^8 + 25 = (3^4)^2 + 25 = 81^2 + 25$.

Число 81^2 оканчивается цифрой 1, следовательно, значение выражения $3^8 + 25$ оканчивается цифрой 6;

б) $9^{12} - 1 = (9^2)^6 - 1 = 81^6 - 1$. Значение этого выражения оканчивается нулём;

в) значение выражения $6^{15} + 7$ оканчивается цифрой 3, так как 6^{15} оканчивается цифрой 6.

14. а) Значение выражения $41^4 \cdot 35^5 - 2^2$ оканчивается цифрой 1, значит, оно не делится на 10. Следовательно, значение исходного выражения не является целым числом.

§ 8. Одночлены

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
21	Одночлен и его стандартный вид	1(1)
22	Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень	2(3)
23	Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики	2(2)
	Контрольная работа № 4	1

Содержание материала

Одночлен, стандартный вид одночлена. Коэффициент и степень одночлена. Умножение одночленов, возведение одночлена в степень. Функции $y = x^2$ и $y = x^3$, их графики. Примеры графического решения уравнений вида $x^2 = kx + b$, $x^3 = kx + b$.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы ввести понятия одночлена и его стандартного вида, коэффициента и степени одночлена, а также ознакомить учащихся со свойствами и графиками функций $y = x^2$, $y = x^3$ и графическим способом решения уравнений вида $x^2 = kx + b$, $x^3 = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь приводить одночлен к стандартному виду, указывать его коэффициент и степень, выполнять умножение одночленов и возведение одночленов в степень. Формируются также умения учащихся строить графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$, решать графическим способом уравнения вида $x^2 = kx + b$, $x^3 = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

Методический комментарий

В данной теме закладывается фундамент для последующего изучения преобразований алгебраических выражений различного вида. В связи с этим необходимо добиваться усвоения всеми учащимися вводимых здесь понятий и алгоритмов действий с одночленами. Содержание понятий «одночлен», «стандартный вид одночлена», «коэффициент одночлена» и «степень одночлена» разъясняется на примерах в пункте 21 «Одночлен и его стандартный вид». При введении понятия «коэффициент одночлена» необходимо обратить внимание учащихся на то, что коэффициент одночлена можно указать только после приведения этого одночлена к стандартному виду. Специально следует остановиться на случаях, когда коэффициент одночлена равен 1 или -1. Это позволит избежать распространённых ошибок учащихся, склонных утверждать, что у одночленов вида a^3b, $-a^6b^4$ коэффициентов нет. При изучении данного пункта учащиеся знакомятся с понятием «степень одночлена». Необходимо обратить их внимание на то, что степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Например, выражение $2^5x^3y^6$ является одночленом девятой степени, так как сумма $3 + 6$ равна 9, а выражение $4^7 \cdot 5^4$ является одночленом нулевой степени, так как в произведении $4^7 \cdot 5^4$ переменные отсутствуют или, иначе говоря, входят в это произведение в нулевой степени. Следует подчеркнуть, что число 0 является одночленом, степень которого не определена.

Некоторые упражнения, включённые в пункт 21, учащиеся могут выполнять устно, например **455**, **456**, **461—463**, к которым естественно примыкает упражнение **553** из числа дополнительных упражнений к главе. Полезно также рассмотреть в классе упражнение **555** с нестандартной формулировкой задания.

В пункте 22 «Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень» наряду с заданиями на умножение одночленов учащимся предлагаются задания на представление одночлена в виде произведения одночленов **(470, 471).** Соответствующее умение используется в дальнейшем при разложении многочленов на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки. Аналогично задания на возведение одночленов в степень дополняются заданиями на представление одночленов в виде квадрата или куба, готовящими учащихся к применению формул сокращённого умножения для разложения на множители разности квадратов, а также разности или суммы кубов двух выражений. При наличии времени можно наряду с основными упражнениями пункта использовать дополнительные упражнения **556—561**.

Материал пункта 23 «Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики» позволяет вернуться к таким важным понятиям, как «функция», «аргумент», «график функции». Учащиеся должны усвоить рассмотренные в учебнике свойства функций $y = x^2$ и $y = x^3$, чётко представлять, как выглядят их графики. Следует обратить внимание учащихся на то, что при значениях x, близких к нулю, значения этих функций также близки к нулю и поэтому вблизи начала координат их графики почти сливаются с осью x. Знание этого факта позволит избежать распространённой ошибки учащихся, когда график функции $y = x^2$ изображается заострённым внизу.

Учащимся предлагаются различные упражнения на работу с графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$. В их число входят задания **484—486**, **488**, **489**. Важно предупредить учащихся, что недопустимо построение в учебнике каких-либо линий. Ответы на поставленные вопросы они должны находить, прикладывая линейку.

Систему упражнений в пункте рекомендуется дополнить упражнением **562**. Здесь важно обратить внимание учащихся на взаимное расположение графиков функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и при $x > 1$, используя для этого приведённый в учебнике рисунок.

При изучении пункта 23 учащиеся получают первое представление о графическом методе решения уравнений с одной переменной. После рассмотрения примеров 1 и 2, разобранных в тексте учебника, им можно предложить выполнить некоторые из упражнений **494**, **496**, **566**. Специальное внимание следует уделить упражнениям **493**, **495**, предназначенным для работы в парах. Результаты их выполнения следует обсудить в классе. Необходимо разъяснить учащимся, что при графическом способе решения уравнений мы обычно находим приближённые значения корней, хотя значение какого-то конкретного корня может оказаться точным.

Для проверки усвоения материала главы III рекомендуется использовать помещённые в конце этой главы «Контрольные вопросы и задания».

Указания к основным упражнениям учебника

471. Например: а) $-12x^4y^3 = (-6x^2y) \cdot 2x^2y^2 = 4xy^2 \cdot (-3x^3y)$;
б) $-12x^4y^3 = (-2x^2y) \cdot 3x^2y \cdot 2y = 6xy^2 \cdot (-2xy) \cdot x^2$.

Задания **475—479** готовят учащихся к применению в дальнейшем формул разности квадратов и разности кубов.

475. б) $121a^6 = (11a^3)^2 = (-11a^3)^2$;
в) $0{,}09y^{12} = (0{,}3y^6)^2 = (-0{,}3y^6)^2$.

Следует обратить внимание учащихся, что в каждом случае получается по два ответа.

477. б) $-a^3b^6 = (-ab^2)^3$; $-27x^6b^9 = (-3x^2b^3)^3$.

479. а) $x^6y^{12} = (x^3y^6)^2 = (x^2y^4)^3$.

484. Замечание. В заданиях на чтение графиков функций возможны незначительные (на 0,1—0,2) расхождения в ответах учащихся.

487. в) Точка $C(4;\ -2)$ не принадлежит графику функции $y = x^2$, так как $4^2 \neq -2$;

г) точка $D(1{,}2;\ 1{,}44)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, так как $1{,}2^2 = 1{,}44$.

490. Точки $A(-0{,}2;\ -0{,}008)$ и $B\left(1\frac{1}{2};\ 3\frac{3}{8}\right)$ принадлежат графику функции $y = x^3$, так как $(-0{,}2)^3 = -0{,}008$ и $\left(1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$. Точка $C\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{27}\right)$ не принадлежит этому графику. Это можно определить сразу, так как из формулы $y = x^3$ ясно, что отрицательным значениям аргумента соответствуют отрицательные значения функции.

493. (*Для работы в парах*.) Важно обратить внимание учащихся, что число корней уравнения $x^2 = a$ зависит от взаимного расположения параболы $y = x^2$ и прямой $x = a$. При $a > 0$ уравнение имеет два корня, при $a = 0$ — один корень, при $a < 0$ не имеет корней.

495. (*Для работы в парах*.) Особенность графика функции $y = x^3$ состоит в том, что любая прямая $x = a$ пересекает его в одной точке. Поэтому можно сделать вывод, что уравнение $x^3 = a$ имеет единственный корень при любом значении a.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

553. е) Следует ещё раз напомнить учащимся, что любое отличное от нуля число является одночленом нулевой степени.

556. а) $100x^5y^3 = 20x^4y \cdot 5xy^2$; б) $-30x^4y^5 = 20x^4y \cdot (-1{,}5y^4)$;

в) $-4x^{16}y = 20x^4y \cdot (-0{,}2x^{12})$; г) $x^{10}y^2 = 20x^4y \cdot (0{,}05x^6y)$.

559. В заданиях «а» и «б» показаны все возможные способы представления произведения одночленов в виде степени одночлена, в заданиях «в» и «г» этот способ единственный.

а) $27a^2b^5 \cdot 3a^{10}b^3 = 81a^{12}b^8 = (9a^6b^4)^2 = (-9a^6b^4)^2 = (3a^3b^2)^4 = (-3a^3b^2)^4$;

б) $-64a^8x^{11} \cdot (-0{,}25a^2x^9) = 16a^{10}x^{20} = (4a^5x^{10})^2 = (-4a^5x^{10})^2$;

в) $0{,}01b^5c^3 \cdot (-0{,}1bc^6) = -0{,}001b^6c^9 = (-0{,}1b^2c^3)^3$;

г) $-\frac{9}{16}p^9q^{14} \cdot \frac{3}{4}p^3q^4 = -\frac{27}{64}p^{12}q^{18} = \left(-\frac{3}{4}p^4q^6\right)^3$.

560. г) $\left(\frac{1}{3}a^2b\right)^3 \cdot (9ab^2)^2 = \frac{1}{27}a^6b^3 \cdot 81a^2b^4 = 3a^8b^7$;

д) $(-5a^3b)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}ab^3\right)^3 = 25a^6b^2 \cdot \frac{1}{125}a^3b^9 = \frac{1}{5}a^9b^{11}$.

563. а) Значение b находим из условия $b = (-4)^2$. Значит, $b = 16$. Точка $Q(4;\ b)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, так как $4^2 = 16$.

564. а) По смыслу задачи $a \neq 0$, $b \neq 0$. Так как точка $A(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, то симметричная ей относительно оси y точка $B(-a;\ b)$ также принадлежит этому графику. Точки $C(a;\ -b)$ и $D(-a;\ -b)$ не принадлежат графику функции $y = x^2$, так как точка C симметрична точке A относительно оси x, а точка D симметрична точке B относительно оси x.

б) Так как точка $A(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = x^3$, то и симметричная ей относительно начала координат точка $D(-a;\ -b)$ принадлежит этому графику. Точки $B(-a;\ b)$ и $C(a;\ -b)$ не принадлежат графику функции $y = x^3$, так как точка B симметрична точке A относительно оси y, а точка C симметрична точке A относительно оси x.

565. При решении этой задачи удобно использовать графические представления. Можно обратиться к рисунку 66 учебника.

а) Если $0 < a < 1$, то $a^3 < a^2 < a$;

б) если $a > 1$, то $a^3 > a^2 > a$;

в) если $-1 < a < 0$, то $a < a^3 < a^2$;

г) если $a < -1$, то $a^3 < a < a^2$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 19

12. Следует сразу заметить, что наименьшим является значение одночлена a^5b^3, так как при $a < 0$, $b > 0$ это значение отрицательное, а значения остальных одночленов положительные. При $a = -0{,}5$ имеем $a^4 > a^6$. Значит, $a^4b^4 > a^6b^4$. Итак, искомый порядок расположения одночленов: a^5b^3, a^6b^4, a^4b^4.

13. а) Верно, так как при $a > 0$, $b > 0$ $a^5b^8 > 0$ и $(-1)^7a^5b^8 < 0$;

б) неверно, так как при $a < 0$, $b < 0$ $a^5 < 0$, а $b^8 > 0$, следовательно, $(-1)^7a^5b^8 > 0$.

14. В этом задании требуется представить число 6 в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых чётное. Получим два ответа: $7{,}16a^2b^4$ при $m = 1$, $n = 4$ и $7{,}16a^4b^2$ при $m = 2$, $n = 2$.

Пункт 20

9. б) $-1\frac{1}{3}x^4y \cdot 0{,}75xy^9 = -1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}x^5y^{10} = -x^5y^{10}$;

в) $\frac{2}{9}ac^3 \cdot (-0{,}18ac^2) = -\left(\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{50}\right)a^2c^5 = -\frac{1}{25}a^2c^5$.

12. Например: а) $75a^9b^8 = (5a^4b^4)^2 \cdot 3a$;

б) $75a^9b^8 = (a^3b^2)^3 \cdot 75b^2$.

14. б) Если n — чётное число, то

$$-a^4b^{2n+1}(-ab^2)^n = -a^4b^{2n+1} \cdot a^nb^{2n} = -a^{n+4}b^{4n+1};$$

если n — нечётное число, то

$$-a^4b^{2n+1}(-ab^2)^n = -a^4b^{2n+1} \cdot (-a^nb^{2n}) = a^{n+4}b^{4n+1}.$$

15. б) Данное выражение нельзя представить в виде одночлена, так как степень каждой переменной в знаменателе дроби выше степени этой переменной в числителе.

16. в) Если n — чётное число, то

$$-a^9b^{2n+4} \cdot (-a^2b^3)^n = -a^9b^{2n+4}a^{2n}b^{3n} = -a^{2n+9}b^{5n+4};$$

если n — нечётное число, то

$$-a^9b^{2n+4} \cdot (-a^2b^3)^n = -a^9b^{2n+4} \cdot (-a^{2n}b^{3n}) = a^{2n+9}b^{5n+4}.$$

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 24. О простых и составных числах

Методический комментарий

В начале изучения данного пункта полезно напомнить учащимся определения простого и составного чисел. Необходимо подчеркнуть, что число 1 не является ни простым, ни составным. Можно предложить учащимся рассмотреть приведённую в учебнике последовательность простых чисел, входящих в первую сотню натуральных чисел, и подсчитать число простых чисел, входящих в первый десяток, второй и т. д. Учащиеся легко установят, что никаких закономерностей здесь не наблюдается.

Необходимо специально остановиться на вопросе о том, является ли конечным или бесконечным множество простых чисел. Учащихся, безусловно, привлечёт своей простотой и убедительностью предложенный Евклидом способ доказательства бесконечности множества простых чисел. Здесь они впервые встречаются с применением метода рассуждений от противного при доказательстве, проводимом на алгебраическом материале.

Ценным в образовательном плане является рассмотрение вопроса об использовании разложения натуральных чисел на простые множители при нахождении наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. С соответствующими заданиями учащиеся встретятся в системе упражнений. Рекомендуется специально остановиться на приведённом в тексте учебника примере, связанном с понятием наименьшего общего кратного. Использованный здесь способ решения поставленной задачи демонстрирует учащимся возможность применения логических рассуждений и обоснований.

В целом ознакомление учащихся с материалом данного пункта создаёт благоприятные условия для дальнейших их шагов в достижении личностных, метапредметных и предметных результатов обучения.

Материал, включённый в данный пункт, является доступным для большинства семиклассников. В связи с этим его изучение можно провести в форме занятия со всеми учащимися класса. Желательно, чтобы двое учащихся подготовили для класса соответствующие сообщения — одно о бесконечности множества простых чисел и способе доказательства этого факта Евклидом, другое — об использовании разложения натуральных чисел при нахождении их наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. После этого учащиеся могут приступить к выполнению некоторых из упражнений **505—510**. Специальное внимание следует уделить усложнённому заданию **509**. Можно предложить кому-нибудь из учащихся, интересующихся математикой, подготовить сообщение о способе решения данной задачи.

Ознакомление с материалом пункта 24, безусловно, является полезным для интеллектуального развития учащихся.

Указания к упражнениям учебника

500. Подставляя последовательно вместо a числа 0, 1, 2, 3, ..., находим, что наименьшее натуральное значение a, при котором значение выражения $a^2 + a + 17$ является составным числом, равно 17.

501. а) Так как число 15^9 оканчивается цифрой 5, а число 31^3 — цифрой 1, то их сумма оканчивается цифрой 6, т. е. является составным числом (по крайней мере, делится на 2).

502. Так как $99 = 9 \cdot 11$, $98 = 49 \cdot 2$, 97 — простое число, $96 = 48 \cdot 2$, $95 = 19 \cdot 5$, то искомым числом является число 95.

503. Подбором находим, что $p = 7$.

504. а) Так как $2 + 4 + 8 + 16 = 30$, то сумма делится на 2, 3, 5, других простых делителей нет.

б) Так как $5 + 25 + 125 + 625 = 780$, то сумма делится на 2, 3, 5, 13, других простых делителей нет.

505. Имеем $5082 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11^2$, $7605 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13^2$.

506. Представляя каждый множитель в виде произведения степеней простых чисел, получаем, что

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

507. Предварительно представим каждое из заданных чисел в виде произведения степеней простых чисел:

а) $765 = 3^2 \cdot 5 \cdot 17$, $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

НОД$(765, 315) = 3^2 \cdot 5 = 45$;

б) $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$, $1936 = 2^4 \cdot 11^2$.

НОД$(792, 1936) = 2^3 \cdot 11 = 88$.

Полезно ознакомить учащихся со способом проверки: разделив каждое число на найденный наибольший общий делитель, мы должны получить взаимно простые числа, т. е. числа, не имеющие общих делителей.

508. Предварительно представим каждое из данных чисел в виде произведения степеней простых чисел:

а) $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$, $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$.

НОК$(294, 756) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 = 5292$;

б) $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$, $1617 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11$.

НОК$(693, 1617) = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = 4851$.

509. По условию задачи мы имеем две последовательности:

$$6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \ldots,\ 198;$$
$$8,\ 16,\ 24,\ 32,\ \ldots,\ 192,\ 200.$$

Каждый член первой последовательности равен $6k$, а второй — $8p$, где $k \in \boldsymbol{N}$, $p \in \boldsymbol{N}$. По условию надо найти такие значения k и p, при которых $6k = 8p$, т. е. $k = \frac{4}{3}p$.

Отсюда следует, что p — число, кратное 3. Найдём все значения p, удовлетворяющие условию $8p \leqslant 200$ и p кратно 3. Получим, что p может быть равно 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. Значит, имеется 8 одинаковых чисел в данных последовательностях: 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192.

510. а) Значение выражения 45^5 оканчивается цифрой 5, а выражения 31^4 — цифрой 1. Поэтому значение выражения $45^5 - 31^4$ оканчивается цифрой 4.

б) Значения выражений 37^2, 21^6 и 45^4 оканчиваются соответственно цифрами 9, 1 и 5. Следовательно, значение выражения $37^2 + 21^6 + 45^4$ оканчивается цифрой 5.

ГЛАВА IV

Многочлены

§ 9. Сумма и разность многочленов

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
25	Многочлен и его стандартный вид	1(2)
26	Сложение и вычитание многочленов	3(3)

Содержание материала

Многочлен, стандартный вид многочлена. Подобные члены многочлена, приведение подобных членов. Степень многочлена стандартного вида. Степень произвольного многочлена. Сложение и вычитание многочленов.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы ознакомить учащихся с понятиями «многочлен», «стандартный вид многочлена», «степень многочлена» и сформировать умение выполнять сложение и вычитание многочленов.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь указывать члены многочлена, выделять подобные члены многочлена, выполнять приведение подобных членов, представлять произвольный многочлен в стандартном виде, определять степень многочлена стандартного вида и степень произвольного многочлена. Формируются также умения учащихся выполнять сложение и вычитание многочленов, представлять многочлен в виде суммы или разности многочленов, включая случай, когда одно из слагаемых, а также уменьшаемое или вычитаемое является одночленом, применять указанные преобразования для упрощения выражений, доказательства тождеств, решения уравнений.

Методический комментарий

Тема «Многочлены» играет основополагающую роль в формировании умения выполнять тождественные преобразования алгебраических выражений различного вида. Без её усвоения невозможно успешное изучение преобразований целых выражений, действий с рациональными дробями, квадратными корнями и корнями n-й степени, степенями с целыми и дробными показателями. В связи с этим важно добиваться усвоения представленного в данной главе материала всеми учащимися.

В пункте 25 «Многочлен и его стандартный вид» вводятся такие важные понятия, как «многочлен», «подобные члены многочлена», «стандартный вид многочлена», «степень многочлена стандартного вида и произвольного многочлена». Многочлен определяется как сумма одночленов. Важно подчеркнуть, что речь здесь идёт об алгебраической сумме, например, многочлен $3x^2 - 2xy + 4y$ является суммой одночленов $3x^2$, $-2xy$, $4y$. Учащиеся должны уметь перечислять члены многочлена, свободно пользоваться терминами «двучлен», «трёхчлен». Специальное внимание следует уделить понятию стандартного вида многочлена и соответствующим упражнениям **570**, **571**. К ним примыкают упражнения **572** и **573**, в которых при нахождении значения многочлена учащиеся должны предварительно представить этот многочлен в стандартном виде. Усвоению понятия степени многочлена способствуют упражнения **579** и **580**. Важно обратить внимание учащихся на то, что в упражнении **579** мы имеем дело с многочленами, записанными в стандартном виде. Специальное внимание следует уделить упражнению **581**, представляющему задачу-исследование, рассчитанную на коллективное обсуждение в классе хода её решения. На подобных упражнениях формируется умение учащихся обосновывать свои ответы.

Завершает данный параграф пункт 26 «Сложение и вычитание многочленов». В нём объясняется, что каждое из этих действий над многочленами сводится к раскрытию скобок, перед которыми стоит знак «плюс» или «минус», и приведению подобных членов полученного многочлена. Следует напомнить учащимся, что с правилами выполнения этих преобразований они уже познакомились при изучении пункта 5 «Тождества. Тождественные преобразования выражений». Для слабых учащихся, вероятно, будет полезно записать в тетрадях соответствующие правила сложения и вычитания многочленов: «Чтобы сложить два многочлена, достаточно к членам первого многочлена приписать члены второго, сохранив их знаки, и выполнить приведение подобных членов; чтобы выполнить вычитание из одного многочлена другого, достаточно к членам первого многочлена приписать члены второго, изменив их знаки на противоположные, и выполнить приведение подобных членов».

Упражнения, представленные в пункте 26, можно разбить на две группы. Первую из них составляют задания **585—604** на непосредственное применение правил сложения и вычитания многочленов. При выполнении этих упражнений следует предостеречь учащихся от распространённой ошибки, когда при раскрытии скобок, перед которыми стоит знак «минус», они забывают о необходимости изменить знак каждого члена вычитаемого многочлена. Специальное внимание следует уделить упражнению **600**, предназначенному для работы в парах. После выполнения этого упражнения рекомендуется обсудить с учащимися, какое предположение об ожидаемом ответе они высказали и подтвердилось ли это предположение.

Вторую группу составляют упражнения **605—611**, в которых предлагаются различные задания на применение изученных правил сложения и вычитания многочленов, а также на представление некоторого многочлена в виде суммы или разности многочленов. Рекомендуется обсудить с учащимися результат выполнения предназначенного для работы в парах задания **610**, в частности, выяснить, какое предположение о сумме пяти последовательных натуральных чисел они высказали и верно ли это предположение.

Специальное внимание следует уделить упражнению **611**. В этом упражнении представлена задача-исследование, в которой изученные в данном параграфе преобразования используются для обоснования предложенного Магницким способа отгадывания задуманного числа. Задания такого рода позволяют расширить круг учащихся, интересующихся математикой.

Блок заданий развивающего характера (**734, 744, 747—750**) включён в раздел «Дополнительные упражнения к главе IV». Их можно использовать для индивидуальной работы с хорошо успевающими учащимися, а также на внеклассных занятиях.

Указания к основным упражнениям учебника

570. Каждый член многочлена предварительно приводим к стандартному виду.

в) $3xx^4 + 3xx^3 - 5x^2x^3 - 5x^2x = 3x^5 + 3x^4 - 5x^5 - 5x^3 = -2x^5 + 3x^4 - 5x^3$;

г) $3a \cdot 4b^2 - 0{,}8b \cdot 4b^2 - 2ab \cdot 3b + b \cdot 3b^2 - 1 = 12ab^2 - 3{,}2b^3 - 6ab^2 + 3b^3 - 1 = 6ab^2 - 0{,}2b^3 - 1$.

572. Предварительно следует представить многочлен в стандартном виде.

а) $5x^6 - 3x^2 + 7 - 2x^6 - 3x^6 + 4x^2 = x^2 + 7$.

Если $x = -10$, то $x^2 + 7 = 107$.

б) $4a^2b - ab^2 - 3a^2b + ab^2 - ab + 6 = a^2b - ab + 6$.

Если $a = -3$, $b = 2$, то $a^2b - ab + 6 = (-3)^2 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 + 6 = 30$.

574. Значения x, при котором значение многочлена $2x^2 + 1$ равно нулю или отрицательно, не существует.

581. (*Задача-исследование.*) Число $\overline{abbb}$ в десятичной системе счисления имеет вид $1000a + 100b + 10b + b$. Составим разность $\overline{abbb} - a$ и преобразуем её:

$$1000a + 100b + 10b + b - a = 999a + 111b = 111(9a + b).$$

Произведение $111(9a + b)$ делится на 37, так как множитель 111 делится на 37.

591. а) Два последовательных нечётных числа имеют вид $2n + 1$ и $2n + 3$. Их сумма равна $(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4$. Сумма кратна 4, так как каждое слагаемое кратно 4.

б) $(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 7) = 8n + 16$. Сумма кратна 8, так как каждое слагаемое кратно 8.

594. Обозначим искомый многочлен через M.

в) $M + (5x^2 - 3x - 9) = 2x - 3$;

$M = 2x - 3 - (5x^2 - 3x - 9) = 2x - 3 - 5x^2 + 3x + 9 = -5x^2 + 5x + 6$;

г) $M + (5x^2 - 3x - 9) = x^2 - 5x + 6$;

$M = x^2 - 5x + 6 - (5x^2 - 3x - 9) = x^2 - 5x + 6 - 5x^2 + 3x + 9 = -4x^2 - 2x + 15$.

597. б) Предварительно следует преобразовать разность многочленов в многочлен стандартного вида:

$$(5{,}7a^2b - 3{,}1ab + 8b^3) - (6{,}9ab - 2{,}3a^2b + 8b^3) =$$
$$= 5{,}7a^2b - 3{,}1ab + 8b^3 - 6{,}9ab + 2{,}3a^2b - 8b^3 = 8a^2b - 10ab.$$

Если $a = -2$, $b = 3$, то $8a^2b - 10ab = 8 \cdot (-2)^2 \cdot 3 - 10 \cdot (-2) \cdot 3 = 96 + 60 = 156$.

599. $(0{,}7x^4 + 0{,}2x^2 - 5) - (-0{,}3x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 8) = 0{,}7x^4 + 0{,}2x^2 - 5 + 0{,}3x^4 - \frac{1}{5}x^2 + 8 = x^4 + 3$. Значение многочлена $x^4 + 3$ положительно при любом значении x.

600. (*Для работы в парах.*) Ученик окажется прав, если после преобразований получится многочлен, содержащий переменную b. Выполним преобразования:

$(7a^3 - 6a^2b + 5ab^2) + (5a^3 + 7a^2b + 3ab^2) - (10a^3 + a^2b + 8ab^2) = 7a^3 - 6a^2b + 5ab^2 + 5a^3 + 7a^2b + 3ab^2 - 10a^3 - a^2b - 8ab^2 = 2a^3$.

Ученик не прав, так как в результате преобразований получилось выражение, не содержащее переменную b.

601. Обозначим искомый двучлен через M.

а) $(x^2 + y^2 - 2xy + 1) + M = y^2 + 1$;

$M = y^2 + 1 - (x^2 + y^2 - 2xy + 1) = y^2 + 1 - x^2 - y^2 + 2xy - 1 = -x^2 + 2xy$.

603. а) $1{,}7 - 10b^2 - (1 - 3b^2) + (2{,}3 + 7b^2) = 1{,}7 - 10b^2 - 1 + 3b^2 + 2{,}3 + 7b^2 = 3$;

б) $1 - b^2 - (3b - 2b^2) + (1 + 3b - b^2) = 1 - b^2 - 3b + 2b^2 + 1 + 3b - b^2 = 2$.

605. д) $3{,}8 - 1{,}5y + (4{,}5y - 0{,}8) = 2{,}4y + 3$;

$3{,}8 - 1{,}5y + 4{,}5y - 0{,}8 = 2{,}4y + 3$; $4{,}5y - 1{,}5y - 2{,}4y = 3 - 3{,}8 + 0{,}8$; $0{,}6y = 0$; $y = 0$.

609. а) $n^3 + 31n = (n^3 + n) + 30n$. Каждое слагаемое кратно 30, следовательно, и сумма кратна 30;

б) $n^3 - 29n = (n^3 + n) - 30n$. Уменьшаемое и вычитаемое кратны 30, следовательно, и разность кратна 30.

610. (*Для работы в парах.*) Обозначим наименьшее из чисел через n. Тогда:

а) $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$. Каждое слагаемое кратно 3, следовательно, и сумма кратна 3;

б) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$. Первое слагаемое делится на 4, а второе не делится, следовательно, сумма не делится на 4.

Можно предположить, что сумма пяти последовательных натуральных чисел кратна 5. Для того чтобы проверить это предположение, преобразуем сумму:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10.$$

Сумма кратна 5, так как каждое слагаемое кратно 5.

611. (*Задача-исследование.*) Возьмём, например, число 52 и выполним все описанные действия:

$$5 \cdot 2 = 10; \quad 10 + 5 = 15; \quad 15 \cdot 5 = 75;$$
$$75 + 10 + 2 = 87; \quad 87 - 35 = 52.$$

Пусть задуманное число имеет вид $10x + y$. Произведём все преобразования, описанные Магницким. Получим

$$5(2x + 5) + 10 + y = 10x + 25 + 10 + y = 10x + y + 35.$$

Если из этой суммы вычесть 35, то получится $10x + y$, т. е. задуманное число.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

734. а) Значение трёхчлена $2x^2 + 6x + 3$ при любом целом x является числом нечётным, так как значение выражения $(2x^2 + 6x)$ — чётное число, а 3 — число нечётное.

Следовательно, целого x, при котором значение трёхчлена $2x^2 + 6x + 3$ является чётным числом, не существует.

б) Значение трёхчлена $x^2 + x + 2$ при чётном x является чётным числом как сумма трёх чётных слагаемых. При нечётном x это значение также является чётным числом, так как значения x^2 и x — нечётные числа, а их сумма — число чётное.

Следовательно, целого значения x, при котором значение многочлена $x^2 + x + 2$ является нечётным числом, не существует.

737. а) $(1 - x + 4x^2 - 8x^3) + (2x^3 + x^2 - 6x - 3) - (5x^3 + 8x^2) = 1 - x + 4x^2 - 8x^3 + 2x^3 + x^2 - 6x - 3 - 5x^3 - 8x^2 = -11x^3 - 3x^2 - 7x - 2$;

б) $(0{,}5a - 0{,}6b + 5{,}5) - (-0{,}5a + 0{,}4b) + (1{,}3b - 4{,}5) = 0{,}5a - 0{,}6b + 5{,}5 + 0{,}5a - 0{,}4b + 1{,}3b - 4{,}5 = a + 0{,}3b + 1$.

738. $A + B - C = (2x - 1) + (3x + 1) - 5x = 2x - 1 + 3x + 1 - 5x = 0$;

$C - B - A = 5x - (3x + 1) - (2x - 1) = 5x - 3x - 1 - 2x + 1 = 0$.

Данные выражения тождественно равны одному и тому же числу, следовательно, они являются тождественно равными.

739. г) Обозначим искомый многочлен через M, тогда

$(y^2 - 5y + 1) - M = 4y^2 - y + 7$;

$M = (y^2 - 5y + 1) - (4y^2 - y + 7) = y^2 - 5y + 1 - 4y^2 + y - 7 = -3y^2 - 4y - 6$.

740. Для упрощения вычислений целесообразно все коэффициенты при степенях x в первом многочлене записать в виде десятичных дробей:

$$\left(1{,}75x^4 - 0{,}125x^3 - 1{,}25x + 0{,}4x + \frac{5}{7}\right) - \left(0{,}75x^4 - 0{,}125x^3 - 2{,}25x^2 + 0{,}4x - \frac{3}{7}\right) = x^4 + x^2 + \frac{8}{7}.$$

Значение этого трёхчлена положительно при любом значении x.

743. В этом и следующих упражнениях используется запись чисел в десятичной системе счисления.

в) $\overline{abc} - \overline{ba} = (100a + 10b + c) - (10b + a) = 100a + 10b + c - 10b - a = 99a + c$;

г) $\overline{abc} - \overline{ac} = (100a + 10b + c) - (10a + c) = 100a + 10b + c - 10a - c = 90a + 10b$.

744. а) $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$.

Значение выражения $11(a + b)$ кратно числу $(a + b)$.

745. г) $-3{,}6 - (1{,}5x + 1) = -4x - 0{,}8 - (0{,}4x - 2)$;

$-3{,}6 - 1{,}5x - 1 = -4x - 0{,}8 - 0{,}4x + 2$;

$-1{,}5x + 4x + 0{,}4x = 3{,}6 + 1 - 0{,}8 + 2$;

$2{,}9x = 5{,}8$; $x = 2$.

746. Выполнение данного упражнения следует начать с повторения понятия чисел, пропорциональных данным. Пусть $2x$, $4x$, $5x$ и $6x$ — искомые числа. Тогда

$(5x + 6x) - (2x + 4x) = 4{,}8$; $11x - 6x = 4{,}8$; $x = 0{,}96$.

Искомые числа: 1,92, 3,84, 4,8 и 5,76.

747. Пусть x — задуманное число, тогда после приписывания справа нуля получаем число $10x$. Имеем уравнение $143 - 10x = 3x$. Отсюда $x = 11$.

748. Пусть x — данное число. Тогда новое число имеет вид $10x + 9$. Имеем уравнение $(10x + 9) + 2x = 633$. Отсюда $x = 52$.

749. Пусть x — данное трёхзначное число. Приписав к нему слева цифру 5, получим число $5000 + x$. Имеем уравнение $(5000 + x) - 3032 = 9x$. Отсюда $x = 246$.

750. Обозначим через x двузначное число, которое стоит в трёхзначном числе перед цифрой 7. Тогда данное трёхзначное число равно $(10x + 7)$. Если перенести цифру 7 на первое место, получится число $700 + x$. Имеем уравнение $(700 + x) - (10x + 7) = 324$. Отсюда $x = 41$, а искомое трёхзначное число 417.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 22

14. б) Данный многочлен будет многочленом третьей степени, если сумма одночленов $x^m y^n$ и $(-x^2y^4)$ будет равна нулю. Отсюда $m = 2$, $n = 4$.

15. б) Представим данный многочлен в стандартном виде:

$$4ab^3 - a^2b^2 + ab^3 - a^3b + 5a^3b = 5ab^3 - a^2b^2 + 4a^3b.$$

Если $a = -1$, $b = 1$, то

$5ab^3 - a^2b^2 + 4a^3b = 5 \cdot (-1) \cdot 1^3 - (-1)^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot (-1)^3 \cdot 1 = -5 - 1 - 4 = -10$.

17. б) $5c^2d - 8c^3d + 9c^2d^2 + 4c^3d = 5c^2d - 4c^3d + 9c^2d^2$.

Если $c = -1$, $d = \frac{1}{3}$, то

$$5c^2d - 4c^3d + 9c^2d^2 = 5 \cdot (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot (-1)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4.$$

18. а) Воспользовавшись равенством $a = -2b$, получим

$2b \cdot 6a^2b - 10ab \cdot (-2)b^2 = 12a^2b^2 + 20ab^3 = 12 \cdot (-2b)^2b^2 + 20 \cdot (-2b)b^3 = 48b^4 - 40b^4 = 8b^4$.

Возможен и другой вариант. Воспользовавшись равенством $b = -\frac{a}{2}$, получим

$$12a^2b^2 + 20ab^3 = 12a^2 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 20 \cdot a\left(-\frac{a}{2}\right)^3 = 3a^4 - \frac{5}{2}a^4 = \frac{a^4}{2}.$$

Пункт 23

6. а) $2 - 1{,}2x + 14{,}4 = 10 + 2x$; $3{,}2x = 6{,}4$; $x = 2$;

б) $5{,}6 - 1{,}2y + 3{,}4y - 0{,}2 = 5{,}4y + 11{,}8$; $2{,}2y + 5{,}4 = 5{,}4y + 11{,}8$; $3{,}2y = -6{,}4$; $y = -2$.

8. $-(y^2-9y+12)+(3y^2-y)-(2y^2+8y-33)=-y^2+9y-12+$ $+3y^2-y-2y^2-8y+33=21$. Число 21 делится на 7, следовательно, значение данного выражения при любом значении y кратно 7.

10. Обозначим искомый двучлен через M.

а) $6a^3-8a^2+2a+3=M+(6a^3+3)$;

$M=(6a^3-8a^2+2a+3)-(6a^3+3)=-8a^2+2a$;

б) $6a^3-8a^2+2a+3=M-(8a^2-3)$;

$M=(6a^3-8a^2+2a+3)+(8a^2-3)=6a^3+2a$.

12. а) $A-B+C=(x^3-3xy+y^3)-(2x^3-y^3)+(x^3+2xy)=$ $=x^3-3xy+y^3-2x^3+y^3+x^3+2xy=2y^3-xy$;

б) $-A-B+C=-(x^3-3xy+y^3)-(2x^3-y^3)+(x^3+2xy)=$ $=-x^3+3xy-y^3-2x^3+y^3+x^3+2xy=-2x^3+5xy$.

13. Со второго участка собрали $0{,}92a$ кг моркови, с первого и второго участков вместе собрали $1{,}92a$ кг, а с третьего участка — $(1{,}92a-30)$ кг, со всех трёх участков собрали $1{,}92a+1{,}92a-30=3{,}84a-30$ (кг) моркови.

15. а) При выполнении этого задания рекомендуется раскрывать скобки постепенно.

$5a-(-(3a-2)+(a-6))+8=5a-(-3a+2+a-6)+8=$ $=5a-(-2a-4)+8=5a+2a+4+8=7a+12$.

16. $5abc-(2a^2b-(3abc+(6ab^2-3a^2b)))=$

$=5abc-(2a^2b-(3abc+6ab^2-3a^2b))=$

$=5abc-(2a^2b-3abc-6ab^2+3a^2b)=$

$=5abc-5a^2b+3abc+6ab^2=8abc-5a^2b+6ab^2$.

Если $a=-1$, $b=2$, $c=-2$, то $8abc-5a^2b+6ab^2=$ $=8\cdot(-1)\cdot2\cdot(-2)-5\cdot(-1)^2\cdot2+6\cdot(-1)\cdot2^2=32-10-24=-2$.

17. Для упрощения вычислений целесообразно коэффициенты при переменной x в первом многочлене представить в виде десятичных дробей:

$$\left(1{,}25x^4+0{,}125x^3-2{,}75x^2-0{,}2x-\frac{2}{7}\right)-$$

$$-\left(2{,}25x^4+0{,}125x^3-1{,}75x^2-0{,}2x+\frac{5}{7}\right)=$$

$$=1{,}25x^4+0{,}125x^3-2{,}75x^2-0{,}2x-\frac{2}{7}-2{,}25x^4-0{,}125x^3+$$

$$+1{,}75x^2+0{,}2x-\frac{5}{7}=-x^4-x^2-1.$$

При любом значении x верны неравенства $x^4\geqslant0$, $x^2\geqslant0$, следовательно, $-x^4-x^2-1<0$.

18. Бригада изготовляла в феврале по $1{,}15a$ деталей в день, а в марте по $(1{,}15a+c)$ деталей. Общее число деталей, изготовленных бригадой за первый квартал, равно

$$15a+20\cdot1{,}15a+22\cdot(1{,}15a+c)=$$
$$=15a+23a+25{,}3a+22c=63{,}3a+22c.$$

§ 10. Произведение одночлена и многочлена

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
27	Умножение одночлена на многочлен	4(4)
28	Вынесение общего множителя за скобки	2(2)
	Контрольная работа № 5	1

Содержание материала

Умножение одночлена на многочлен, его применение в преобразовании целого выражения в многочлен стандартного вида. Использование умножения одночлена на многочлен при доказательстве тождеств и решении уравнений. Разложение многочленов на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы сформировать умения преобразовывать произведение одночлена и многочлена в многочлен стандартного вида, а также выполнять разложение многочлена на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки и применять эти умения при решении уравнений.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь выполнять умножение одночлена на многочлен и применять это преобразование для упрощения целых выражений, при решении уравнений, в частности уравнений, содержащих дроби с числовыми знаменателями. Расширяется круг текстовых задач, решаемых с помощью уравнений, формируется умение учащихся выполнять разложение многочленов на множители с помощью вынесения общего для членов многочлена множителя за скобки.

Методический комментарий

Умножение одночлена на многочлен является одним из важнейших компонентов в тождественных преобразованиях различного рода выражений. Оно находит применение при решении уравнений и неравенств с одной переменной, систем уравнений с двумя переменными, доказательстве тождеств, при решении текстовых задач и т. п. В связи с этим необходимо добиваться усвоения всеми учащимися материала, представленного в учебнике в пункте 27. Важно разъяснить учащимся, что правило умножения одночлена на многочлен следует из распределительного свойства умножения. Они должны научиться свободно выполнять простейшие задания **614—617** на умножение одночлена на многочлен, не пропуская ни одного члена и внимательно следя за знаками. Эти умения составляют базу для безошибочного выполнения преобразований целых выражений, в которых умножение одночлена на многочлен выполняется в сочетании с раскрытием скобок, перед которыми стоит знак «плюс» или «минус», приведением подобных членов и т. п. С такими преобразованиями учащиеся встречаются в заданиях **618—629**. Важно, чтобы при их выполнении учащиеся были внимательны, аккуратно вели записи в тетрадях, использовали самоконтроль. Умение выполнять подобные преобразования является необходимым условием для решения уравнений, представленных в упражнениях **630—633**. Специальное внимание в данном пункте следует уделить решению уравнений, содержащих дроби с числовыми знаменателями **(634—638)**. С такими уравнениями учащиеся неоднократно встретятся в дальнейшем, например при решении систем линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки.

Данный пункт завершается блоком текстовых задач **(639—649)**. Особое внимание здесь следует уделить задачам **648**, **649** с практическим содержанием. Подобные задачи убеждают учащихся в значимости приобретаемых ими на уроках алгебры знаний и умений.

В соответствии с реализуемым в учебнике принципом параллельного рассмотрения прямых и обратных преобразований изучение умножения одночлена на многочлен непосредственно связывается с таким преобразованием, как вынесение общего множителя за скобки. Объяснение материала рекомендуется начать с подробного разбора примера 1, приведённого в пункте 28. Важно обратить внимание учащихся на то, что при разложении на множители многочлена с целыми коэффициентами при его членах выносимый за скобки множитель обычно выбирают так, чтобы в скобках оставался многочлен, члены которого не содержат одинаковых для всех общих множителей, а коэффициенты не имеют общих делителей, отличных от единицы. Предлагаемые учащимся упражнения начинаются с простейших заданий **654—659** на разложение на множители двучленов, а затем к ним добавляются более сложные задания **664—669**, в которых предлагается разложить на множители трёхчлен. Важно предостеречь учащихся от распространённой ошибки, когда при вынесении за скобки общего множителя они теряют в записи оставшегося многочлена слагаемое 1 или −1. Например, пишут $5a^6 + ab + a = a(5a^5 + b)$. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что при вынесении одночленного множителя из многочлена, содержащего n членов, в скобках должен остаться многочлен, который также содержит n членов.

При изучении пункта 28 важно ознакомить учащихся с разобранными в тексте учебника примерами 4 и 5, демонстрирующими возможности применения разложения многочленов на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки при решении различных задач. Формированию соответствующих умений способствуют упражнения **660—665**. Рекомендуется специально остановиться на заданиях **663** и **665**, предназначенных для работы в парах. Результаты их выполнения следует проверить в коллективной работе класса, требуя от учащихся необходимых пояснений и обоснований.

Систему упражнений на вынесение общего множителя за скобки, представленную в пункте 28, завершают упражнения **670—672**, в которых предлагается вынести за скобки многочленный множитель. Эти упражнения готовят учащихся к изучению разложения многочленов на множители способом группировки.

К системе упражнений, представленной в § 10 «Произведение одночлена и многочлена», примыкает блок дополнительных заданий, в число которых входят текстовые задачи. Многие из этих задач могут быть использованы при заключительном повторении в конце учебного года. Наиболее сложные текстовые задачи **759, 760, 764, 766** рекомендуется предложить в качестве индивидуальных заданий хорошо успевающим учащимся.

Указания к основным упражнениям учебника

623. б) $5a(a - 4b) - 4b(b - 5a) = 5a^2 - 20ab - 4b^2 + 20ab = 5a^2 - 4b^2$.

Если $a = -0{,}6$, $b = -0{,}5$, то

$$5a^2 - 4b^2 = 5 \cdot 0{,}36 - 4 \cdot 0{,}25 = 1{,}8 - 1 = 0{,}8.$$

624. б) $\left(-\frac{1}{2}b\right)^3 - b\left(1 - 2b - \frac{1}{8}b^2\right) = -\frac{1}{8}b^3 - b + 2b^2 + \frac{1}{8}b^3 = 2b^2 - b$;

г) $(0{,}2c^3)^2 - 0{,}01c^4(4c^2 - 100) = 0{,}04c^6 - 0{,}04c^6 + c^4 = c^4$.

629. $2x(x - 6) - 3(x^2 - 4x + 1) = 2x^2 - 12x - 3x^2 + 12x - 3 = -x^2 - 3$.

При любом значении x верно неравенство $-x^2 \leqslant 0$, и, следовательно, $-x^2 - 3 < 0$.

630. е) $0{,}5(2y - 1) - (0{,}5 - 0{,}2y) + 1 = 0$;

$y - 0{,}5 - 0{,}5 + 0{,}2y + 1 = 0$; $1{,}2y = 0$; $y = 0$;

з) $3(3x-1)+2=5(1-2x)-1$;

$9x-3+2=5-10x-1$; $9x+10x=4+1$; $19x=5$; $x=\frac{5}{19}$.

633. В этом упражнении, кроме умения решать уравнения, отрабатываются также навыки составления уравнения по условию.

а) $2(3-5c)+1=4(1-c)$; $c=0{,}5$;
б) $-3(2x+1)-20=8x+5$; $x=-2$;
в) $3(5x+7)=61-10x$; $x=1{,}6$;
г) $8-y=2(7+y)$; $y=-2$.

635. а) $\frac{6x-5}{7}=\frac{2x-1}{3}+2$; $3(6x-5)=7(2x-1)+21\cdot 2$;

$18x-15=14x-7+42$; $18x-14x=35+15$; $4x=50$; $x=12{,}5$;

е) $\frac{y}{4}-\frac{3-2y}{5}=0$; $5y-4(3-2y)=0$; $5y-12+8y=0$; $13y=12$; $y=\frac{12}{13}$.

637. в) $\frac{2m+1}{4}+3=\frac{m}{6}-\frac{6-m}{12}$; $3(2m+1)+12\cdot 3=2m-(6-m)$;

$6m+3+36=2m-6+m$; $3m=-45$; $m=-15$.

638. в) $\frac{11x-4}{7}-\frac{x-9}{2}=5$; $2(11x-4)-7(x-9)=5\cdot 14$;

$22x-8-7x+63=70$; $15x=15$; $x=1$;

д) $\frac{3p-1}{24}-\frac{2p+6}{36}-1=0$; $3(3p-1)-2(2p+6)-72=0$;

$9p-3-4p-12-72=0$; $5p=87$; $p=17{,}4$;

е) $5-\frac{1-2x}{4}=\frac{3x+20}{6}+\frac{x}{3}$; $5\cdot 12-3(1-2x)=2(3x+20)+4x$;

$60-3+6x=6x+40+4x$; $4x=17$; $x=4\frac{1}{4}$.

В упражнениях **639—649** рассматривается один из возможных способов решения.

639. Пусть длина первой стороны прямоугольника равна x см, тогда $x+(x+4)+\frac{x}{2}=44$; $x=16$.

641. Пусть общий выигрыш равен x флоринам, тогда $\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+17=x$; $x=28$.

642. Пусть во втором сарае было x т сена, тогда $\frac{5}{7}(3x-2)=x+2$; $x=3$.

643. Допустим, что площадь луга равна x га, тогда $\frac{x}{50}-\frac{x}{60}=1$; $x=300$.

644. Пусть длина дистанции составляет x м, тогда $\frac{x}{250} - \frac{x}{300} = 1$; $x = 1500$.

645. Допустим, что туристы сделали привал на расстоянии x км от турбазы, тогда $\frac{x}{4} - \frac{x}{4{,}5} = \frac{1}{4}$; $x = 9$.

646. Допустим, что мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии x км от пункта A, тогда $\frac{x}{12} = \frac{x+60}{30}$; $x = 40$.

При решении этой задачи полезно сделать соответствующий рисунок.

647. Допустим, что легковая машина догнала грузовую на расстоянии x км от пункта A, тогда $\frac{x}{60} - \frac{x}{90} = 2$; $x = 360$.

При решении этой задачи полезно проиллюстрировать условие с помощью рисунка.

648. Пусть первоначально в растворе было x г соли, тогда концентрация раствора была равна $\frac{x}{190} \cdot 100\%$. После добавления 10 г соли в растворе стало $(x + 10)$ г соли, а концентрация его стала равной $\frac{x+10}{200} \cdot 100\%$. Учитывая, что $4{,}5\% = \frac{9}{200} \cdot 100\%$, составим уравнение $\frac{x+10}{200} - \frac{x}{190} = \frac{9}{200}$. Отсюда $x = 19$.

649. Допустим, что первоначально в сплаве было x кг олова, тогда содержание олова в сплаве было равно $\frac{x}{16} \cdot 100\%$. После добавления 2 кг олова его содержание в сплаве стало равным $\frac{x+2}{18} \cdot 100\%$. Имеем уравнение $\frac{x+2}{18} - \frac{x}{16} = \frac{1}{20}$. Отсюда $x = 8{,}8$.

657. Ниже показан один из возможных способов вынесения за скобки общего множителя.

в) $-5mn + 5n = 5n(-m + 1)$;

м) $-p^2q^2 - pq = -pq(pq + 1)$.

660. Для упрощения вычислений рекомендуется предварительно преобразовать выражения, вынеся общий множитель за скобки.

б) $a^2y + a^3 = a^2(y + a)$; если $a = -1{,}5$, $y = -8{,}5$, то

$$a^2(y + a) = (-1{,}5)^2 \cdot (-8{,}5 - 1{,}5) = 2{,}25 \cdot (-10) = -22{,}5;$$

г) $-mb - m^2 = -m(b + m)$; если $m = 3{,}48$, $b = 96{,}52$, то

$$-m(b + m) = -3{,}48 \cdot (96{,}52 + 3{,}48) = -3{,}48 \cdot 100 = -348.$$

661. з) $6x - 0{,}2x^2 = 0$; $2x(3 - 0{,}1x) = 0$;

$x = 0$ или $3 - 0{,}1x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 30$.

663. (*Для работы в парах.*) Перед выполнением этого задания полезно повторить с учащимися свойства степеней и правила действий со степенями.

а) $16^5 + 16^4 = 16^4 \cdot (16 + 1) = 16^4 \cdot 17$. Значение выражения кратно 17, так как один из множителей полученного произведения равен 17;

в) $36^5 - 6^9 = (6^2)^5 - 6^9 = 6^{10} - 6^9 = 6^9 \cdot (6 - 1) = 6^9 \cdot 5 = 6^8 \cdot 6 \times$ $\times 5 = 6^8 \cdot 30$ — это произведение делится на 30;

г) $5^{18} - 25^8 = 5^{18} - (5^2)^8 = 5^{18} - 5^{16} = 5^{16} \cdot (5^2 - 1) = 5^{16} \cdot 24 =$ $= 5^{15} \cdot 5 \cdot 24 = 5^{15} \cdot 120$ — это произведение делится на 120.

665. (*Для работы в парах.*) в) $27^4 - 9^5 + 3^9 = (3^3)^4 -$ $- (3^2)^5 + 3^9 = 3^{12} - 3^{10} + 3^9 = 3^9 \cdot (3^3 - 3 + 1) = 3^9 \cdot 25$ — это произведение делится на 25;

г) $16^4 - 2^{13} - 4^5 = (2^4)^4 - 2^{13} - (2^2)^5 = 2^{16} - 2^{13} - 2^{10} = 2^{10} \times$ $\times (2^6 - 2^3 - 1) = 2^{10} \cdot 55 = 2^9 \cdot 2 \cdot 55 = 2^9 \cdot 110$ — это произведение делится на 110.

При выполнении задания использовано следующее свойство делимости: *если один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.*

670. е) $-3b(b - 2) + 7(b - 2)^2 = (b - 2)(-3b + 7(b - 2)) =$ $= (b - 2) \cdot (-3b + 7b - 14) = (b - 2)(4b - 14) = 2(b - 2)(2b - 7)$.

671. в) $3a(2x - 7) + 5b(7 - 2x) = 3a(2x - 7) - 5b(2x - 7) =$ $= (2x - 7)(3a - 5b)$;

г) $(x - y)^2 - a(y - x) = (y - x)^2 - a(y - x) = (y - x)(y - x - a)$;

е) $2(3 - b) + 5(b - 3)^2 = 2(3 - b) + 5(3 - b)^2 = (3 - b) \times$ $\times (2 + 5(3 - b)) = (3 - b)(2 + 15 - 5b) = (3 - b)(17 - 5b)$.

В каждом из этих заданий возможны расхождения в ответах учащихся в зависимости от выбранного ими способа разложения на множители.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

753. а) $3(x^2 - x + 1) - 0{,}5x(4x - 6) = 3x^2 - 3x + 3 - 2x^2 + 3x =$ $= x^2 + 3$; $x^2 + 3 > 0$ при любом значении x;

б) $y(2 + y - y^3) - \frac{2}{3}(6 + 3y + 1{,}5y^2) = 2y + y^2 - y^4 - 4 - 2y - y^2 =$ $= -y^4 - 4$; $-y^4 - 4 < 0$ при любом значении y.

755. Пусть в первом сосуде первоначально было x кг раствора соли, тогда во втором сосуде было $(x + 2)$ кг. Масса соли в первом сосуде была $0{,}1x$ кг, во втором сосуде — $0{,}3(x + 2)$ кг, а в третьем сосуде — $0{,}25(x + (x + 2))$ кг.

Имеем уравнение

$$0{,}1x + 0{,}3(x + 2) = 0{,}25(2x + 2).$$

Отсюда $x = 1$.

756. Пусть в первую бригаду привезли x кг раствора цемента, тогда во вторую бригаду привезли $(x + 50)$ кг раствора. Через 3 ч работы в первой бригаде осталось $(x - 3 \cdot 150)$ кг, а во второй — $(x + 50 - 3 \cdot 200)$ кг. Так как по условию задачи в первой бригаде раствора осталось в 1,5 раза больше, чем во второй, имеем уравнение

$$x - 450 = 1{,}5(x - 550).$$

Отсюда $x = 750$.

757. Пусть первый теплоход шёл до встречи со вторым теплоходом x ч, тогда второй теплоход шёл до встречи $\left(x - \frac{3}{4}\right)$ ч.

Имеем уравнение $45x + 36\left(x - \frac{3}{4}\right) = 162$; $x = 2\frac{1}{3}$.

758. Пусть второй теплоход догонит первый через x ч после своего отправления. Тогда первый теплоход был в пути до этого момента $\left(x + 1\frac{1}{4}\right)$ ч.

Имеем уравнение $40\left(x + 1\frac{1}{4}\right) = 60x$; $x = 2{,}5$; $60 \cdot 2{,}5 = 150$ (км).

759. Пусть скорость первого автобуса x км/ч, тогда скорость второго автобуса равна $(x - 10)$ км/ч. За $3\frac{1}{2}$ ч первый автобус прошёл $3\frac{1}{2}x$ км, а второй — $3\frac{1}{2}(x - 10)$ км. Первый автобус прибыл в B, следовательно, расстояние от A до B равно $3\frac{1}{2}x$ км.

Имеем уравнение $3\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}(x - 10) = \frac{1}{6} \cdot 3\frac{1}{2}x$; $x = 60$.

Скорости автобусов 60 км/ч и 50 км/ч, а расстояние AB равно $3\frac{1}{2} \cdot 60$, т. е. равно 210 км.

760. Пусть скорость второго мотоциклиста равна x км/ч, тогда скорость первого — $1{,}5x$ км/ч. Первый мотоциклист проехал за 2,4 ч расстояние, равное $1{,}5x \cdot 2{,}4$ км, а второй — $2{,}4x$ км. Расстояние, которое преодолели оба мотоциклиста вместе, равно удвоенному расстоянию от A до B.

Имеем уравнение $1{,}5x \cdot 2{,}4 + 2{,}4x = 240$; $x = 40$.

Скорости мотоциклистов 60 км/ч и 40 км/ч, а расстояние от места встречи до пункта B равно $120 - 2{,}4 \cdot 40$, т. е. равно 24 км.

761. Пусть x км/ч — скорость катера в стоячей воде, тогда $(x + 1{,}5)$ км/ч — его скорость по течению реки, а $(x - 1{,}5)$ км/ч — его скорость против течения.

Имеем уравнение $4(x + 1{,}5) = 2{,}4 \cdot 2(x - 1{,}5)$; $x = 16{,}5$.

762. Пусть скорость течения равна x км/ч, тогда скорость катера по течению равна $(15 + x)$ км/ч, а против течения — $(15 - x)$ км/ч.

Имеем уравнение $10(15 - x) - 6(15 + x) = 20$; $x = 2{,}5$.

763. Допустим, что кооператив предполагал в день выпускать x мужских сорочек, тогда

$$8x = 7(x + 10).$$

Из этого уравнения получим, что $x = 70$.

764. Пусть на элеватор поступило x т пшеницы одного сорта и $(1400 - x)$ т пшеницы другого сорта. Отходы, полученные при переработке, составили соответственно $0{,}02x$ т и $0{,}03(1400 - x)$ т. Поскольку получили 1364 т чистой пшеницы, отходы составили $1400 - 1364$, т. е. 36 т.

Имеем уравнение

$$0{,}02x + 0{,}03(1400 - x) = 36.$$

Отсюда $x = 600$; $1400 - 600 = 800$.

765. Допустим, что бригада должна была убрать пшеницу с x га, тогда она планировала закончить работу за $\frac{x}{80}$ дней. Фактически она убрала пшеницу с площади $(x - 30)$ га и затратила на это $\frac{x-30}{90}$ дней.

Имеем уравнение

$$\frac{x}{80} - \frac{x-30}{90} = 1.$$

Отсюда $x = 480$.

766. Пусть первоначально в растворе было x г соли, тогда первоначальная концентрация раствора была равна $\frac{x}{480} \cdot 100\%$; новая концентрация раствора стала равна $\frac{x+20}{500} \cdot 100\%$. Учитывая, что $3{,}75\% = \frac{3}{80} \cdot 100\%$, получаем уравнение

$$\frac{x+20}{500} - \frac{x}{480} = \frac{3}{80},$$

из которого находим, что $x = 30$.

768. в) $25^9 + 5^{17} = (5^2)^9 + 5^{17} = 5^{18} + 5^{17} = 5^{17} \cdot (5 + 1) = 5^{17} \times \times 6 = 5^{16} \cdot (5 \cdot 6) = 5^{16} \cdot 30$;

г) $27^{10} - 9^{14} = (3^3)^{10} - (3^2)^{14} = 3^{30} - 3^{28} = 3^{28} \cdot (3^2 - 1) = 3^{28} \cdot 8 = = (3 \cdot 8) \cdot 3^{27} = 24 \cdot 3^{27}$;

д) $12^3 - 12^2 + 12^{11} = 12^{11} \cdot (12^2 - 12 + 1) = 12^{11} \cdot (144 - 12 + 1) = = 12^{11} \cdot 133$. Это произведение делится на 7 и на 19, так как 133 делится на 7 и на 19;

е) $11^9 - 11^8 + 11^7 = 11^7 \cdot (11^2 - 11 + 1) = 11^7 \cdot 111$. Это произведение делится на 3 и на 37, так как $111 = 37 \cdot 3$.

772. Следует обратить внимание учащихся на то, что после вынесения в основании степени за скобки общего множителя надо возвести в степень каждый из множителей полученного произведения.

а) $(3a + 6)^2 = (3(a + 2))^2 = 3^2(a + 2)^2 = 9(a + 2)^2$;

г) $(-3p + 6)^3 = (-3(p - 2))^3 = (-3)^3 \cdot (p - 2)^3 = -27(p - 2)^3$;

д) $(5q - 30)^3 = (5(q - 6))^3 = 5^3 \cdot (q - 6)^3 = 125(q - 6)^3$;

е) $(2a - 8)^4 = (2(a - 4))^4 = 2^4 \cdot (a - 4)^4 = 16(a - 4)^4$.

774. $a + a^2 = a(a + 1)$. Это произведение делится на 2, так как a и $(a + 1)$ — два последовательных целых числа, одно из которых чётное.

775. $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c)$. Это произведение кратно 11, так как 99 делится на 11.

776. а) $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n \cdot (1 + 2 + 4) = 2^n \cdot 7 = 2^{n-1} \cdot 14$, где n — натуральное число;

б) $5^n + 5^{n+1} = 5^n \cdot (1 + 5) = 5^n \cdot 6 = 5^{n-1} \cdot (5 \cdot 6) = 5^{n-1} \cdot 30$, где n — натуральное число.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 24

7. Преобразуем данное выражение:

$$15y^2(y^2 - 2y + 4) - 3y(8 - 10y^2 + 7y) + 12(3 + 2y) =$$
$$= 15y^4 - 30y^3 + 60y^2 - 24y + 30y^3 - 21y^2 + 36 + 24y =$$
$$= 15y^4 + 39y^2 + 36.$$

Значение этого выражения положительно при любом значении y.

8. Пусть легковой автомобиль догонит автобус через x ч, тогда путь, пройденный автомобилем, составит $60x$ км, а автобусом — $50(x + 1\frac{1}{2})$ км.

Имеем уравнение $50(x + 1\frac{1}{2}) = 60x$; $x = 7{,}5$.

$60 \cdot 7{,}5 = 450$ (км).

10. а) $3x(-4x^2 + 7 + 2x) + 9 = 6x(x - 1 - 2x^2)$;

$-12x^3 + 21x + 6x^2 + 9 = 6x^2 - 6x - 12x^3$; $21x + 6x = -9$; $x = -\frac{1}{3}$;

б) $2y(1 - 6y) + 3y(4y - 3) = -7y - 5(3 - y)$;

$2y - 12y^2 + 12y^2 - 9y = -7y - 15 + 5y$; $2y - 9y = -2y - 15$; $-5y = -15$; $y = 3$.

11. б) $a^3(2a^2 + a - 1) - 2a^2(a^3 - 3a + 2) - a^4 - 5a^3 + 5 = 2a^5 + a^4 - a^3 - 2a^5 + 6a^3 - 4a^2 - a^4 - 5a^3 + 5 = -4a^2 + 5$.

Если $a = \frac{1}{2}$, то $-4a^2 + 5 = -4 \cdot \frac{1}{4} + 5 = 4$.

14. а) $4y^{n-1}\left(\frac{3}{8}y^{n+1}-\frac{1}{2}y\right)=\frac{3}{2}y^{2n}-2y^{n}$;

б) $-3a^{m}b^{m}\left(-\frac{1}{6}a^{7-m}-\frac{2}{3}b^{9-m}\right)=\frac{1}{2}a^{7}b^{m}+2a^{m}b^{9}$.

Здесь m, n — натуральные числа, $m \leqslant 7$.

15. а) $2-\frac{3x-2}{18}-\frac{2x-11}{27}=0$; $54\cdot 2-3(3x-2)-2(2x-11)=$ $=0$; $108-9x+6-4x+22=0$; $13x=136$; $x=10\frac{6}{13}$;

б) $4-\frac{2-y}{3}=\frac{3y+4}{5}-\frac{y}{4}$; $60\cdot 4-20(2-y)=12(3y+4)-15y$;

$240-40+20y=36y+48-15y$; $200-48=21y-20y$; $y=152$.

16. Допустим, что автобусы встретятся через x ч после отправления первого автобуса. Учитывая, что скорость второго автобуса равна $40\cdot 1{,}1=44$ (км/ч), получаем уравнение $40x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 44=650$; $x=8$.

Пункт 25

10. Предварительно преобразуем данное выражение.

б) $5m^3n^4-71m^2n^3+6m^4n^3=m^2n^3(5mn-71+6m^2)$. Если $m=9$, $n=-\frac{1}{3}$, то

$$m^2n^3(5mn-71+6m^2)=81\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)\cdot\left(45\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-71+6\cdot 81\right)=$$

$$=-3(-15-71+486)=-3\cdot 400=-1200;$$

в) $18x^4y-27x^3y^2-81x^2y^3=9x^2y(2x^2-3xy-9y^2)$. Если $x=-0{,}2$, $y=0{,}1$, то

$$9x^2y(2x^2-3xy-9y^2)=$$
$$=9\cdot 0{,}04\cdot 0{,}1\cdot(2\cdot 0{,}04+3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1-9\cdot 0{,}01)=$$
$$=9\cdot 0{,}004\cdot(0{,}08+0{,}06-0{,}09)=0{,}036\cdot 0{,}05=0{,}0018.$$

11. а) $a^{3n}-3a^n=a^n(a^{2n}-3)$;
б) $x^{2n+1}y+x^{2n-1}y=x^{2n-1}y(x^2+1)$;
в) $c^{3n+4}-c^{3n+2}+c^{3n+1}=c^{3n+1}(c^3-c+1)$.

12. а) $6^{n+2}-6^{n+1}+6^n=6^n(6^2-6+1)=6^n\cdot 31$;
б) $9^{2n-1}-9^{2n-2}-9^{2n-3}=9^{2n-3}(9^2-9-1)=9^{2n-3}\cdot 71$ $(n>1)$.

13. а) $15a-30b+61=15(a-2b)+61=15\cdot 8+61=181$;
б) $(2a-4b)^2-300=(2(a-2b))^2-300=4\cdot 64-300=-44$.

15. б) $7y(y^2+2)-5y^3-2y^2(y-3)=0$; $7y^3+14y-5y^3-2y^3+$ $+6y^2=0$; $14y+6y^2=0$; $2y(7+3y)=0$; $y_1=0$, $y_2=-2\frac{1}{3}$.

16. $\overline{abcd}-\overline{dcba}=1000a+100b+10c+d-1000d-100c-$ $-10b-a=999a+90b-90c-999d$. Эта сумма делится на 9, так как каждое слагаемое делится на 9.

§ 11. Произведение многочленов

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
29	Умножение многочлена на многочлен	4(4)
30	Разложение многочлена на множители способом группировки	2(3)
	Контрольная работа № 6	1

Содержание материала

Умножение многочлена на многочлен, его применение для упрощения выражений, при доказательстве тождеств, при решении уравнений, в задачах на делимость. Способ группировки как один из способов разложения многочленов на множители. Применение способа группировки при нахождении значения выражения, доказательстве тождеств.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы сформировать умение преобразовывать произведение двух многочленов в многочлен стандартного вида, применять это преобразование при упрощении выражений, доказательстве тождеств, решении уравнений. Ознакомить учащихся со способом группировки как одним из способов разложения на множители. Сформировать умение применять этот способ в преобразованиях различных выражений.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного материала формируются умения учащихся выполнять умножение многочлена на многочлен, применять это преобразование при упрощении выражений, доказательстве тождеств, решении уравнений и текстовых задач с помощью уравнений, а также использовать способ группировки для разложения многочленов на множители.

Методический комментарий

В данном параграфе учащиеся впервые встречаются с таким преобразованием, как умножение многочлена на многочлен. Изложение материала начинается с доказательства тождества

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

При доказательстве этого тождества учащиеся впервые встречаются с важной методической идеей — идеей подстановки. Полезно рассказать учащимся, что в III в. до н. э. греческий математик Евклид доказывал справедливость данного равенства с помощью чертежа, и предложить им рассмотреть приведённый в учебнике рисунок 68.

На основе равенства $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ в учебнике формулируется правило умножения многочлена на многочлен. Учащиеся должны знать это правило и уметь его воспроизводить. Умение выполнять умножение многочлена на многочлен включает два шага — представлять произведение в виде многочлена и приводить подобные члены этого многочлена. Важно, чтобы учащиеся научились безошибочно выполнять оба эти шага. При умножении многочлена на многочлен полезно приучить семиклассников к такой последовательности действий: сначала каждый член первого многочлена умножаем на первый член второго, далее каждый член первого многочлена умножаем на второй член второго многочлена и т. д. Если в первом многочлене m членов, а во втором n членов, то в произведении, до приведения подобных членов, должно получиться mn членов. Учащимся следует помнить об этом и использовать данную закономерность для самоконтроля, чтобы избежать распространённой ошибки, связанной с потерей членов в произведении.

При выполнении упражнений **677—684** учащиеся должны внимательно следить за знаками членов многочлена, получившегося в результате умножения. Определённую сложность для них представляют задания **687—694**, где умножение многочлена на многочлен сочетается с раскрытием скобок, перед которыми стоит знак «плюс» или «минус». В подобных заданиях рекомендуется на первых порах использовать пошаговое выполнение задания, а именно сначала выполнить умножение многочленов, записывая результаты в скобках, а затем перейти к сложению или вычитанию многочленов, используя правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «плюс» или «минус».

Например, упражнение **687д** может выполняться так:

$$(a-b)(a+2)-(a+b)(a-2)=$$
$$=(a^2-ab+2a-2b)-(a^2+ab-2a-2b)=$$
$$=a^2-ab+2a-2b-a^2-ab+2a+2b=-2ab+4a.$$

Далее можно перейти к более компактной записи решения, в которой скобки сразу опускаются с учётом знака, стоящего перед произведением. Например, преобразование выражения в упражнении **690а** можно вести так:

$$(x-3)(x+7)-(x+5)(x-1)=$$
$$=x^2-3x+7x-21-x^2-5x+x+5=-16.$$

В упражнениях **695—703** учащиеся встречаются с применением умножения многочленов при решении задач на делимость, а также при решении уравнений и текстовых задач с помощью уравнений. Заметим, что рассмотренное в данном пункте преобразование широко используется при изучении последующих тем курса алгебры 7 класса, а также в курсах алгебры 8 и 9 классов. В связи с этим при изучении пункта 29 необходимо уделить особое внимание выработке соответствующих умений.

В соответствии с реализуемым в учебнике принципом взаимосвязанного изучения прямых и обратных преобразований непосредственно после изучения умножения многочлена на многочлен учащиеся знакомятся с использованием способа группировки для разложения многочленов на множители. По сравнению с ранее изученным способом вынесения общего множителя за скобки для разложения многочлена на множители способ группировки является более сложным. Слабым учащимся трудно представить, к чему приведёт то или иное группирование членов многочлена. Вполне возможно, что, следуя по выбранному пути, они не получат желаемого результата. В этом случае им придётся зачеркнуть начатую запись, что, естественно, не должно сопровождаться снижением оценки.

Полезно, чтобы при разложении многочлена на множители способом группировки учащиеся заранее прикидывали, какой общий множитель можно будет вынести за скобки на последнем этапе, и в зависимости от этого определяли, какой знак — «плюс» или «минус» — удобно сразу ставить перед той или иной скобкой. Например, при разложении на множители многочлена $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$ удобно выполнить группировку членов многочлена следующим образом:

$$xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a = (xy^2 - by^2 + y^2) - (ax - ab + a).$$

Специальное внимание рекомендуется уделить использованию способа группировки для разложения на множители трёхчлена $x^2 + bx + c$ (упражнение **718** и примыкающее к нему дополнительное упражнение **793**). Учитывая, каково значение b, учащиеся должны сообразить, в виде какой суммы или разности двух одночленов следует представить средний член bx.

Дополнительные упражнения к § 11 носят в основном дублирующий характер. При наличии времени желательно использовать задания **786—789**, позволяющие поддерживать сформированное ранее умение учащихся решать с помощью уравнений текстовые задачи. Хорошо успевающим учащимся рекомендуется предложить усложнённые задания **796—798**.

Указания к основным упражнениям учебника

685. в) Умножим сначала одночлен $-3b^3$ на двучлен $(b+2)$, а затем полученное произведение умножим на двучлен $(1-b)$:

$$-3b^3(b+2)(1-b) = (-3b^4 - 6b^3)(1-b) =$$
$$= -3b^4 - 6b^3 + 3b^5 + 6b^4 = 3b^4 + 3b^5 - 6b^3.$$

В этом задании искомый многочлен можно найти также, умножив сначала $(b+2)$ на $(1-b)$, а затем умножив $-3b^3$ на полученное произведение.

687. в) $x^3 - (x^2 - 3x)(x+3) = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x) = x^3 - (x^3 - 9x) = x^3 - x^3 + 9x = 9x.$

688. Выполним преобразование:

$$(3a - 2b)(2a - 3b) - 6a(a - b) + 7ab =$$
$$= 6a^2 - 4ab - 9ab + 6b^2 - 6a^2 + 6ab + 7ab = 6b^2.$$

Достаточно знать только значение b. Значит, верный ответ под номером 3.

692. а) Преобразуем левую и правую части равенства:

$(x-3)(x+7) - 13 = x^2 - 3x + 7x - 21 - 13 = x^2 + 4x - 34;$

$(x+8)(x-4) - 2 = x^2 + 8x - 4x - 32 - 2 = x^2 + 4x - 34.$

Обе части равенства тождественно равны одному и тому же выражению. Следовательно, данное равенство является тождеством.

693. а) $(x-5)(x+8) - (x+4)(x-1) = (x^2 - 5x + 8x - 40) - (x^2 + 4x - x - 4) = x^2 + 3x - 40 - x^2 - 3x + 4 = -36.$

Значение данного выражения не зависит от переменной x.

694. $(y-6)(y+8) - 2(y-25) = y^2 - 6y + 8y - 48 - 2y + 50 = y^2 + 2$. $y^2 + 2 > 0$ при любом значении y.

695. б) $n(n+2) - (n-7)(n-5) = n^2 + 2n - (n^2 - 7n - 5n + 35) = n^2 + 2n - n^2 + 12n - 35 = 14n - 35 = 7(2n-5)$, где $2n - 5$ — целое число. Значит, при любом целом n значение данного выражения делится на 7.

696. Пусть $a = 2n + 1$, где n — натуральное число, тогда следующие нечётные числа имеют вид $b = 2n + 3$, $c = 2n + 5$, $d = 2n + 7$. Имеем

$$cd - ab = (2n+5)(2n+7) - (2n+1)(2n+3) =$$
$$= 4n^2 + 10n + 14n + 35 - (4n^2 + 2n + 6n + 3) =$$
$$= 4n^2 + 24n + 35 - 4n^2 - 8n - 3 = 16n + 32.$$

Данная сумма кратна 16, так как каждое слагаемое делится на 16.

698. а) $5 + x^2 = (x+1)(x+6)$; $5 + x^2 = x^2 + x + 6x + 6$; $7x = -1$; $x = -\frac{1}{7}$;

б) $2x(x-8) = (x+1)(2x-3)$; $2x^2 - 16x = 2x^2 + 2x - 3x - 3$; $-16x + x = -3$; $15x = 3$; $x = 0{,}2$;

в) $(3x-2)(x+4)-3(x+5)(x-1)=0;$
$3x^2-2x+12x-8-3(x^2+5x-x-5)=0;$
$3x^2+10x-8-3x^2-12x+15=0;$ $-2x+7=0;$ $x=3{,}5;$
г) $x^2+x(6-2x)=(x-1)(2-x)-2;$
$x^2+6x-2x^2=2x-2-x^2+x-2;$ $6x-3x=-4;$ $x=-1\frac{1}{3}.$

700. Обозначим наименьшее из трёх искомых чисел через n, тогда следующие натуральные числа имеют вид $n+1$ и $n+2$. Составим и решим уравнение:

$(n+1)(n+2)-n^2=65;$ $n^2+n+2n+2-n^2=65;$ $3n=63;$ $n=21.$

Искомые числа: 21, 22 и 23.

701. Пусть наименьшее из трёх нечётных чисел равно $2n+1$, тогда следующие два нечётных числа имеют вид $2n+3$ и $2n+5$. Имеем уравнение
$(2n+5)(2n+3)-(2n+3)(2n+1)=76;$
$(2n+3)(2n+5-2n-1)=76;$ $4(2n+3)=76;$
$2n+3=19;$ $n=8.$
Искомые числа: 17, 19 и 21.

702. Пусть первоначальная длина прямоугольника была x см, тогда его ширина была равна $\frac{70-2x}{2}=35-x$ (см), а площадь — $x(35-x)$ см^2. Имеем уравнение

$$(x-5)(35-x+5)-x(35-x)=50;\ x=25.$$

703. Пусть сторона квадрата равна x см, тогда стороны прямоугольника равны $(x+3)$ см и $(x-2)$ см. Имеем уравнение

$$(x+3)(x-2)-x^2=30;\quad x=36.$$

708. г) $a(p-q)+q-p=a(p-q)-(p-q)=(p-q)(a-1).$

711. Ниже показан один из возможных способов группировки одночленов:
б) $y^5-y^3-y^2+1=(y^5-y^3)-(y^2-1)=y^3(y^2-1)-(y^2-1)=$
$=(y^2-1)(y^3-1);$
г) $b^6-3b^4-2b^2+6=(b^6-2b^2)-(3b^4-6)=b^2(b^4-2)-3(b^4-2)=$
$=(b^4-2)(b^2-3);$
з) $kn-mn-n^2+mk=(kn+mk)-(mn+n^2)=k(n+m)-$
$-n(m+n)=(m+n)(k-n).$

713. Предварительно разложим многочлен на множители:
а) $p^2q^2+pq-q^3-p^3=(p^2q^2-p^3)-(q^3-pq)=p^2(q^2-p)-$
$-q(q^2-p)=(q^2-p)(p^2-q).$
Если $p=0{,}5,$ $q=-0{,}5,$ то

$$(q^2-p)(p^2-q)=(0{,}25-0{,}5)(0{,}25+0{,}5)=$$
$$=-0{,}25\cdot 0{,}75=-0{,}1875.$$

716. Ниже показан один из возможных способов группировки.

б) $ax^2+ay^2-bx^2-by^2+b-a=(ax^2+ay^2-a)-(bx^2+by^2-b)= =a(x^2+y^2-1)-b(x^2+y^2-1)=(x^2+y^2-1)(a-b)$;

г) $xy^2-by^2-ax+ab+y^2-a=(xy^2-ax)-(by^2-ab)+ +(y^2-a)=x(y^2-a)-b(y^2-a)+(y^2-a)=(y^2-a)(x-b+1)$.

717. б) $x^2-xy+x-xy^2+y^3-y^2=(x^2-xy^2)+(x-y^2)- -(xy-y^3)=x(x-y^2)+(x-y^2)-y(x-y^2)=(x-y^2)(x-y+1)$.

718. а) Представим $6x$ как $5x+x$:

$x^2+5x+x+5=x(x+5)+(x+5)=(x+5)(x+1)$;

б) представим $-x$ как $-3x+2x$:

$x^2-3x+2x-6=(x^2-3x)+(2x-6)=x(x-3)+2(x-3)= =(x-3)(x+2)$;

в) представим $-5a$ как $-4a-a$:

$a^2-4a-a+4=(a^2-4a)-(a-4)=a(a-4)-(a-4)= =(a-4)(a-1)$;

г) представим $-6a$ как $-8a+2a$:

$a^2-8a+2a-16=(a^2-8a)+(2a-16)=a(a-8)+2(a-8)= =(a-8)(a+2)$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

780. а) $(3^5-3^4)(3^3+3^2)=3^8-3^7+3^7-3^6=3^8-3^6= =3^6(3^2-1)=3^6\cdot 8=3^5\cdot 3\cdot 8=3^5\cdot 24$. Значение этого выражения делится на 24;

б) $(2^{10}+2^8)(2^5-2^3)=2^{15}+2^{13}-2^{13}-2^{11}=2^{15}-2^{11}= =2^{11}(2^4-1)=2^{11}\cdot 15=2^9\cdot 4\cdot 15=2^9\cdot 60$. Значение этого выражения делится на 60;

в) $(16^3-8^3)(4^3+2^3)=(2^{12}-2^9)(2^6+2^3)=2^{18}-2^{15}+2^{15}-2^{12}= =2^{18}-2^{12}=2^{12}(64-1)=2^{12}\cdot 63$. Значение этого выражения делится на 63;

г) $(125^2+25^2)(5^2-1)=(5^6+5^4)(5^2-1)=5^8+5^6-5^6-5^4= =5^8-5^4=5^4(5^4-1)=5^4\cdot 624$. Значение этого выражения делится на 39, так как 624 делится на 39.

781. б) $m^3+n^3-(m^2-2mn-n^2)(m-n)=$
$=m^3+n^3-(m^3-2m^2n-mn^2-m^2n+2mn^2+n^3)=$
$=m^3+n^3-(m^3-3m^2n+mn^2+n^3)=$
$=m^3+n^3-m^3+3m^2n-mn^2-n^3=3m^2n-mn^2=mn(3m-n)$.

Если $m=-3$, $n=4$, то $mn(3m-n)=(-3)\cdot 4\cdot(-9-4)= =(-12)\cdot(-13)=156$.

782. б) $(x^2-3x+2)(2x+5)-(2x^2+7x+17)(x-4)=2x^3- -6x^2+4x+5x^2-15x+10-(2x^3+7x^2+17x-8x^2-28x-68)= =2x^3-x^2-11x+10-2x^3+x^2+11x+68=78$ при любом значении переменной x.

784. Пусть наименьшее из искомых натуральных чисел равно n, тогда следующие натуральные числа имеют вид $n+1$, $n+2$ и $n+3$. Имеем уравнение

$$(n+2)(n+3)-n(n+1)=38; \quad n=8.$$

Искомые числа: 8, 9, 10 и 11.

785. а) Пусть n — наименьшее из четырёх последовательных целых чисел, тогда следующие числа имеют вид $n+1$, $n+2$ и $n+3$.

Преобразуем разность между произведением средних и произведением крайних чисел:

$$(n+1)(n+2)-n(n+3)=n^2+n+2n+2-n^2-3n=2,$$

т. е. первое произведение на 2 больше второго.

б) Пусть наименьшее из трёх нечётных чисел равно $2n+1$, тогда последующие нечётные числа имеют вид $2n+3$ и $2n+5$.

Преобразуем разность между $(2n+3)^2$ и произведением $(2n+1)(2n+5)$:

$$(2n+3)^2-(2n+1)(2n+5)=(2n+3)(2n+3)-(2n+1)(2n+5)=$$
$$=4n^2+6n+6n+9-4n^2-2n-10n-5=4.$$

Значит, квадрат числа $2n+3$ на 4 больше произведения чисел $2n+1$ и $2n+5$.

789. Пусть ширина первоначального прямоугольника равна x см, тогда его длина равна $(15-x)$ см. Имеем уравнение

$$x(15-x)-(x+5)(12-x)=8; \quad x=8{,}5.$$

Площадь первоначального прямоугольника равна

$$8{,}5\cdot(15-8{,}5)=55{,}25 \text{ (см}^2\text{)}.$$

791. е) $2x^3+xy^2-2x^2y-y^3=(2x^3+xy^2)-(2x^2y+y^3)=$ $=x(2x^2+y^2)-y(2x^2+y^2)=(2x^2+y^2)(x-y)$;

ж) $16ab^2-10c^3+32ac^2-5b^2c=(16ab^2+32ac^2)-$ $-(10c^3+5b^2c)=16a(b^2+2c^2)-5c(b^2+2c^2)=(b^2+2c^2)\times$ $\times(16a-5c)$;

з) $6a^3-21a^2b+2ab^2-7b^3=(6a^3+2ab^2)-(21a^2b+7b^3)=$ $=2a(3a^2+b^2)-7b(3a^2+b^2)=(3a^2+b^2)(2a-7b)$.

793. Для разложения на множители данных многочленов представим средний член в виде суммы или разности некоторых одночленов.

а) $x^2-10x+24=x^2-6x-4x+24=x(x-6)-4(x-6)=$ $=(x-6)(x-4)$;

б) $x^2-13x+40=x^2-8x-5x+40$;

в) $x^2+8x+7=x^2+7x+x+7$;

г) $x^2+15x+54=x^2+6x+9x+54$;

д) $x^2+x-12=x^2+4x-3x-12$;

е) $x^2-2x-35=x^2-7x+5x-35$.

794. а) Подставим вместо x выражение $2a - 3$:

$$a(x + 6) + x(x - 3a) = a(2a - 3 + 6) + (2a - 3)(2a - 3 - 3a) =$$
$$= a(2a + 3) + (2a - 3)(-a - 3) = 2a^2 + 3a - 2a^2 + 3a - 6a + 9 = 9.$$

б) Подставим вместо x выражение $a + 3$:

$$x(x - 3a) + a(a + x) + 4 = (a + 3)(a + 3 - 3a) + a(a + a + 3) + 4 =$$
$$= (a + 3)(3 - 2a) + a(2a + 3) + 4 =$$
$$= 3a + 9 - 2a^2 - 6a + 2a^2 + 3a + 4 = 13.$$

795. б) Преобразуем левую и правую части равенства:

$$(a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) = a^4 + 3a^3 + 3a^3 + 9a^2 + 2a^2 + 6a =$$
$$= a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a;$$
$$a(a + 1)(a + 2)(a + 3) = (a^2 + a)(a^2 + 2a + 3a + 6) =$$
$$= (a^2 + a)(a^2 + 5a + 6) = a^4 + a^3 + 5a^3 + 5a^2 + 6a^2 + 6a =$$
$$= a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a.$$

Левая и правая части равенства тождественно равны одному и тому же выражению, следовательно, данное равенство является тождеством.

г) $(c^4 - c^2 + 1)(c^4 + c^2 + 1) = c^8 - c^6 + c^4 + c^6 - c^4 + c^2 + c^4 - c^2 + 1 = c^8 + c^4 + 1$.

796. В данном произведении множитель x^3 будут содержать члены, полученные при умножении x^3 на a и $4x^2$ на x, т. е. члены ax^3 и $4x^3$. Произведение равно многочлену, не содержащему x^3, если $4 + a = 0$, т. е. $a = -4$.

797. $(10a + b)(10a + c) = 100a^2 + 10ab + 10ac + bc = 100a^2 + 10a(b + c) + bc$. При $b + c = 10$ получаем $100a^2 + 100a + bc = 100a(a + 1) + bc$.

798. а) $(a + c)(b + c) + (a - c)(b - c) = ab + bc + ac + c^2 + ab - bc - ac + c^2 = 2ab + 2c^2 = 2(ab + c^2)$. Это произведение тождественно равно нулю, так как $ab + c^2 = 0$;

б) $(a + 1)(b + 1) - (a - 1)(b - 1) = ab + b + a + 1 - ab + b + a - 1 = 2a + 2b = 2(a + b)$. Если $a + b = 9$, то $2(a + b) = 18$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 26

7. Допустим, что в зрительном зале до ремонта было x рядов, тогда число кресел в каждом ряду было $2x$, а общее число мест в зрительном зале было $2x^2$. После ремонта общее число мест стало $(x + 2)(2x + 3)$. Имеем уравнение

$$(x + 2)(2x + 3) - 2x^2 = 146; \quad x = 20.$$

13. Пусть наименьшее из искомых чисел равно n, тогда следующие числа имеют вид $n + 1$ и $n + 2$. Имеем уравнение

$$(n + 2)^2 - n(n + 1) = 25; \quad n = 7.$$

Искомые числа: 7, 8 и 9.

15. Пусть a — коэффициент при x^4 в данном произведении многочленов; $a = 4 \cdot 0{,}2 - \frac{1}{3} - 20M$. По условию этот коэффициент равен 2,8. Имеем уравнение

$$4 \cdot 0{,}2 - \frac{1}{3} - 20M = 2{,}8; \quad M = -\frac{7}{60}.$$

18. Пусть ширина участка земли равна x м, тогда его длина составляет $(x + 10)$ м, а площадь — $x(x + 10)$ м^2. Имеем уравнение

$$(x + 3)(x + 13) = x(x + 10) + 159; \; x = 20.$$

Длина забора была равна $2(20 + 30)$, т. е. равна 100 м.

Пункт 27

9. Преобразуем данный многочлен, разложив его на множители:

$$6a^2 - 5a - 6ab + 5b = (6a^2 - 6ab) - (5a - 5b) = \\ = 6a(a - b) - 5(a - b) = (a - b)(6a - 5).$$

Значение этого произведения кратно 11, так как один из множителей $(a - b)$ делится на 11.

11. $5^n + 5^{n+2} - 3^{n+3} + 3^n = (5^n + 5^{n+2}) - (3^{n+3} - 3^n) = 5^n(1 + 5^2) - 3^n(3^3 - 1) = 5^n \cdot 26 - 3^n \cdot 26 = 26 \cdot (5^n - 3^n)$.

12. б) $24abx^2 - 6ax^2 - 28b^2x + 7bx = (24abx^2 - 6ax^2) - (28b^2x - 7bx) = 6ax^2(4b - 1) - 7bx(4b - 1) = (4b - 1) \times (6ax^2 - 7bx) = x(4b - 1)(6ax - 7b)$.

13. а) $y^{n+2} - 3y^n + y^2 - 3 = (y^{n+2} - 3y^n) + (y^2 - 3) = y^n(y^2 - 3) + (y^2 - 3) = (y^2 - 3)(y^n + 1)$;

б) $bx^{n-1} + 5x^n - ab - 5ax = x^{n-1}(b + 5x) - a(b + 5x) = (b + 5x)(x^{n-1} - a)$.

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 31. Деление с остатком

Методический комментарий

Начальные сведения о делении с остатком учащиеся получили в младших классах, где рассматривалось деление натурального числа на натуральное. В данном пункте сведения о делении с остатком расширяются. Учащиеся знакомятся со случаем, когда выполняется деление с остатком целого числа на натуральное число.

Важно обратить внимание учащихся на то, что при делении с остатком целого числа на натуральное число частное выбирается так, чтобы полученный остаток был натуральным числом. Например,

$$-17 = 9 \cdot (-2) + 1, \quad -46 = 9 \cdot (-6) + 8, \quad -130 = 9 \cdot (-15) + 5.$$

Учащиеся узнают, что для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r, таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

Для доказательства справедливости этого утверждения используется изображение чисел на координатной прямой. Важно обратить внимание учащихся на то, что на делении с остатком основаны различные разбиения множества целых чисел на классы, т. е. на подмножества, не имеющие общих элементов.

Материал, включённый в данный пункт, является достаточно сложным для учащихся. В связи с этим изучение этого пункта можно провести в форме факультативного занятия, на котором учитель ознакомит учащихся, интересующихся математикой, с соответствующим теоретическим материалом.

Выслушав объяснения учителя, учащиеся смогут приступить к выполнению соответствующих упражнений.

В систему упражнений, представленных в данном пункте, включены разнообразные задания, требующие от учащихся определённых рассуждений, обобщений, проявления сообразительности. Учащихся, увлечённых математикой, безусловно, заинтересует задание **725**, в котором предлагается указать наибольшее число воскресений в году, а также задание **729**, в котором требуется определить, верно ли утверждение, что при любых целых значениях a и b произведение

$$ab(a + b)(a - b)$$

делится на 3, и некоторые другие задания.

Решение включённых в данный пункт усложнённых задач благоприятно скажется на дальнейшем продвижении учащихся, интересующихся математикой, в достижении высоких результатов обучения.

Указания к упражнениям учебника

722. а) $138 = 7 \cdot 19 + 5$;

б) $-16 = 5 \cdot (-4) + 4$;

в) $-4 = 5 \cdot (-1) + 1$.

723. По условию $x - 1 = 11p$, $x < 0$. Значит, $x = -10$.

724. По условию имеем $a = 7b + 3$, где b — целое число и $-12 < a < 12$. Подбором находим, что b равно одному из чисел -2, -1, 0 или 1.

725. Наибольшее число дней в году — 366 (високосный год). Так как $366 : 7 = 52$ (2 ост.), то наибольшее число воскресений в году может быть равно $52 + 1$, т. е. 53.

726. Из условия следует, что $m = 35k + 15$. Из свойства делимости суммы следует, что число m делится на 5 и число m не делится на 7.

727. Не могут. Действительно, если b и c — нечётные числа, то их произведение bc является нечётным числом. Так как $a = bc + d$, то при нечётном d число a является суммой двух нечётных чисел, и, следовательно, a — число чётное.

728. Пусть число a имеет вид $3m + 2$, а число b — $3k + 1$, где m и k — целые числа. Тогда

$$ab + 1 = (3m + 2)(3k + 1) + 1 = 9mk + 6k + 3m + 2 + 1 = \\ = 3(3mk + 2k + m + 1).$$

Из свойства делимости произведения вытекает, что значение выражения $ab + 1$ делится на 3.

729. Если одно из чисел a или b делится на 3, то произведение $ab(a + b)(a - b)$ делится на 3. Если числа a и b не делятся на 3 и при делении на 3 дают одинаковые остатки, значит, их разность делится на 3 и делится на 3 выражение $ab(a + b)(a - b)$. Если числа a и b не делятся на 3 и при делении на 3 дают разные остатки, то их сумма делится на 3 и потому выражение $ab(a + b)(a - b)$ делится на 3.

730. Из равенства $a = 12b + 5$, где b — целое число, следует, что $a = 12b + 4 + 1$, значит, при делении числа a на 4 получится остаток 1.

731. Пусть $a = 9m + 7$, $b = 9n + 5$, где m и n — целые числа. Тогда

$$ab = (9m + 7)(9n + 5) = 81mn + 63n + 45m + 35 = \\ = 9(9mn + 7n + 5m + 3) + 8.$$

При делении произведения ab на 9 получится остаток 8.

732. Данное число равно $5p + 1$ и $7k + 1$, причём $p = k + 4$. Отсюда $p = 14$, $k = 10$. Искомое число: $5 \cdot 14 + 1 = 71$.

733. Множество натуральных чисел можно разбить на шесть классов: числа вида $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ и $6k + 5$, где k — целое число.

Если $n = 6k$, то произведение $n(2n + 1)(7n + 1)$ делится на 6, так как первый множитель делится на 6.

Если $n = 6k + 1$, то произведение имеет вид

$$(6k + 1)(12k + 3)(42k + 8)$$

и делится на 6, так как второй множитель делится на 3, а третий — на 2.

Аналогично рассуждаем в остальных случаях.

ГЛАВА V

Формулы сокращённого умножения

§ 12. Квадрат суммы и квадрат разности

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
32	Возведение в квадрат и в куб суммы и разности двух выражений	3(3)
33	Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности	2(3)

Содержание материала

Формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, их применение в преобразованиях выражений, при доказательстве тождеств и решении уравнений. Использование формул $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ и $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ для представления выражения вида $a^2 \pm 2ab + b^2$ в виде квадрата двучлена. Формулы куба суммы и куба разности двух выражений: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, их применение для преобразования в многочлен выражений вида $(a + b)^3$, $(a - b)^3$.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы ознакомить учащихся с формулами квадрата суммы и квадрата разности двух выражений: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, сформировать умение использовать эти формулы для упрощения выражений, доказательства тождеств, решения уравнений, а также выработать умение представлять выражение $a^2 \pm 2ab + b^2$ в виде квадрата двучлена.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа формируются умения учащихся доказывать справедливость формул $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, применять эти формулы для преобразования в многочлен квадрата суммы или квадрата разности двух выражений, использовать равенства $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

для представления трёхчлена $a^2 \pm 2ab + b^2$ в виде квадрата суммы $a + b$ или квадрата разности $a - b$, применять изученные формулы при упрощении выражений, доказательстве тождеств, решении уравнений, задач на делимость и т. п. Учащиеся овладевают также умением использовать формулы куба суммы и куба разности двух выражений в простейших ситуациях.

Методический комментарий

В главе V «Формулы сокращённого умножения» продолжается формирование умений выполнять преобразование целых выражений, начатое в предшествующих главах. Формируемые здесь умения используются в действиях с алгебраическими дробями, в преобразованиях квадратных корней и корней n-й степени. Они также находят широкое применение при решении уравнений и неравенств с одной переменной, систем уравнений с двумя переменными, исследовании функций и т. п. В связи с этим необходимо добиваться усвоения материала, представленного в данной главе, всеми учащимися.

Изучение § 12 «Квадрат суммы и квадрат разности» начинается с вывода формул $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ и ознакомления учащихся с соответствующими словесными формулировками. Полезно рассказать учащимся, что справедливость равенства $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ при положительных значениях a и b была доказана геометрически в «Началах» Евклида ещё в III в. до н. э., и рассмотреть с ними приведённый в учебнике рисунок 70.

Система упражнений в пункте 32 начинается с заданий **799—811**, направленных на непосредственное применение формул $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Правильность выполнения этих заданий является необходимым условием для перехода к упражнениям **812—826**, в которых эти формулы применяются в усложнённых ситуациях.

При изучении данного пункта учащиеся знакомятся также с формулами куба суммы и куба разности двух выражений. В связи с тем что эти формулы сложны и не находят применения в последующих темах, от учащихся можно не требовать их запоминания, а при выполнении соответствующих упражнений **827—829** разрешить пользоваться учебником или записями в тетрадях.

Изучение § 12 «Квадрат суммы и квадрат разности» завершает пункт 33, в котором учащиеся знакомятся с применением формул квадрата суммы и квадрата разности для разложения многочленов на множители. Необходимо иметь в виду, что замена трёхчленов $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$ соответственно выражениями $(a + b)^2$ и $(a - b)^2$ широко используется при решении многих задач, например при упрощении выражений, доказательстве тождеств, исследовании функций и т. п.

Система упражнений в пункте 33 начинается с простейших заданий **833—835**, в которых учащимся предлагается представить каждый из заданных квадратных трёхчленов в виде квадрата двучлена. При выполнении этих упражнений можно порекомендовать учащимся сначала определить, квадраты каких выражений входят в качестве слагаемых в данный трёхчлен, а затем проверить, является ли третий член удвоенным произведением этих выражений или выражением, ему противоположным. Далее учащиеся приступают к заданиям **836—838** на восстановление пропущенных членов трёхчлена. Заметим, что при выполнении подобных упражнений учителю не следует спешить с подсказкой, предоставляя учащимся возможность самостоятельно найти пропущенные члены многочленов. Интерес для учащихся представляют включённые в данный пункт упражнения **847**, **848**, в которых приходится выделять из многочлена слагаемое, тождественно равное квадрату некоторого двучлена. Из дополнительных упражнений к § 12 рекомендуется обратить внимание на задания **966**, **970**, связанные с более сложными преобразованиями по сравнению с упражнениями, представленными в пунктах 32 и 33.

В заключение отметим, что при изучении главы V важную роль играет формирование у учащихся понимания структуры выражений, свободного владения используемой терминологией. С этой целью рекомендуется систематически предлагать учащимся устные упражнения следующих типов:

1. Найдите сумму квадратов чисел 5 и -1; квадрат суммы этих чисел.

2. Вычислите значение выражения $(-6-1)^2$; $(-6)^2-(-1)^2$; $-6-(-1)^3$.

3. Найдите значение выражения $a^2+2ab+b^2$ при $a=-1$, $b=-3$; при $a=3$, $b=-4$.

4. Прочитайте выражение, используя термины «сумма квадратов», «квадрат суммы», «куб суммы», «удвоенное произведение» и т. п.: a^2+b^2, $(m+n)^2$, $2pq$, $(p-3q)^2$, $3x^2y$, $(x^2+y^2)^2$.

5. Закончите фразу: «Квадрат суммы двух выражений равен...» или «Квадрат разности двух выражений равен...».

Подобные задания можно записать на карточках и предлагать учащимся, закончившим работу на доске, открыть одну из карточек и выполнить записанное на ней задание. Использование этих карточек поможет учащимся овладеть вводимой терминологией, запомнить соответствующие формулы и научиться свободно оперировать ими.

Указания к основным упражнениям учебника

802. Преобразуем левую и правую части равенства:

$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 9)^2 = n^2 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 18n + 81 = 3n^2 + 22n + 85$;

$(n - 1)^2 + (n + 5)^2 + (n + 7)^2 + 10 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + 10n + 25 + n^2 + 14n + 49 + 10 = 3n^2 + 22n + 85$.

Получили одно и то же выражение. Значит, исходное равенство верно при любом n.

806. а) Выражению $(x + y)^2$ тождественно равны $(y + x)^2$ и $(-x - y)^2$;

б) выражению $(x - y)^2$ тождественно равны $(y - x)^2$, $(-y + x)^2$ и $(-x + y)^2$.

810. г) $199^2 = (200 - 1)^2 = 40\,000 - 400 + 1 = 39\,601$;

з) $10{,}2^2 = (10 + 0{,}2)^2 = 100 + 0{,}04 + 4 = 104{,}04$.

815. в) $121 - (11 - 9x)^2 = 121 - (121 - 198x + 81x^2) = 121 - 121 + 198x - 81x^2 = 198x - 81x^2$;

е) $a^4 - 81 - (a^2 + 9)^2 = a^4 - 81 - (a^4 + 18a^2 + 81) = a^4 - 81 - a^4 - 18a^2 - 81 = -18a^2 - 162$.

817. д) $(a + 3)(5 - a) - (a - 1)^2 = 5a + 15 - a^2 - 3a - (a^2 - 2a + 1) = 15 - a^2 + 2a - a^2 + 2a - 1 = -2a^2 + 4a + 14$;

е) $(5 + 2y)(y - 3) - (5 - 2y)^2 = 5y + 2y^2 - 15 - 6y - (25 - 20y + 4y^2) = 2y^2 - y - 15 - 25 + 20y - 4y^2 = -2y^2 + 19y - 40$.

818. а) $(x - 10)^2 - x(x + 80) = x^2 - 20x + 100 - x^2 - 80x = 100 - 100x$. Если $x = 0{,}97$, то $100 - 100x = 100 - 97 = 3$.

в) $(2x + 0{,}5)^2 - (2x - 0{,}5)^2 = 4x^2 + 2x + 0{,}25 - (4x^2 - 2x + 0{,}25) = 4x^2 + 2x + 0{,}25 - 4x^2 + 2x - 0{,}25 = 4x$.

Если $x = -3{,}5$, то $4x = 4 \cdot (-3{,}5) = -14$.

823. б) $6x(x^2 + 5x)^2 = 6x(x^4 + 10x^3 + 25x^2) = 6x^5 + 60x^4 + 150x^3$;

в) $(a + 2)(a - 1)^2 = (a + 2)(a^2 - 2a + 1) = a^3 + 2a^2 - 2a^2 - 4a + a + 2 = a^3 - 3a + 2$.

825. Преобразуем левую и правую части равенства:

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$;

$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$.

826. Составим и решим уравнение:

а) $(x + 1)^2 - (x - 3)^2 = 120$; $x^2 + 2x + 1 - x^2 + 6x - 9 = 120$; $x = 16$;

б) $(2x + 10)^2 = 4(x - 5)^2$; $4x^2 + 40x + 100 = 4x^2 - 40x + 100$; $x = 0$.

829. а) $(x + 3)^3 - (x - 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 = 18x^2 + 54$;

б) $(a-2b)^3+6ab(a-2b)=a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+6a^2b-$ $-12ab^2=a^3-8b^3$.

837. а) Пусть первый член двучлена равен x. Из условия $12ab=2\cdot x\cdot 2a$ находим, что $x=3b$. Получаем тождество $(3b+2a)^2=9b^2+12ab+4a^2$.

б) Пусть второй член двучлена равен a. Из условия $a^2=49y^2$ находим, что $a=7y$ или $a=-7y$. Получаем два тождества:

$$(3x+7y)^2=9x^2+42xy+49y^2;$$
$$(3x-7y)^2=9x^2+(-42)xy+49y^2.$$

838. в) Пусть $16x^2+24xy+*=(4x+a)^2$. Из условия $24xy=2\cdot 4\cdot x\cdot a$ находим, что $a=3y$. Значит, знак * надо заменить одночленом $9y^2$.

г) Пусть $*-42pq+49q^2=(x-7q)^2$. Из условия $-42pq=$ $=-2\cdot x\cdot 7q$ находим, что $x=3p$. Значит, знак * надо заменить одночленом $9p^2$.

839. г) $-44ax+121a^2+4x^2=(11a-2x)^2$;

д) $4cd-25c^2-0{,}16d^2=-(25c^2-4cd+0{,}16d^2)=-(5c-0{,}4d)^2$;

е) $-0{,}49x^2-1{,}4xy-y^2=-(0{,}49x^2+1{,}4xy+y^2)=-(0{,}7x+y)^2$.

840. Предварительно представим трёхчлен в виде квадрата двучлена.

а) $y^2-2y+1=(y-1)^2$.

Если $y=101$, то $(y-1)^2=(101-1)^2=10\,000$; если $y=0{,}6$, то $(y-1)^2=(0{,}6-1)^2=(-0{,}4)^2=0{,}16$.

841. б) Утверждение неверно, так как $x^2+20x+100=$ $=(x+10)^2$ и значение этого выражения при $x=-10$ равно нулю.

843. в) $-x^2-4x-4\leqslant 0$, так как

$$-x^2-4x-4=-(x^2+4x+4)=-(x+2)^2;$$

г) $-x^2+18x-81\leqslant 0$, так как

$$-x^2+18x-81=-(x^2-18x+81)=-(x-9)^2.$$

844. г) $\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{15}xy+\frac{1}{25}y^2=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\right)^2$;

д) $100b^2+9c^2-60bc=(10b-3c)^2$.

В заданиях «в» и «е» представить выражение в виде квадрата двучлена невозможно.

846. а) $4a^6-4a^3b^2+b^4=(2a^3-b^2)^2=(2a^3-b^2)(2a^3-b^2)$;

б) $b^8-a^2b^4+\frac{1}{4}a^4=\left(b^4-\frac{1}{2}a^2\right)^2=\left(b^4-\frac{1}{2}a^2\right)\left(b^4-\frac{1}{2}a^2\right)$.

848. б) $4y^2-4y+6=4y^2-4y+1+5=(2y-1)^2+5$; $(2y-1)^2\geqslant 0$ при любом значении y, следовательно, $(2y-1)^2+$ $+5>0$;

г) $9x^2 + 4 - 6xy + 4y^2 = (9x^2 - 6xy + y^2) + 3y^2 + 4 = (3x - y)^2 + 3y^2 + 4$;
$(3x - y)^2 \geqslant 0$ и $3y^2 \geqslant 0$ при любых значениях x и y, следовательно, $(3x - y)^2 + 3y^2 + 4 > 0$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

966. $(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

967. б) $(x + 9)^2 + (8 - x)(x + 26) = x^2 + 18x + 81 + 8x - x^2 + 208 - 26x = 289$ при любом значении x.

968. а) $(3x + 1)^3 = 27x^2(x + 1) + 8x + 2$;
$27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 27x^3 + 27x^2 + 8x + 2$; $x = 1$;

б) $4x^2(2x + 9) = (2x + 3)^3 + 12(3x + 1)$;
$8x^3 + 36x^2 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 + 36x + 12$; $90x + 39 = 0$;
$x = -\frac{13}{30}$.

970. ж) $y - y^2 - 0{,}25 = -(y^2 - y + 0{,}25) = -(y - 0{,}5)^2$;

з) $9 - m + \frac{1}{36}m^2 = \left(3 - \frac{1}{6}m\right)^2$;

и) $-25 - 2n - 0{,}04n^2 = -(5 + 0{,}2n)^2$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 28

4. б) $\frac{(4{,}17 - 3{,}94)^2}{4{,}17^2 + 3{,}94^2} < 1$, так как $(4{,}17 - 3{,}94)^2 = 4{,}17^2 - 2 \cdot 4{,}17 \cdot 3{,}94 + 3{,}94^2 < 4{,}17^2 + 3{,}94^2$.

9. б) Пусть первый член двучлена равен y. Из условия $-10ax = -2y \cdot x$ находим, что $y = 5a$. Тождество имеет вид

$$(5a - x)^2 = 25a^2 - 10ax + x^2.$$

11. Пусть a — целое число, не кратное 3. Тогда оно может иметь вид $3k + 1$ или $3k + 2$, где k — целое число.

Если $a = 3k + 1$, то $a^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$. Это число кратно 3.

Если $a = 3k + 2$, то $a^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$. Это число кратно 3.

12. Пусть x см — сторона большего квадрата, тогда сторона меньшего квадрата равна $(30 - x)$ см, а площади квадратов равны соответственно x^2 см^2 и $(30 - x)^2$ см^2. Имеем уравнение

$$x^2 - (30 - x)^2 = 180; \; x = 18.$$

Стороны квадратов 18 см и 12 см.

14. а) $(3x^n + 2y^n)^2 - 12(xy)^n = 9x^{2n} + 12x^ny^n + 4y^{2n} - 12x^ny^n = 9x^{2n} + 4y^{2n}$, где n — натуральное число;

б) $(0{,}5a^{2n+1} - b^{2n+1})^2 + (ab)^{2n+1} = 0{,}25a^{4n+2} - a^{2n+1}b^{2n+1} + b^{4n+2} + a^{2n+1}b^{2n+1} = 0{,}25a^{4n+2} + b^{4n+2}$, где n — натуральное число.

Пункт 29

8. $a^2 - 5a - 2ab + b^2 + 5b = (a^2 - 2ab + b^2) - (5a - 5b) = (a - b)^2 - 5(a - b) = (a - b)(a - b - 5) = 7 \cdot (7 - 5) = 14$.

9. а) $x^4 - 2x^2y^3 + a^8 + y^6 = (x^4 - 2x^2y^3 + y^6) + a^8 = (x^2 - y^3)^2 + (a^4)^2$;

б) $a^{12} + b^{16} - 2a^6b^8 - c^{24} = (a^6 - b^8)^2 - (c^{12})^2$.

10. $a(a + 6) + b(b + 6) + 2ab = a^2 + 6a + b^2 + 6b + 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) + 6(a + b) = (a + b)^2 + 6(a + b) = 8^2 + 6 \cdot 8 = 112$.

12. б) Утверждение неверно, так как $9m^2 + 100 - 60m = (3m - 10)^2$ и значение этого выражения при $m = \frac{10}{3}$ равно нулю.

13. а) $a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = (a + b)^2 - 2ab = p^2 - 2q$;

б) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a + b)^2 - 4ab = p^2 - 4q$.

§ 13. Разность квадратов. Сумма и разность кубов

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
34	Умножение разности двух выражений на их сумму	2(3)
35	Разложение разности квадратов на множители	2(3)
36	Разложение на множители суммы и разности кубов	2(3)
	Контрольная работа № 7	1

Содержание материала

Формула $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, её использование для представления произведения разности и суммы двух выражений в виде разности квадратов этих выражений. Формула $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, её использование для разложения на множители разности квадратов двух выражений. Формулы $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, их применение для разложения на множители суммы и разности кубов двух выражений.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы выработать умение применять формулу $(a-b)\times$ $\times(a+b)=a^2-b^2$ для преобразования произведения двучленов $a-b$ и $a+b$ в многочлен a^2-b^2, а также использовать формулу для разложения разности квадратов на множители. Сформировать представление об использовании формул $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ для разложения на множители суммы и разности кубов двух выражений.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного материала формируется умение учащихся представлять произведение разности и суммы двух выражений в виде разности их квадратов, выполнять разложение на множители разности квадратов двух выражений, использовать формулы $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, $a^2-b^2=$ $=(a-b)(a+b)$ для преобразования выражений, решения уравнений и задач на делимость, выполнения вычислений. Учащиеся овладевают умением применять формулы $a^3+b^3=$ $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ для разложения на множители разности и суммы кубов в несложных ситуациях.

Методический комментарий

Формулы $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ и $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ широко используются в преобразовании целых и дробных выражений, а также выражений, содержащих степени с целыми показателями, квадратные корни и корни n-й степени. Эти формулы находят применение при решении уравнений и неравенств с одной переменной, систем уравнений с двумя переменными, при исследовании функций. Этим обусловлена необходимость добиваться от всех учащихся знания данных формул и умения свободно оперировать ими.

Изучение пункта 34 «Умножение разности двух выражений на их сумму» начинается с вывода формулы

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Учащиеся должны запомнить эту формулу и соответствующую словесную формулировку. Важно обратить их внимание на то, что уменьшаемое в разности квадратов a^2-b^2 определяется по первому члену, записанному в множителе $a-b$, например:

$$(a+3x)(3x-a)=9x^2-a^2.$$

Упражнения, включённые в пункт 34, можно разбить на три группы. Первую группу составляют простейшие задания **854—857**, направленные на формирование умения применять формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ и запоминание соответствующей словесной формулировки. Только убедившись в том, что учащиеся безошибочно выполняют соответствующие преобразования и правильно воспроизводят правило умножения разности двух выражений на их сумму, можно переходить к более сложным заданиям **858—868**, в которых изученная формула и соответствующая словесная формулировка используются в усложнённой ситуации. В этой группе заданий учащихся обычно привлекает упражнение **858**, в котором предлагается вместо знака * вписать пропущенный одночлен, а также задания **860**, **861**, иллюстрирующие возможности применения изученной формулы для упрощения вычислений. Особое внимание следует уделить упражнению **862**, в котором учащимся предлагается применить изученную формулу в усложнённой ситуации. Третью группу составляют задания **869—877**, в которых рассмотренные в пункте 34 преобразования используются в сочетании с различными преобразованиями целых выражений, изученными ранее. Специально рекомендуется остановиться на упражнении **874**, предназначенном для работы в парах, и обсудить с учащимися, в каком случае выбранные обозначения приводят к более простым преобразованиям.

Далее учащиеся приступают к изучению пункта 35 «Разложение разности квадратов на множители». Они знакомятся с формулой

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

непосредственно следующей из формулы

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,$$

а также с соответствующей словесной формулировкой. Следует отметить, что формула $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ используется в курсе алгебры при решении широкого круга задач. Она находит применение в тождественных преобразованиях целых и дробных выражений, выражений, содержащих квадратные корни и корни n-й степени, а также при решении уравнений и неравенств с одной переменной, систем уравнений с двумя переменными, при доказательстве тождеств и выполнении вычислений.

Изучение материала пункта 35 строится по той же схеме, которая использовалась в пункте 34. Сначала выполняются простейшие упражнения **883—888**, в которых формула $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ находит непосредственное применение. При работе с этими упражнениями в поле зрения учителя постоянно должны находиться слабые учащиеся, так как без выработки соответствующих умений они не смогут успешно продолжать изучение курса алгебры. Следующий блок упражнений **889—900** содержит задания, в которых формула $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ применяется для разложения выражений на множители в более сложных ситуациях, в частности для решения уравнений, доказательства тождеств, исследования вопроса о делимости значения выражения. Завершает этот блок заданий задача-исследование **900**, в которой предлагается обсудить вопрос о делимости на 12 значения выражения $p^2 - 1$, где p — простое число. При выполнении подобных упражнений учащиеся убеждаются в значимости приобретаемого ими умения выполнять разложение на множители разности квадратов двух выражений.

В связи с тем что формулы $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ и $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ находят широкое применение в курсе алгебры, рекомендуется при изучении материала § 13 и 14, а также последующих тем продолжить использование специальных карточек-заданий. Закончив работу на доске, учащийся открывает одну из таких карточек и выполняет устно записанное на ней задание. Примером могут служить следующие задания:

1. Закончите фразу: «Разность квадратов двух выражений равна...».

2. Разложите на множители выражение $36 - a^2$; $9p^2 - 4m^2$; $81x^2y^2 - 1$.

3. Представьте в виде разности квадратов произведение $(x - 7y)(x + 7y)$; $(3a^2 + b^3)(b^3 - 3a^2)$.

4. Вычислите разность квадратов чисел 7 и 2 и квадрат разности этих чисел.

5. Найдите значение выражения $11^2 - 9^2$; $46^2 - 36^2$.

При изучении пунктов 34 и 35 рекомендуется использовать дополнительные упражнения **972**, **978**, **984**.

Завершает данный параграф пункт 36 «Разложение на множители суммы и разности кубов». Учащиеся знакомятся с формулами

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),\ \ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

и соответствующими словесными формулировками. В связи с тем что эти формулы находят значительно меньшее применение в курсе алгебры по сравнению с другими формулами сокращённого умножения, рассмотренными в пунктах 34 и 35, можно не требовать от учащихся их запоминания и разрешить при выполнении упражнений пользоваться учебником или записями в тетрадях. В систему упражнений, представленных в пункте 36, включены лишь простейшие задания, рассчитанные на прямое применение изучаемых формул, используемых для преобразования суммы и разности кубов.

Дополнительные упражнения к данному пункту **986**—**988** носят дублирующий характер. Хорошо успевающим учащимся можно предложить выполнить усложнённое задание **989**.

Изучение § 13 рекомендуется завершить уроком на подготовку к контрольной работе № 7, предложив учащимся выполнить задания, аналогичные тем, которые будут включены в контрольную работу.

Указания к основным упражнениям учебника

860. г) $201 \cdot 199 = (200 + 1)(200 - 1) = 40\,000 - 1 = 39\,999$;
ж) $1{,}05 \cdot 0{,}95 = (1 + 0{,}05)(1 - 0{,}05) = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

861. г) $2{,}03 \cdot 1{,}97 = (2 + 0{,}03)(2 - 0{,}03) = 4 - 0{,}0009 = 3{,}9991$;
е) $29{,}8 \cdot 30{,}2 = (30 - 0{,}2)(30 + 0{,}2) = 900 - 0{,}04 = 899{,}96$.

Можно предложить учащимся проверить результаты, выполнив вычисления с помощью калькулятора.

865. б) $\left(4 - \frac{1}{3}b\right)\left(4 + \frac{1}{3}b\right) = 16 - \frac{1}{9}b^2$. Наибольшее значение этого выражения равно 16 при $b = 0$.

866. а) $(5a - 0{,}2)(0{,}2 + 5a) = 25a^2 - 0{,}04$. Наименьшее значение этого выражения равно $-0{,}04$ при $a = 0$; наибольшего значения не существует.

874. (*Для работы в парах.*) 1) $19 \cdot 20 \cdot 21 + 20 = 20 \times (19 \cdot 21 + 1) = 20(399 + 1) = 20 \cdot 400 = 20 \cdot 20^2 = 20^3$.

2) Пусть p — наименьшее из трёх целых чисел, тогда следующие за ним числа имеют вид $p + 1$ и $p + 2$.

$p(p + 1)(p + 2) + (p + 1) = (p + 1)(p(p + 2) + 1) = (p + 1) \times (p^2 + 2p + 1) = (p + 1)(p + 1)^2 = (p + 1)^3$.

Рассмотрим другой способ решения.

Пусть p — среднее из трёх целых чисел, тогда остальные числа имеют вид $p - 1$ и $p + 1$.

$(p - 1)p(p + 1) + p = p((p - 1)(p + 1) + 1) = p(p^2 - 1 + 1) = pp^2 = p^3$.

Во втором случае преобразования оказываются проще.

875. в) $(8p - q)(q + 8p) - (p + q)(p - q) = (64p^2 - q^2) - (p^2 - q^2) = 64p^2 - q^2 - p^2 + q^2 = 63p^2$;

г) $(2x - 7y)(2x + 7y) + (2x - 7y)(7y - 2x) = (2x - 7y) \times (2x + 7y + 7y - 2x) = (2x - 7y) \cdot 14y = 28xy - 98y^2$.

876. б) $x - 3x(1 - 12x) = 11 - (5 - 6x)(6x + 5)$;
$x - 3x + 36x^2 = 11 - 25 + 36x^2$;
$-2x = -14$; $x = 7$.

886. д) $0{,}849^2 - 0{,}151^2 = (0{,}849 + 0{,}151)(0{,}849 - 0{,}151) = 1 \cdot 0{,}698 = 0{,}698$;

е) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2 = \left(5\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3}\right)\left(5\frac{2}{3} - 4\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 1\frac{1}{3} = 10 \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

887. а) $\frac{36}{13^2 - 11^2} = \frac{36}{2 \cdot 24} = \frac{3}{4}$; б) $\frac{79^2 - 65^2}{420} = \frac{14 \cdot 144}{420} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$;

в) $\frac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2} = \frac{26 \cdot 80}{28 \cdot 130} = \frac{4}{7}$; г) $\frac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2} = \frac{21 \cdot 85}{17 \cdot 105} = 1$.

894. г) $25 - (a + 7)^2 = (5 + a + 7)(5 - a - 7) = (a + 12)(-a - 2)$;

д) $(5y - 6)^2 - 81 = (5y - 6 - 9)(5y - 6 + 9) = (5y - 15)(5y + 3) = 5(y - 3)(5y + 3)$.

895. д) $(-2a^2 + 3b)^2 - 4a^4 = (-2a^2 + 3b - 2a^2)(-2a^2 + 3b + 2a^2) = 3b(3b - 4a^2)$;

е) $b^6 - (x - 4b^3)^2 = (b^3 + x - 4b^3)(b^3 - x + 4b^3) = (x - 3b^3)(5b^3 - x)$.

897. в) $(m + n)^2 - (m - n)^2 = (m + n + m - n)(m + n - m + n) = 2m \cdot 2n = 4mn$;

г) $(4c - x)^2 - (2c + 3x)^2 = (4c - x + 2c + 3x)(4c - x - 2c - 3x) = (6c + 2x)(2c - 4x) = 4(3c + x)(c - 2x)$.

898. а) $(4n + 5)^2 - 9 = (4n + 5 + 3)(4n + 5 - 3) = (4n + 8) \times (4n + 2) = 4(n + 2)(4n + 2)$.

Следовательно, при любом натуральном n значение выражения делится на 4.

900. (*Задача-исследование.*) 2) $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, где p — простое число, $p > 3$. Все простые числа, большие 3, — числа нечётные, следовательно, $(p - 1)$ и $(p + 1)$ — чётные числа, а произведение двух чётных чисел кратно 4.

3) Из трёх последовательных целых чисел $p - 1$, p и $p + 1$ одно делится на 3. Число p — простое и больше 3, следовательно, оно на 3 не делится. Значит, на 3 делится одно из чисел $(p - 1)$ или $(p + 1)$, а следовательно, и их произведение.

4) Так как значение выражения $p^2 - 1$ при указанных условиях кратно и 4 и 3, то оно кратно 12.

911. в) $-a^6 + \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - (a^2)^3 = \left(\frac{1}{2} - a^2\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}a^2 + a^4\right)$;

г) $-\frac{1}{27} - b^6 = -\left(\frac{1}{3} + b^2\right)\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}b^2 + b^4\right)$.

913. а) $327^3 + 173^3 = (327 + 173)(327^2 - 327 \cdot 173 + 173^2) = 500 \cdot (327^2 - 327 \cdot 173 + 173^2)$ — это произведение делится на 500;

б) $731^3 - 631^3 = 100 \cdot (731^2 + 731 \cdot 631 + 631^2)$ — это произведение делится на 100.

914. а) $38^3 + 37^3 = 75 \cdot (38^2 - 38 \cdot 37 + 37^2)$ — это произведение делится на 75;

б) $99^3 - 74^3 = 25 \cdot (99^2 + 99 \cdot 74 + 74^2)$ — это произведение делится на 25.

Заметим, что при решении заданий **913, 914** не требуется вычислять значение каждого множителя.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

975. в) $(a-4)(a+4)+(2a-1)^2=a^2-16+4a^2-4a+1=$ $=5a^2-4a-15$;

д) $(2a-5)^2-(5a-2)^2=(2a-5+5a-2)(2a-5-5a+2)=$ $=(7a-7)(-3a-3)=7(a-1)\cdot(-3)(a+1)=-21(a^2-1)=21-$ $-21a^2$.

976. Составим разность между суммой квадратов выражений $x+2$ и $x-2$ и их удвоенным произведением. Выполним преобразования:

$$((x+2)^2+(x-2)^2)-2(x+2)(x-2)=((x+2)-(x-2))^2=4^2=16.$$

Следовательно, удвоенное произведение выражений $x+2$ и $x-2$ меньше суммы их квадратов на 16 при любом значении x.

977. б) $(m+n-3)(m+n+3)=(m+n)^2-9=m^2+2mn+$ $+n^2-9$;

е) $(a-3x+6)(a+3x+6)=((a+6)-3x)((a+6)+3x)=$ $=(a+6)^2-9x^2=a^2+12a+36-9x^2$.

978. г) $(5x-1)^2-(1-3x)^2=16x(x-3)$;

$(5x-1+1-3x)(5x-1-1+3x)=16x^2-48x$;

$2x(8x-2)=16x^2-48x$;

$16x^2-4x=16x^2-48x$; $4x=48x$; $x=0$.

980. б) $\dfrac{39{,}5^2-3{,}5^2}{57{,}5^2-14{,}5^2}=\dfrac{36\cdot 43}{43\cdot 72}=\dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{17{,}5^2-9{,}5^2}{131{,}5^2-3{,}5^2}=\dfrac{8\cdot 27}{128\cdot 135}=\dfrac{1\cdot 1}{16\cdot 5}=\dfrac{1}{80}$.

982. ж) $9(a+1)^2-1=(3a+3-1)(3a+3+1)=(3a+2)\times$ $\times(3a+4)$;

з) $4-25(x-3)^2=(2+5x-15)(2-5x+15)=(5x-13)\times$ $\times(17-5x)$.

984. б) $(2n+3)^2-(2n-1)^2=(2n+3+2n-1)(2n+3-2n+1)=$ $=(4n+2)\cdot 4=8\cdot(2n+1)$. Следовательно, при любом значении n значение выражения кратно 8.

г) $(5n+1)^2-(2n-1)^2=(5n+1+2n-1)(5n+1-2n+1)=$ $=7n\cdot(3n+2)$. Значение этого произведения кратно 7 при любом значении n.

985. а) Предварительно применим формулу разности квадратов:

$(3a-2b)^2-(2a-b)^2=(3a-2b+2a-b)(3a-2b-2a+b)=$ $=(5a-3b)(a-b)$.

Если $a=1{,}35$, $b=-0{,}65$, то

$(5a-3b)(a-b)=(5\cdot 1{,}35+0{,}65\cdot 3)(1{,}35+0{,}65)=$ $=(6{,}75+1{,}95)\cdot 2=8{,}7\cdot 2=17{,}4$.

б) Предварительно применим формулы квадрата суммы и квадрата разности:

$(2y-c)^2+(y+2c)^2=4y^2-4yc+c^2+y^2+4yc+4c^2=5y^2+$ $+5c^2=5(y^2+c^2)$.

Если $c=1{,}2$, $y=-1{,}4$, то
$5(y^2+c^2)=5((-1{,}4)^2+1{,}2^2)=5(1{,}96+1{,}44)=5\cdot 3{,}4=17$.

987. б) $-x^{15}+\frac{1}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^3-(x^5)^3=\left(\frac{1}{3}-x^5\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{x^5}{3}+x^{10}\right);$

в) $3\frac{3}{8}a^{15}+b^{12}=\left(\frac{3}{2}a^5\right)^3+(b^4)^3=\left(\frac{3}{2}a^5+b^4\right)\left(\frac{9}{4}a^{10}-\frac{3a^5b^4}{2}+b^8\right)=$

$=\left(1\frac{1}{2}a^5+b^4\right)\left(2\frac{1}{4}a^{10}-1\frac{1}{2}a^5b^4+b^8\right);$

г) $1\frac{61}{64}x^{18}+y^3=\left(\frac{5}{4}x^6\right)^3+y^3=\left(\frac{5}{4}x^6+y\right)\left(\frac{25}{16}x^{12}-\frac{5}{4}x^6y+y^2\right)=$

$=\left(1\frac{1}{4}x^6+y\right)\left(1\frac{9}{16}x^{12}-1\frac{1}{4}x^6y+y^2\right).$

988. в) $66^3+34^3=(66+34)(66^2-66\cdot 34+34^2)=100\cdot 2^2\times$ $\times(33^2-33\cdot 17+17^2)=400\cdot(33^2-33\cdot 17+17^2)$. Значит, значение выражения делится на 400.

г) $54^3-24^3=(54-24)(54^2+54\cdot 24+24^2)=30\cdot 6^2\times$ $\times(9^2+9\cdot 4+4^2)=1080\cdot(9^2+9\cdot 4+4^2)$. Значит, значение выражения делится на 1080.

989. д) $27a^3-(a-b)^3=(3a-a+b)(9a^2+3a(a-b)+(a-b)^2)=$ $=(2a+b)\cdot(9a^2+3a^2-3ab+a^2-2ab+b^2)=(2a+b)\times$ $\times(13a^2-5ab+b^2);$

е) $1000+(b-8)^3=(10+b-8)(100-10(b-8)+(b-8)^2)=$ $=(2+b)\cdot(100-10b+80+b^2-16b+64)=(2+b)\times$ $\times(b^2-26b+244)$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 30

3. Квадрат со стороной a см имеет площадь a^2 см^2, а прямоугольник со сторонами $(a+7)$ см и $(a-7)$ см имеет площадь $(a+7)(a-7)=a^2-49$ (см^2), что на 49 см^2 меньше площади квадрата. Верный ответ под номером 2.

8. а) $(a-3)(a+3)(9+a^2)=(a^2-9)(a^2+9)=a^4-81;$

в) $(c-1)^2(c+1)^2=((c-1)(c+1))^2=(c^2-1)^2=c^4-2c^2+1$.

9. б) $(6x^{k-2}-y^{k+2})(y^{k+2}+6x^{k-2})=36x^{2k-4}-y^{2k+4}$, где $k\geqslant 2$.

13. а) $(x^n+y^n)(x^{2n}+y^{2n})(x^n-y^n)=(x^{2n}-y^{2n})(x^{2n}+y^{2n})=$ $=x^{4n}-y^{4n};$

б) $(a^{n+1}-b^{n+1})(a^{2n+2}+b^{2n+2})(a^{n+1}+b^{n+1})=(a^{2n+2}-b^{2n+2})\times$ $\times(a^{2n+2}+b^{2n+2})=a^{4n+4}-b^{4n+4}$.

Пункт 31

10. б) $(10n+5)^2-(2n+1)^2=(10n+5+2n+1)\times$ $\times(10n+5-2n-1)=(12n+6)(8n+4)=6(2n+1)\cdot4(2n+1)=$ $=24(2n+1)^2$;

в) $(10n+5)^2-(6n+3)^2=(10n+5+6n+3)(10n+5-6n-3)=$ $=(16n+8)(4n+2)=8(2n+1)\cdot2(2n+1)=16(2n+1)^2$.

11. Числа a и b не делятся на 3, следовательно, при делении на 3 дают остаток 1 или 2. Если числа a и b имеют при делении на 3 одинаковые остатки, то их разность делится на 3, если разные, то на 3 делится их сумма. В обоих случаях произведение $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ делится на 3.

12. Пусть $x=10a+b$; $y=10b+a$;

$x^2-y^2=(10a+b)^2-(10b+a)^2=(10a+b+10b+a)\times$ $\times(10a+b-10b-a)=(11a+11b)(9a-9b)=11(a+b)\cdot9(a-b)=$ $=99(a^2-b^2)$. Значение этого произведения при любых значениях a и b делится на 99.

15. а) $m^2-n^2+12(n-3)=m^2-n^2+12n-36=m^2-$ $-(n^2-12n+36)=m^2-(n-6)^2=(m+n-6)(m-n+6)$;

б) $a^2-11b(2n+11b)-n^2=a^2-22bn-121b^2-n^2=a^2-$ $-(n+11b)^2=(a+n+11b)(a-n-11b)$.

16. в) $81a^{6n-12}-49b^{4n-8}=(9a^{3n-6}-7b^{2n-4})(9a^{3n-6}+7b^{2n-4})$, где $n\geqslant2$;

г) $0{,}16y^{4n-6}-0{,}25y^{2n-4}=(0{,}4y^{2n-3}+0{,}5y^{n-2})(0{,}4y^{2n-3}-0{,}5y^{n-2})$, где $n\geqslant2$.

Пункт 32

5. а) $\dfrac{9^3-7^3}{0{,}4}=\dfrac{(9-7)(9^2+9\cdot7+7^2)}{0{,}4}=\dfrac{2\cdot(81+63+49)}{0{,}4}=\dfrac{2\cdot193}{0{,}4}=965.$

7. б) $767^3-167^3=(767-167)\cdot(767^2+767\cdot167+167^2)=$ $=600\cdot(767^2+767\cdot167+167^2)$. Произведение делится на 300, так как один из множителей делится на 300.

11. б) 33^3-16^3 не делится на 11, так как уменьшаемое делится на 11, а вычитаемое не делится;

$33^3-16^3=(33-16)(33^2+33\cdot16+16^2)=17\cdot(33^2+33\cdot16+16^2)$.

Значит, 33^3-16^3 делится на 17.

12. в) $c^{3n+3}+d^{3n+3}=(c^{n+1}+d^{n+1})(c^{2n+2}-c^{n+1}d^{n+1}+d^{2n+2})$;

г) $x^{3k+6}+y^{3k+6}=(x^{k+2}+y^{k+2})(x^{2k+4}-x^{k+2}y^{k+2}+y^{2k+4})$.

13. а) $a^3+a^2-4ab-8b^3+4b^2=(a^3-8b^3)+(a^2-4ab+4b^2)=$ $=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)+(a-2b)^2=(a-2b)\times$ $\times(a^2+2ab+4b^2+a-2b)$;

б) $x^3+2x^2-64y^3+32y^2+8xy=(x^3-64y^3)+$ $+(2x^2+32y^2+8xy)=(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)+$ $+2(x^2+16y^2+4xy)=(x^2+4xy+16y^2)(x-4y+2)$.

§ 14. Преобразование целых выражений

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
37	Преобразование целого выражения в многочлен	3(3)
38	Применение различных способов для разложения на множители	3(4)
	Контрольная работа № 8	1

Содержание материала

Целое выражение. Преобразование целого выражения в многочлен путём применения правил действий с многочленами и формул сокращённого умножения. Использование различных способов разложения многочленов на множители: вынесения общего множителя за скобки, способа группировки, следствий из формул сокращённого умножения. Применение преобразований целых выражений при доказательстве тождеств, решении уравнений, в задачах на делимость, в вычислениях, в частности при нахождении значений выражений с помощью калькулятора.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы сформировать умение преобразовывать целое выражение в многочлен, используя правила действий с многочленами и формулы сокращённого умножения, а также выполнять разложение целого выражения на множители, применяя вынесение множителя за скобки, способ группировки, следствия из формул сокращённого умножения.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа формируются умения учащихся выполнять преобразования целых выражений в многочлены с помощью изученных правил сложения и вычитания многочленов, умножения одночлена на многочлен, умножения многочленов, а также формул сокращённого умножения, применять различные способы разложения многочленов на множители: вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, следствия из формул сокращённого умножения. Учащиеся овладевают также умением применять преобразования целых выражений для упрощения выражений, при доказательстве тождеств, решении уравнений и задач на делимость, нахождении значений выражений, в частности с использованием калькулятора.

Методический комментарий

Данный параграф завершает изучение преобразований целых выражений в курсе алгебры 7 класса. Он начинается с пункта 37 «Преобразование целого выражения в многочлен». Здесь разъясняется понятие «целое выражение». Учащиеся узнают, что целым выражением называют выражение, составленное из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, в частности возведения в степень. Важно обратить внимание учащихся на то, что к целым выражениям относят также выражения, в которых используется деление на число, отличное от нуля. Они должны уметь выделять целые выражения из предложенной совокупности выражений, приводить примеры выражений, не являющихся целыми.

Включённые в пункт 37 упражнения в содержательном плане близки к тем заданиям, с которыми учащиеся встречались ранее. Однако используемые здесь преобразования связаны с более сложными выкладками и требуют от учащихся внимания и аккуратности. Рекомендуется специально остановиться на упражнении **924**, предназначенном для работы в парах. При проверке в классе результатов выполнения этого упражнения важно обсудить, какому требованию должно удовлетворять пропущенное число и из каких свойств делимости это требование вытекает.

Следующий пункт 38 «Применение различных способов для разложения на множители» позволяет учащимся подняться на новую ступень в изучении преобразований целых выражений. Они могут выбрать тот или иной приём или совокупность приёмов для разложения целого выражения на множители. Если раньше само название темы типа «Разложение на множители способом группировки» служило подсказкой к необходимым действиям, то теперь учащиеся должны самостоятельно определить, какие преобразования и в какой последовательности им предстоит выполнить. Полезно, например, разъяснить им, что начинать разложение на множители следует, если это возможно, с вынесения общего множителя за скобки, а дальше посмотреть, можно ли воспользоваться формулами сокращённого умножения или применить какую-либо группировку слагаемых. Соответствующие случаи рассмотрены в авторских примерах 1—3.

Тематика упражнений, предлагаемых учащимся в пункте 38, разнообразна. В их число входят задания, в которых для разложения некоторого выражения на множители требуется использовать совокупность преобразований, а также различные задания, где разложение выражений на множители применяется для решения уравнений, доказательства тождеств, в задачах на делимость.

Рекомендуется обратить внимание учащихся на разобранный в учебнике пример 4. Здесь они впервые встречаются со случаем, когда многочлен стандартного вида преобразуют в тождественно равное ему более сложное выражение, которым удобно пользоваться при нахождении значения этого многочлена с помощью калькулятора. Аналогичное преобразование учащимся приходится выполнить в упражнении **948**, предназначенном для работы в парах. В ходе его выполнения учащиеся убеждаются в преимуществах способа вычислений, продемонстрированного в примере 4 учебника.

В число дополнительных упражнений к параграфу 14 включено немало усложнённых заданий. Рекомендуется хорошо успевающим учащимся предложить упражнение **1004** на доказательство тождества Эйлера, а также упражнение **1008**, выполнение которого связано с нестандартными преобразованиями.

Указания к основным упражнениям учебника

923. $(2n+1)(n+5)-2(n+3)(n-3)-(5n+13)=2n^2+n+10n+5-2n^2+18-5n-13=6n+10$. Первое слагаемое полученной суммы при любом целом n делится на 6, а второе слагаемое на 6 не делится, следовательно, сумма не делится на 6.

924. (*Для работы в парах.*) 1) Преобразуем разность:

$$(n+8)(n-4)-(n+3)(n-2)=$$
$$=n^2+8n-4n-32-n^2-3n+2n+6=$$
$$=3n-26=3n-27+1=3(n-9)+1.$$

2) Сумма пропущенного числа и 1 должна быть кратна 3, т. е. пропущенное число должно иметь вид $3k-1$, где k — целое число.

3) В качестве пропущенного числа можно взять, например, число 11 (при $k=4$) или число -7 (при $k=-2$).

926. б) $(y-3)^2+3(y+2)(y-2)=9+4y^2$;

$y^2-6y+9+3y^2-12=9+4y^2$; $-6y=12$; $y=-2$.

927. а) $(a-1)(a^2+1)(a+1)-(a^2-1)^2-2(a^2-3)=(a^2-1)\times(a^2+1)-(a^2-1)^2-2a^2+6=(a^2-1)(a^2+1-a^2+1)-2a^2+6=2a^2-2-2a^2+6=4$ при любом значении a.

928. а) $(y-3)(y^2+9)(y+3)-(2y^2-y)^2-19=(y^2-9)\times(y^2+9)-4y^4+4y^3-y^2-19=y^4-81-4y^4+4y^3-y^2-19=-3y^4+4y^3-y^2-100$.

929. а) Для доказательства тождества покажем, что обе части данного равенства тождественно равны одному и тому же выражению.

$(a-3c)(4c+2a)+3c(a+3c)=4ac-12c^2+2a^2-6ac+3ac+$ $+9c^2=ac+2a^2-3c^2;$

$(2a-c)(3c+5a)-8a^2=6ac-3c^2+10a^2-5ac-8a^2=ac+$ $+2a^2-3c^2.$

938. в) $y^8-1=(y^4-1)(y^4+1)=(y^2-1)(y^2+1)(y^4+1)=$ $=(y-1)(y+1)(y^2+1)(y^4+1);$

г) $a^4-b^8=(a^2-b^4)(a^2+b^4)=(a-b^2)(a+b^2)(a^2+b^4).$

940. а) $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=(x-y)\times$ $\times(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2);$

б) $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)=(x-y)\times$ $\times(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4).$

942. в) $-abc-5ac-4ab-20a=-ac(b+5)-4a(b+5)=$ $=(b+5)(-ac-4a)=-a(b+5)(c+4).$

943. б) $-5xy-40y-15x-120=-5y(x+8)-15(x+8)=$ $=(x+8)(-5y-15)=-5(x+8)(y+3).$

944. г) $x^2-a^2-10a-25=x^2-(a^2+10a+25)=x^2-$ $-(a+5)^2=(x-a-5)(x+a+5).$

946. б) $a^2-b^2-a+b=(a^2-b^2)-(a-b)=(a-b)(a+b)-$ $-(a-b)=(a-b)(a+b-1);$

г) $k^2-k-p^2-p=(k^2-p^2)-(k+p)=(k+p)(k-p)-(k+p)=$ $=(k+p)(k-p-1).$

948. (*Для работы в парах.*)

I способ.

$3{,}5x^3=3{,}5\cdot3{,}7\cdot3{,}7\cdot3{,}7=177{,}2855;$

$2{,}1x^2=2{,}1\cdot3{,}7\cdot3{,}7=28{,}749;$

$1{,}9x=1{,}9\cdot3{,}7=7{,}03;$

$177{,}2855-28{,}749+7{,}03-16{,}7=138{,}8665.$

II способ.

Для удобства пользования калькулятором выполним следующие преобразования:

$$(3{,}5x^3-2{,}1x^2+1{,}9x)-16{,}7=(3{,}5x^2-2{,}1x+1{,}9)x-16{,}7=$$
$$=((3{,}5x-2{,}1)x+1{,}9)x-16{,}7.$$

Выполняем следующие действия с помощью калькулятора, не читая и не записывая промежуточные результаты:

1. Находим значение выражения $3{,}5\cdot3{,}7-2{,}1$.
2. Результат умножаем на 3,7.
3. К полученному произведению прибавляем 1,9.
4. Найденную сумму умножаем на 3,7.
5. Из полученного произведения вычитаем 16,7.

Получаем 138,8665.

Учащиеся должны убедиться, что во втором случае затрачено меньше времени.

949. б) $9x - x^3 = 0$; $x(9 - x^2) = 0$; $x(3 - x)(3 + x) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = -3$.

951. $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$. При целом x имеем произведение трёх последовательных целых чисел, из которых по крайней мере одно является чётным и одно — кратным 3, а значит, произведение кратно 6.

952. Пусть последовательные нечётные числа имеют вид $2n + 1$ и $2n + 3$, где n — целое число, тогда

$$(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2 = (2n + 3 + 2n + 1)(2n + 3 - 2n - 1) =$$
$$= (4n + 4) \cdot 2 = 8(n + 1).$$

Произведение делится на 8.

953. Пусть сторона исходного квадрата равна x см, тогда его площадь равна x^2 см^2. После увеличения стороны квадрата на 4 см получится новый квадрат со стороной $(x + 4)$ см и площадью $(x + 4)^2$ см^2. Составим и решим уравнение

$$(x + 4)^2 - x^2 = 96.$$

Получим, что сторона исходного квадрата равна 10 см.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

992. в) $24 - (3y + 1)(4y - 5) = (11 - 6y)(2y - 7)$;
$24 - 12y^2 - 4y + 15y + 5 = 22y - 12y^2 - 77 + 42y$;
$29 - 12y^2 + 11y = 64y - 12y^2 - 77$; $53y = 106$; $y = 2$.

993. Преобразуем правую часть равенства:

$$(2x - 5)(3 + 8x) - (1 - 4x)^2 =$$
$$= 6x - 15 + 16x^2 - 40x - 1 + 8x - 16x^2 = -26x - 16.$$

Получим $y = -26x - 16$. Функция является линейной, так как она задаётся формулой вида $y = kx + b$, где $k = -26$, $b = -16$.

Точка $A(-1; 10)$ принадлежит графику этой функции, так как $(-26) \cdot (-1) - 16 = 10$; точка $B(0; 16)$ не принадлежит графику этой функции, так как $0 \cdot 26 - 16 \neq 10$.

995. б) $(x^2 - 3x + 2)(2x + 5) - (2x^2 + 7x + 17)(x - 4) = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 5x^2 - 15x + 10 - 2x^3 - 7x^2 - 17x + 8x^2 + 28x + 68 = 78$ при любом значении x.

996. Преобразуем левую часть данного равенства:

$$(a^2 + b^2)(ab + cd) - ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) =$$
$$= (a^2 + b^2)ab + (a^2 + b^2)cd - ab(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) =$$
$$= a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2 = (a^2cd + abc^2) + (b^2cd + abd^2) =$$
$$= ac(ad + bc) + bd(bc + ad) = (ad + bc)(ac + bd).$$

Можно доказать это тождество, преобразовав левую и правую части равенства.

997. Выполнив преобразования, получим

$$(b + c - 2a)(c - b) + (c + a - 2b)(a - c) - (a + b - 2c)(a - b) =$$
$$= c^2 - b^2 - 2a(c - b) + a^2 - c^2 - 2b(a - c) - a^2 + b^2 + 2c(a - b) =$$
$$= -2ac + 2ab - 2ab + 2bc + 2ac - 2bc = 0.$$

998. а) $(a + 8)^2 - 2(a + 8)(a - 2) + (a - 2)^2 =$
$= ((a + 8) - (a - 2))^2 = 10^2 = 100.$

999. а) $2(a^2 - 1)^2 - (a^2 + 3)(a^2 - 3) - \frac{1}{2}(a^2 + a - 4)(2a^2 + 3) =$
$= 2(a^4 - 2a^2 + 1) - (a^4 - 9) - \frac{1}{2}(2a^4 + 2a^3 - 8a^2 + 3a^2 + 3a - 12) =$
$= 2a^4 - 4a^2 + 2 - a^4 + 9 - a^4 - a^3 + 2{,}5a^2 - 1{,}5a + 6 = -a^3 - 1{,}5a^2 -$
$- 1{,}5a + 17.$

1000. $(a(a + 2b) + b^2)(a(a - 2b) + b^2)((a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2) =$
$= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2)(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2) =$
$= (a + b)^2(a - b)^2(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2)^2 = (a^4 - b^4)^2 =$
$= a^8 - 2a^4b^4 + b^8.$

1001. а) Преобразуем левую часть равенства. При этом удобно вынести за скобки множитель $(a - b)$:

$$(a + b)^2(a - b) - 2ab(b - a) - 6ab(a - b) =$$
$$= (a - b)(a^2 + 2ab + b^2 + 2ab - 6ab) =$$
$$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)^3.$$

б) Вынесем за скобки множитель $(a + b)$:

$$(a + b)(a - b)^2 + 2ab(a + b) - 2ab(-a - b) =$$
$$= (a + b)(a^2 - 2ab + b^2 + 2ab + 2ab) =$$
$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)^3.$$

1002. Для преобразования левой части равенства воспользуемся формулами суммы кубов и разности квадратов двух выражений.

$$(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) =$$
$$= a^6 + b^6 - (a^6 - b^6) = a^6 + b^6 - a^6 + b^6 = 2b^6.$$

1003. в) Следует обратить внимание учащихся, что первое произведение тождественно равно разности кубов.

$$(2p - 1)(4p^2 + 2p + 1) - p(p - 1)(p + 1) =$$
$$= (8p^3 - 1) - p(p^2 - 1) = 8p^3 - 1 - p^3 + p = 7p^3 + p - 1.$$

Если $p = 1{,}5$, то

$$7p^3 + p - 1 = p(7p^2 + 1) - 1 = 1{,}5 \cdot (7 \cdot 2{,}25 + 1) - 1 = 24{,}125.$$

1004. Преобразуем левую и правую части данного равенства:

$$(p^2 + cq^2)(r^2 + cs^2) = p^2r^2 + cq^2r^2 + cp^2s^2 + c^2q^2s^2;$$
$$(pr + cqs)^2 + c(ps - qr)^2 =$$
$$= p^2r^2 + 2prcqs + c^2q^2s^2 + cp^2s^2 - 2cpsqr + cq^2r^2 =$$
$$= p^2r^2 + c^2q^2s^2 + cp^2s^2 + cq^2r^2.$$

1005. а) В произведение $(x^2+x-1)(x-a)$ входят два члена, содержащие x^2 ($-ax^2$ и x^2), следовательно, коэффициент при x^2 равен $(-a+1)$. Произведение не содержит x^2, если $-a+1=0$, т. е. $a=1$.

б) В произведение $(x^2+x-1)(x-a)$ входят два члена, содержащие x ($-ax$ и $-x$), следовательно, коэффициент при x равен $(-a-1)$. Произведение не содержит x, если $-a-1=0$, т. е. $a=-1$.

1006. а) В произведение $(x^2-10x+6)(2x+b)$ входят два члена, содержащие x^2 ($-20x^2$ и bx^2), следовательно, коэффициент при x^2 равен $(-20+b)$. Произведение не содержит x^2, если $-20+b=0$, т. е. $b=20$.

б) В произведении $(x^2-10x+6)(2x+b)$ коэффициент при x^3 равен 2, а коэффициент при x равен $12-10b$. Эти коэффициенты равны, если $12-10b=2$, т. е. $b=1$.

1008. Воспользуемся равенством $111\,111=111\cdot 1001$.

$$111\,111-222=111\cdot 1001-111\cdot 2=111\cdot(1001-2)=$$
$$=111\cdot 999=111\cdot 111\cdot 9=111^2\cdot 3^2=333^2.$$

1009. б) $x^{22}-\frac{1}{49}x^{20}=x^{20}\left(x^2-\frac{1}{49}\right)=x^{20}\left(x-\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{7}\right);$

г) $y^7-1\frac{7}{9}y^5=y^5\left(y^2-\frac{16}{9}\right)=y^5\left(y-\frac{4}{3}\right)\left(y+\frac{4}{3}\right).$

1010. б) $-2a^6-8a^3b-8b^2=-2(a^6+4a^3b+4b^2)=$ $=-2(a^3+2b)^2=-2(a^3+2b)(a^3+2b).$

1011. а) $70a-84b+20ab-24b^2=(70a+20ab)-(84b+24b^2)=$ $=10a(7+2b)-12b(7+2b)=(7+2b)(10a-12b)=$ $=2(7+2b)(5a-6b);$

г) $30a^3-18a^2b-72b+120a=6a^2(5a-3b)+24(5a-3b)=$ $=(5a-3b)(6a^2+24)=6(5a-3b)(a^2+4).$

1012. в) $3p-2c^3-3c^3p+2=3p(1-c^3)+2(1-c^3)=(1-c^3)\times$ $\times(3p+2)=(1-c)(1+c+c^2)(3p+2);$

г) $a^4-24+8a-3a^3=a^3(a-3)+8(a-3)=(a-3)(a^3+8)=$ $=(a-3)(a+2)(a^2-2a+4).$

1014. г) $4x^3-3x^2=4x-3;$ $x^2(4x-3)-(4x-3)=0;$ $(4x-3)(x^2-1)=0;$ $(x-1)(x+1)(4x-3)=0;$ $x_1=-1;$ $x_2=\frac{3}{4};$ $x_3=1.$

1017. г) $5a^2-5-4(a+1)^2=5(a^2-1)-4(a+1)^2=5(a-1)\times$ $\times(a+1)-4(a+1)^2=(a+1)(5a-5-4a-4)=(a+1)(a-9).$

1018. д) $81a^2+6bc-9b^2-c^2=81a^2-(c^2-6bc+9b^2)=81a^2-$ $-(c-3b)^2=(9a+c-3b)(9a-c+3b).$

1019. б) $x^3-y^3-5x(x^2+xy+y^2)=(x-y)(x^2+xy+y^2)-$ $-5x(x^2+xy+y^2)=(x^2+xy+y^2)(x-y-5x)=(x^2+xy+y^2)\times$ $\times(-4x-y)=-(4x+y)(x^2+xy+y^2);$

е) $a^3 - 4a^2 + 20a - 125 = (a^3 - 125) - (4a^2 - 20a) = (a - 5) \times$ $\times (a^2 + 5a + 25) - 4a(a - 5) = (a - 5)(a^2 + 5a + 25 - 4a) = (a - 5) \times$ $\times (a^2 + a + 25)$.

1020. г) $x^4 + x^3y - xy^3 - y^4 = x^3(x + y) - y^3(x + y) = (x + y) \times$ $\times (x^3 - y^3) = (x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

1021. г) Представим одночлен $2b^2$ как сумму $b^2 + b^2$:

$$a^2 + 2ab + 2b^2 + 2b + 1 = (a^2 + 2ab + b^2) + (b^2 + 2b + 1) = \\ = (a + b)^2 + (b + 1)^2 \geqslant 0$$

при любых значениях a и b;

д) представим одночлен $-4xy$ как сумму $-2xy - 2xy$:

$$x^2 - 4xy + y^2 + x^2y^2 + 1 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2y^2 - 2xy + 1) = \\ = (x - y)^2 + (xy - 1)^2 \geqslant 0$$

при любых значениях x и y;

е) представим число 10 как сумму $1 + 9$:

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = \\ = (x + 1)^2 + (y + 3)^2 \geqslant 0$$

при любых значениях x и y.

1022. г) Может. Например, при $y = -10{,}2$ имеем

$(y + 10)^2 - 0{,}1 = (-0{,}2)^2 - 0{,}1 = 0{,}04 - 0{,}1 < 0$;

д) может. Например, при $a = -100{,}03$ имеем

$0{,}001 - (a + 100)^2 = 0{,}001 - (-0{,}03)^2 = 0{,}001 - 0{,}0009 > 0$.

1023. б) $(7n + 8)(n - 1) + (3n - 2)(n + 2) = 7n^2 + 8n - 7n - 8 +$ $+ 3n^2 - 2n + 6n - 4 = 10n^2 + 5n - 12$. Значение этого многочлена не делится на 5 ни при каком целом n, так как $10n^2$ и $5n$ делятся на 5, а 12 не делится.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 33

11. а) $7(p^2 + 10p + 23) - 4(p + 8)(p - 8) = 3(p + 5)^2 + 22$;

$7p^2 + 70p + 161 - 4(p^2 - 64) = 3(p^2 + 10p + 25) + 22$;

$7p^2 + 70p + 161 - 4p^2 + 256 = 3p^2 + 30p + 75 + 22$;

$40p = -320$; $p = -8$.

12. Преобразуем данное выражение:

$$(5a - 2b)^2 - 0{,}5a(50a - 40b) + (3a - 2b)(2b + 3a) = \\ = 25a^2 - 20ab + 4b^2 - 25a^2 + 20ab + 9a^2 - 4b^2 = 9a^2.$$

Теперь ясно, что значение данного выражения зависит от значений переменной a и не зависит от значений переменной b.

13. Пусть наименьшее из четырёх последовательных натуральных чисел равно n, тогда остальные числа имеют вид $n + 1$, $n + 2$ и $n + 3$.

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = \\ = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

15. Пусть одна сторона прямоугольной площадки, примыкающей к зданию, равна x м, тогда другая её сторона равна $(80 - 2x)$ м (рис. 3), а площадь равна $x(80 - 2x)$ м^2.

$$x(80 - 2x) = 80x - 2x^2 = -2(x^2 - 40x) =$$
$$= -2(x^2 - 40x + 400 - 400) =$$
$$= -2(x - 20)^2 + 800.$$

Наибольшее значение этой суммы равно 800 при $x = 20$. Значит, стороны площадки должны быть равны 20 м и 40 м.

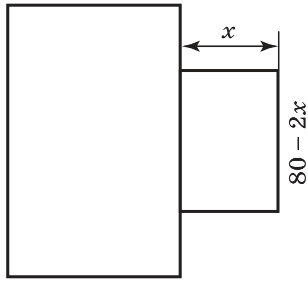

Рис. 3

Пункт 34

10. б) $x^3 + 9xy - 9y^2 + y^3 - 9x^2 = (x^3 + y^3) - 9(x^2 - xy + y^2) = (x + y)(x^2 - xy + y^2) - 9(x^2 - xy + y^2) = (x^2 - xy + y^2)(x + y - 9)$.

11. а) $xyz - 4x^2z + 4x^2y - 16x^3 = xz(y - 4x) + 4x^2(y - 4x) = (y - 4x)(xz + 4x^2) = x(y - 4x)(z + 4x)$.

12. $p = 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2^3(1 + 2 + 2^2) = 2^3 \cdot 7 = 8 \cdot 7$.

Искомые числа: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56.

13. б) $4x^4 + 1 = 4x^4 + 1 + 4x^2 - 4x^2 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (2x^2 + 1 - 2x)(2x^2 + 1 + 2x)$.

14. а) Представим $2y^2$ как сумму $y^2 + y^2$. Получим

$4x^2 - 4xy + 2y^2 - 2y + 1 = (4x^2 - 4xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1) = (2x - y)^2 + (y - 1)^2$.

Значений переменных, при которых многочлен принимает отрицательные значения, не существует, так как при любых значениях x и y верны неравенства $(2x - y)^2 \geqslant 0$ и $(y - 1)^2 \geqslant 0$.

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 39. Возведение двучлена в степень

Методический комментарий

Данный пункт является заключительным в изучении преобразований целых выражений. В нём учащиеся узнают об интересных закономерностях, наблюдаемых в формулах, которые получаются при возведении двучлена $a + b$ в первую степень, вторую, третью и т. д.

Учащимся уже известны формулы квадрата и куба двучлена:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

В данном пункте они впервые знакомятся с формулами, которые можно использовать для возведения двучлена в четвёртую и пятую степени:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Сопоставление этих формул позволяет учащимся заметить особенность в образовании членов многочленов, записанных в правой части равенства. Их, безусловно, заинтересует, каким образом коэффициенты каждого последующего многочлена можно получить из коэффициентов предыдущего. Они узнают об интересных закономерностях, которые представлены в таблице, известной под названием «треугольник Паскаля». Простота составления этой таблицы, безусловно, привлечёт учащихся, интересующихся математикой. Можно предложить им продолжить составление таблицы, добавив, например, строки, соответствующие значениям n, равным 6, 7, 8.

Важно обратить внимание учащихся ещё на одну интересную закономерность, связанную с возведением двучлена $a+b$ в степень n, где n — натуральное число, и выражающуюся в том, что в равенстве

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + nab^n + b^n$$

сумма коэффициентов многочлена равна 2^n.

Усвоению новых сведений способствуют включённые в данный пункт упражнения. Они не должны вызвать особых затруднений у учащихся, проявляющих интерес к математике. Их внимание, безусловно, привлекут упражнения **964** и **965**, в которых изученные сведения используются в задачах на делимость.

Ознакомление с материалом данного пункта позволяет хорошо успевающим учащимся сделать новые шаги в достижении личностных результатов обучения.

Изучение пункта 39 «Возведение двучлена в степень» можно провести в форме занятия математического кружка. На этом занятии один из учащихся может сделать сообщение о треугольнике Паскаля, другой — о сумме коэффициентов многочлена, тождественно равного выражению $(a+b)^n$. После этого учащиеся приступят к выполнению некоторых из упражнений, включённых в данный пункт.

Указания к упражнениям учебника

957. Для $n=6$ имеем 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Для $n=7$ строка в треугольнике Паскаля выглядит так: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

958. Воспользовавшись подмеченными закономерностями, получим

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

959. а) $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 +$ $+ 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$;

б) $(a+6)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 +$ $+ 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$.

960. Выполнив подстановку в формулу, получим:

а) $(a^2+2b)^4 = a^8 + 8a^6b + 24a^4b^2 + 32a^2b^3 + 16b^4$;

б) $(a^3-b)^4 = a^{12} - 4a^9b + 6a^6b^2 - 4a^3b^3 + b^4$.

961. а) Можно воспользоваться формулой куба суммы:

$$(a^2+3b^3)^3 = a^6 + 9a^4b^3 + 27a^2b^6 + 27b^9.$$

б) Воспользуемся формулой

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Получим

$$(1-2xy)^4 = 1 - 8xy + 24x^2y^2 - 32x^3y^3 + 16x^4y^4.$$

962. а) Воспользуемся тем, что сумма членов, стоящих на чётных местах, равна нулю. Получим

$$(x+y)^6 + (x-y)^6 = 2x^6 + 30x^4y^2 + 30x^2y^4 + 2y^6.$$

б) Воспользуемся тем, что разность членов, стоящих на нечётных местах, равна нулю. Получим

$$(x+y)^6 - (x-y)^6 = 12x^5y + 40x^3y^3 + 12xy^5.$$

963. Имеем

$$(1+y)^3 = 1 + 3y + 3y^2 + y^3;$$
$$(1+y)^4 = 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4;$$
$$(1+y)^5 = 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5.$$

Коэффициент при y^2 равен $3 + 6 + 10$, т. е. равен 19. Коэффициент при y^3 равен $1 + 4 + 10$, т. е. равен 15.

964. Так как $147^6 = (145+2)^6$, то, возведя выражение $145 + 2$ в шестую степень, получим сумму, в которой каждое слагаемое, кроме последнего, делится на 145, а последнее равно 64. Значит, искомый остаток равен 64.

965. а) Представив 83^4 в виде $(81+2)^4$, находим, что при делении числа 83^4 на 81 в остатке получается 2^4, т. е. 16. Так как $16 + 65 = 81$, то заданное выражение делится на 81.

б) Представим 141^{10} в виде $(139+2)^{10}$. Возведя $139 + 2$ в десятую степень, получим сумму, в которой каждое слагаемое, кроме последнего, делится на 139, а последнее равно 2^{10}, т. е. равно 1024. Сумма $1024 + 88$ равна 1112, а это число делится на 139. Значит, заданное выражение делится на 139.

ГЛАВА VI

Системы линейных уравнений

§ 15. Линейные уравнения с двумя переменными и их системы

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
40	Линейное уравнение с двумя переменными	2(2)
41	График линейного уравнения с двумя переменными	1(1)
42	Системы линейных уравнений с двумя переменными	2(2)

Содержание материала

Решение уравнения с двумя переменными как пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство. Равносильные уравнения с двумя переменными, условия перехода от одного уравнения к другому, ему равносильному. График уравнения с двумя переменными. Прямая как график линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю. Система уравнений с двумя переменными, её решение как пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы ознакомить учащихся с понятиями линейного уравнения с двумя переменными и его графика, системы линейных уравнений, дать начальное представление о решении линейного уравнения с двумя переменными в целых числах.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь определять, является ли пара значений переменных решением данного уравнения с двумя переменными, находить подбором целые решения линейного уравнения с двумя переменными, строить график уравнения $ax + by = c$, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, а также решать графическим способом в несложных ситуациях системы линейных уравнений с двумя переменными.

Методический комментарий

В курсе математики младших классов и в курсе алгебры 7 класса учащиеся неоднократно встречались с уравнениями с одной переменной. Теперь им предстоит ознакомиться с уравнениями с двумя переменными и системами таких уравнений. Материал данной главы позволяет учащимся овладеть новым аппаратом для решения текстовых задач, расширить свои представления о взаимосвязи некоторых алгебраических понятий с геометрическими образами.

Изучение пункта 40 «Линейное уравнение с двумя переменными» начинается с рассмотрения примеров таких уравнений и введения понятия решения уравнения с двумя переменными как пары значений переменных, обращающей уравнение в верное равенство. Следует обратить внимание учащихся на то, что здесь речь идёт об упорядоченной паре чисел, а также на принятое соглашение записывать решение уравнения с переменными x и y в виде пары чисел $(a; b)$, указывая на первом месте значение переменной x, а на втором значение переменной y. Учащиеся знакомятся в данном пункте с понятием равносильности уравнений с двумя переменными и соответствующими свойствами равносильности уравнений с двумя переменными, аналогичными свойствам равносильности уравнений с одной переменной. Эти свойства находят применение при выполнении упражнений **1030—1033**, в которых предлагается выразить из линейного уравнения с двумя переменными одну переменную через другую. Соответствующее умение является опорным при решении систем уравнений с двумя переменными способом подстановки.

Интерес учащихся обычно вызывают задачи, в которых требуется найти все пары целых или натуральных чисел, удовлетворяющие некоторому уравнению с двумя переменными. В связи с этим полезно остановиться на разобранной в учебнике задаче о расселении туристов на теплоходе в двухместные и трёхместные каюты и рассказать учащимся о работах известного греческого учёного Диофанта. С решением линейных уравнений с двумя переменными учащиеся встречаются в упражнениях **1036—1040**. Рекомендуется при этом специально остановиться на задаче **1040**, предназначенной для работы в парах, в которой предлагается составить по условию задачи уравнение с двумя переменными и исследовать его. После окончания работы пар рекомендуется обсудить в классе полученные ответы.

В пункте 41 учащиеся знакомятся с важным понятием «график уравнения с двумя переменными». Известные им сведения о графике линейной функции являются здесь опорными. Сначала на примерах разъясняется, что если в линейном уравнении $ax + by = c$ коэффициент b не равен нулю, то графиком такого уравнения является прямая. Затем делается дополнительная оговорка, что если в линейном уравнении $ax + by = c$ коэффициент b равен нулю, а коэффициент a не равен нулю, то его графиком также является прямая. Специальное внимание обращается на то, что графиком уравнения $0x + 0y = c$ при $c = 0$ является вся координатная плоскость, а при $c \neq 0$ график этого уравнения не содержит ни одной точки.

Усвоению вводимых в данном пункте понятий способствуют упражнения **1045—1053**. При недостатке учебного времени некоторые из этих упражнений можно предлагать при изучении последующих пунктов. Заметим, что на уроке, отводимом на изучение пункта 41, рекомендуется специально остановиться на задании **1053**, предназначенном для работы в парах. При обсуждении в классе результатов выполнения этого задания важно выяснить у учащихся, как они рассуждали, отвечая на вопрос о расположении графика заданного уравнения с двумя переменными в координатной плоскости.

Знания и умения, приобретённые учащимися при изучении пунктов 40 и 41, составляют основу для введения понятия системы линейных уравнений с двумя переменными и дальнейшего изучения способов решения таких систем. В пункте 42 учащиеся знакомятся с понятием «система уравнений с двумя переменными» и узнают, что называется решением такой системы. Они получают представление о графическом способе решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными, учатся применять этот способ при выполнении упражнений **1060**, **1061**. Сведения о графическом способе решения систем линейных уравнений являются опорными при исследовании систем линейных уравнений в заданиях **1062**, **1063**. Выполнение учащимися задания **1063**, предназначенного для работы в парах, рекомендуется завершить коллективным обсуждением, требуя от учащихся соответствующих обоснований.

Дополнительные упражнения к § 15 «Линейные уравнения с двумя переменными и их системы» могут быть использованы при повторении материала. Специальное внимание рекомендуется уделить предназначенному для работы в парах упражнению **1164**, в котором рассматривается вопрос о числе решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Указания к основным упражнениям учебника

1034. Пусть искомое решение уравнения $x + 2y = 18$ имеет вид $(a; a)$. Тогда $a + 2a = 18$; $a = 6$. Искомое решение: (6; 6).

1036. Пусть было взято x двухрублёвых монет и y пятирублёвых монет. Имеем уравнение $2x + 5y = 28$. Выразим y через x: $y = \frac{28 - 2x}{5}$.

При $x = 1, 2, 3$ значение y не является целым числом;

при $x = 4$ получим $y = \frac{28 - 8}{5} = 4$;

при $x = 5, 6, 7, 8$ значение y не является целым числом;

при $x = 9$ получим $y = \frac{28 - 18}{5} = 2$.

Значит, двухрублёвых монет может быть взято 4 или 9.

1037. Предположим, что ученик купил x тетрадей и y карандашей. Имеем уравнение $5x + 7y = 44$. Выразим x через y: $x = \frac{44 - 7y}{5}$. Уравнению удовлетворяет единственная пара натуральных чисел: $x = 6$, $y = 2$.

1040. (*Для работы в парах*.) а) Пусть купили x тетрадей в клетку и x тетрадей в линейку. Имеем уравнение

$$10x + 15x = 320;\ 25x = 320.$$

Значение x не является целым числом, так как 320 не делится на 25. Значит, одинаковое количество тетрадей в клетку и тетрадей в линейку при указанном условии купить нельзя.

б) Пусть купили x тетрадей в клетку и y тетрадей в линейку. Имеем уравнение

$$10x + 15y = 320;\ 2x + 3y = 64;\ y = \frac{64 - 2x}{3}.$$

Подбором находим искомые пары чисел: (2; 20); (5; 18); (8; 16); (11; 14); (14;12); (17; 10); (20; 8); (23; 6); (26; 4); (29; 2).

в) Максимальное количество тетрадей, которое можно купить при указанном условии, равно $29 + 2$, т. е. 31.

г) Минимальное количество тетрадей, которое можно купить при указанном условии, равно $2 + 20$, т. е. 22.

1041. Пусть двузначное число имеет вид $10x + y$, где x — число десятков, y — число единиц, $x \neq 0$. После перестановки цифр получим число $10y + x$. Имеем уравнение

$$(10y + x) - (10x + y) = 54;\ 9y - 9x = 54;\ y = 6 + x.$$

При $x = 1$ получим $y = 7$; при $x = 2$ получим $y = 8$; при $x = 3$ получим $y = 9$.

Искомое двузначное число может быть равно 17, 28 или 39.

1042. Имеем равенство $5m+1=6n+2$, где m и n — натуральные числа. Выразим m через n: $m=\frac{6n+1}{5}$. Наименьшее число получится при $n=4$, $m=5$, т. е. наименьшее число 26.

1053. (*Для работы в парах.*) Графиком уравнения $ax=b$ при $a>0$ и $b>0$ является прямая $x=\frac{b}{a}$, параллельная оси y. Этот график расположен в первой и четвёртой координатных четвертях, так как $x>0$.

Графиком уравнения $ay=b$ при $a>0$ и $b>0$ является прямая $y=\frac{b}{a}$, параллельная оси x. Этот график расположен в первой и второй координатных четвертях, так как $y>0$.

Если $a=0$, $b=0$, то графиком уравнения $ax=b$ является ось x, а графиком уравнения $ay=b$ является ось y. Если $a=0$, $b\neq 0$, то графики уравнений $ax=b$ и $ay=b$ не содержат ни одной точки.

При $a>0$, $b>0$, $c>0$ графиком уравнения $ax+by=c$ является прямая, расположенная в первой, второй и четвёртой координатных четвертях, так как точки её пересечения с осями имеют положительные координаты; при $a>0$, $b>0$, $c<0$ графиком является прямая, расположенная во второй, третьей и четвёртой координатных четвертях.

В случае когда $a=0$, $b=0$ и $c=0$, графиком является вся плоскость, а когда $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$, график не содержит ни одной точки.

1062. а) Выразим в каждом уравнении системы y через x:

$$\begin{cases} y=\frac{x}{4}+3, \\ y=-\frac{x}{3}-1. \end{cases}$$

Угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками этих уравнений, различны, следовательно, эти прямые пересекаются. Система имеет единственное решение.

в) Графиком первого уравнения системы является прямая, параллельная оси y, а график второго уравнения не параллелен оси y, следовательно, прямые пересекаются. Система имеет единственное решение.

г) $\begin{cases} y=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}, \\ y=-0{,}5x. \end{cases}$

Графики этих уравнений — параллельные прямые. Система не имеет решений.

1063. (*Для работы в парах*.) Выразим из каждого уравнения системы y через x:

а) $\begin{cases} x = 6y - 1, \\ 2x - 10y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}, \\ y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{10}. \end{cases}$

Угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками уравнений системы, различны, следовательно, прямые пересекаются. Система имеет единственное решение.

б) $\begin{cases} 5x + y = 4, \\ x + y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -5x + 4, \\ y = -x + 6. \end{cases}$

Система имеет единственное решение, так как угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками уравнений, различны.

в) $\begin{cases} 12x - 3y = 5, \\ 6y - 24x = -10; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4x - \frac{5}{3}, \\ y = 4x - \frac{5}{3}. \end{cases}$

Прямые, являющиеся графиками уравнений системы, совпадают. Следовательно, система имеет бесконечно много решений.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

1139. Если a и b — целые числа, то левая часть равенства $15a + 40b = 81$ делится на 5, а правая часть на 5 не делится. Следовательно, пара чисел (15; 40) ни при каких целых a и b не может быть решением уравнения $15x + 40y = 81$.

1141. б) Подбором находим искомые пары чисел:

(1; 18); (2; 9); (3; 6); (6; 3); (9; 2); (18; 1).

1142. Выбирая в качестве значений a простые числа, находим пары, в которых значение b также является простым числом: (5; 37); (11; 31); (13; 29); (19; 23); (23; 19); (29; 13); (31; 11); (37; 5).

1143. Пусть $\overline{9xy}$ — искомое трёхзначное число. По условию число $\overline{xy9}$ также является трёхзначным, т. е. $x \neq 0$. Так как $\overline{9xy} - \overline{xy9} = 576$, имеем уравнение

$$(900 + 10x + y) - (100x + 10y + 9) = 576;$$
$$-90x - 9y = -315; \; 10x + y = 35.$$

Искомое трёхзначное число: 935.

1144. Пусть искомое трёхзначное число имеет вид $100x + 10y + 4$. После перемещения цифры 4 на первое место получим число $400 + 10x + y$. Имеем уравнение

$$(400 + 10x + y) + 7 = 2(100x + 10y + 4);$$
$$190x + 19y = 399; \quad 10x + y = 21.$$

Искомое трёхзначное число равно

$$10(10x + y) + 4 = 10 \cdot 21 + 4 = 214.$$

1145. Пусть $\overline{xy}$ — искомое двузначное число. Полученное четырёхзначное число имеет вид $\overline{1xy1}$. Имеем уравнение

$$1000 + 100x + 10y + 1 = 21(10x + y);$$
$$110x + 11y = 1001; \ 10x + y = 91.$$

Искомое число: 91.

1146. а) Из уравнения $y - x^2 = 9$ получаем $y = x^2 + 9$. При любых значениях x значение y является положительным числом, следовательно, график этого уравнения не пересекает ось x.

1150. Если x и y — целые числа, то значение левой части равенства $6x - 12y = 5$ делится на 6, а правая часть равенства на 6 не делится.

1154. а) Графиком является совокупность прямых $x = 2$ и $y = 3$;

г) графиком является совокупность прямых $x = 0$ и $y = 2$, т. е. оси y и прямой $y = 2$.

1155. Графиком уравнения является совокупность прямых $x + 2 = 0$ и $y + 3 = 0$. Он пересекает ось y в точке $(0; -3)$, а ось x в точке $(-2; 0)$.

1159. Точка, принадлежащая оси y, имеет абсциссу $x = 0$; из равенства $5x - 2y = 3$ находим, что если $x = 0$, то $y = -1{,}5$, т. е. прямая $5x - 2y = 3$ пересекает ось y в точке $(0; -1{,}5)$. Подставив координаты этой точки в равенство $x + y = a$, получим $a = -1{,}5$.

1160. Точка, принадлежащая оси x, имеет ординату $y = 0$. Из уравнения $x - 2y = 4$ находим, что если $y = 0$, то $x = 4$. Подставив эти значения в уравнение $bx + 3y = 10$, получим $b \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 10$; $b = 2{,}5$.

1163. б) Преобразуем первое уравнение системы, умножив все его члены на 15: $\begin{cases} 3x - y = 15, \\ 6x - 2y = 35. \end{cases}$

Система не имеет решений, так как второе уравнение равносильно уравнению $3x - y = 17{,}5$.

в) $\begin{cases} 5y = 0{,}2x - 11, \\ 25y = x - 55. \end{cases}$

Система имеет бесконечно много решений, так как второе уравнение равносильно уравнению $5y = 0{,}2x - 11$.

1164. (*Для работы в парах.*) а) Выразим из данного уравнения y через x: $y = -2x + 0{,}2$.

Угловой коэффициент прямой, являющейся графиком этого уравнения, равен -2. Угловой коэффициент прямой, пересекающейся с графиком данного уравнения, должен быть отличен от -2. Допустим, что он равен 4.

Вторым уравнением системы может быть, например, $y = 4x - 3$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 10x + 5y = 1, \\ 4x - y = 3. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение.

б) Система уравнений имеет бесконечно много решений, если графики уравнений системы совпадают. Значит, второе уравнение следует взять с коэффициентами и свободным членом, пропорциональными коэффициентам и свободному члену первого уравнения. Например, $20x + 10y = 2$.

в) Система уравнений не имеет решений, если графики уравнений системы являются параллельными прямыми. Второе уравнение системы, например, может иметь вид $y = -2x - 3$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 10x + 5y = 1, \\ 2x + y = -3, \end{cases}$$

которая не имеет решений.

1166. Данная система равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} y = 3x - 10, \\ y = 3x - \frac{c}{3}. \end{cases}$$

Система имеет бесконечно много решений, если $-\frac{c}{3} = -10$, т. е. $c = 30$.

1167. Данная система равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} y = -2{,}5x + 10, \\ y = -2{,}5x + \frac{c}{2}. \end{cases}$$

Система не имеет решений, если $\frac{c}{2} \neq 10$, т. е. $c \neq 20$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 35

8. Пусть имеется x десятирублёвых и y пятирублёвых монет. Имеем уравнение $10x + 5y = 45$; $2x + y = 9$; $y = 9 - 2x$.

Если $x = 1$, то $y = 7$; если $x = 2$, то $y = 5$; если $x = 3$, то $y = 3$; если $x = 4$, то $y = 1$. Существует четыре способа.

11. Пусть искомое число $10x + y$, $x \neq 0$. После перестановки цифр получим число $10y + x$, $y \neq 0$. Имеем уравнение

$$(10x + y) - (10y + x) = 45;\ 9x - 9y = 45;\ y = x - 5.$$

Если $x = 6$, то $y = 1$; если $x = 7$, то $y = 2$; если $x = 8$, то $y = 3$; если $x = 9$, то $y = 4$.

Искомые числа: 61, 72, 83, 94.

12. Пусть на спартакиаду было направлено x команд мальчиков и y команд девочек. Имеем уравнение

$$4x + 3y = 22;\ y = \frac{22 - 4x}{3}.$$

Уравнение имеет два решения: $x = 1$, $y = 6$; $x = 4$, $y = 2$.

13. Пусть двузначное число имеет вид $10x + y$, $x \neq 0$. Имеем уравнение

$$3(10x + y) + 2(x + y) = 79;\ 32x + 5y = 79;\ y = \frac{79 - 32x}{5}.$$

Уравнению удовлетворяет единственная пара натуральных чисел: $x = 2$, $y = 3$. Искомое число: 23.

14. 1) Пусть $x = 2n + 1$, $y = 2n + 3$. Имеем уравнение

$$3(2n + 1) - 4(2n + 3) = -17;\ 2n = 8.$$

Искомые числа: 9, 11.

2) Пусть $y = 2n + 1$, $x = 2n + 3$. Имеем уравнение

$$3(2n + 3) - 4(2n + 1) = -17;\ 2n = 22.$$

Искомые числа: 25, 23.

Пункт 36

12. Точка, принадлежащая оси x, имеет ординату $y = 0$. Из уравнения $7x - 3y = -21$ находим, что если $y = 0$, то $x = -3$. Подставив эти значения в уравнение $2x - 5y = m$, получим

$$2 \cdot (-3) - 5 \cdot 0 = m;\ m = -6.$$

Пункт 37

7. а) Выразим в каждом уравнении системы y через x:

$$\begin{cases} y = 3x + 2{,}5, \\ y = 3x - 8. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

10. Выразим в каждом уравнении системы y через x:

$$\begin{cases} y = 0{,}8x - 2, \\ y = 0{,}8x - \dfrac{a}{12{,}5}. \end{cases}$$

Система имеет бесконечно много решений, если $\frac{a}{12{,}5} = 2$, т. е. $a = 25$.

11. Преобразуем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} y = -x + 8, \\ y = -\frac{m}{3}x + \frac{n}{3}. \end{cases}$$

а) Система имеет единственное решение, если $-\frac{m}{3} \neq -1$, т. е. $m \neq 3$, а n — любое число.

б) Система имеет бесконечно много решений, если $-\frac{m}{3} = -1$ и $\frac{n}{3} = 8$, т. е. $m = 3$, $n = 24$.

в) В случае когда $m = 3$, $n \neq 24$, система не имеет решений.

13. а) Преобразуем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} y = -2x - 5, \\ y = -2x + 3. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

§ 16. Решение систем линейных уравнений

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
43	Способ подстановки	3(3)
44	Способ сложения	3(3)
45	Решение задач с помощью систем уравнений	3(4)
	Контрольная работа № 9	1

Содержание материала

Равносильность систем уравнений с двумя переменными. Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки. Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения. Использование систем линейных уравнений с двумя переменными для решения текстовых задач. Основные этапы решения текстовой задачи с помощью системы уравнений.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы сформировать умения учащихся решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными, используя способ подстановки или способ сложения, а также решать текстовые задачи с помощью систем уравнений.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного материала формируются умения учащихся применять способ подстановки и способ сложения при решении систем двух линейных уравнений с двумя переменными, решать текстовые задачи, используя в качестве алгебраической модели системы линейных уравнений с двумя переменными, интерпретировать результат, полученный при решении системы уравнений, составленной по условию задачи.

Методический комментарий

Графический способ решения систем линейных уравнений с двумя переменными является наглядным и хорошо иллюстрирует случаи, когда система двух линейных уравнений с двумя переменными имеет единственное решение, не имеет решений или имеет бесконечно много решений. Однако использовать этот способ на практике неудобно. Это связано с тем, что ответ, полученный при графическом способе решения, обычно является приближённым, причём в случае существенного различия коэффициентов при переменных в выражениях, входящих в систему уравнений, бывает трудно выбрать масштаб для построения графиков. Поэтому наряду с графическим способом решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными рассматривают два аналитических способа: способ подстановки и способ сложения.

Сущность способа подстановки разъясняется в пункте 43 на конкретном примере. Она состоит в том, что заданную систему двух линейных уравнений с двумя переменными заменяют равносильной системой, в которой одно из уравнений содержит единственную переменную. В примере, рассмотренном в учебнике, равносильность исходной и полученной систем уравнений иллюстрируется с помощью графиков.

При решении систем двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки учащиеся должны руководствоваться чётко сформулированным в учебнике алгоритмом. Важно обратить их внимание на рациональный выбор уравнения системы, из которого выражается одна переменная через другую. От этого часто зависит сложность выполняемых преобразований.

Система упражнений в пункте 43 начинается с простейших заданий **1068—1072**, в которых учащимся достаточно просто выразить одну переменную через другую. В заданиях **1075—1078** для того, чтобы выразить одну переменную через другую, учащимся приходится выполнять более сложные преобразования. Специальное внимание следует уделить заданиям **1073**, **1074**, в которых предлагается, не выполняя построения, найти координаты точек пересечения графиков уравнений с двумя переменными.

Изучение пункта 44 «Способ сложения» строится по той же схеме, что и изучение предшествующего пункта. На примере разъясняются особенности способа сложения, широко используемого при решении систем двух линейных уравнений с двумя переменными. Как и в предыдущем пункте, равносильность исходной системы уравнений и новой, полученной в результате сложения уравнений, иллюстрируется в рассмотренном примере с помощью графиков. При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными учащиеся руководствуются соответствующим алгоритмом, сформулированным в учебнике.

Приведённые в учебнике авторские примеры строятся с последовательным нарастанием сложности рассматриваемых систем. В примере 1 непосредственное сложение уравнений с двумя переменными позволяет исключить одну из переменных. С подобной ситуацией учащиеся встречаются в упражнениях **1082**, **1083**. В примере 2 представлен случай, когда легко найти множитель, умножив на который все члены одного из уравнений можно перейти к системе, из которой с помощью несложных вычислений определяется искомая пара решений. С подобной ситуацией учащиеся встречаются в упражнениях **1084**, **1085**. Наконец, в примере 3 рассматривается более сложный случай, когда для каждого из уравнений системы приходится находить соответствующий множитель, чтобы на последующем этапе можно было исключить одну из переменных. С такими системами двух линейных уравнений с двумя переменными учащиеся будут неоднократно встречаться в упражнениях **1086**, **1092—1096**. Полезно остановиться на заданиях **1087—1090**, где решение систем уравнений связывается с соответствующими геометрическими образами.

Важным шагом в формировании математической компетентности учащихся является ознакомление их с использованием систем линейных уравнений с двумя переменными для решения текстовых задач, которому посвящён пункт 45. Аналогично известному учащимся подходу к решению текстовых задач с помощью уравнений с одной переменной здесь выделяются три этапа: обозначение неизвестных и составление системы уравнений, решение составленной системы, истолкование результатов в соответствии со смыслом задачи. Полезно обратить внимание учащихся на разобранную в учебнике задачу 2, когда найденное решение системы, составленной по условию задачи, не соответствует смыслу этой задачи.

Тематика включённых в пункт 45 текстовых задач разнообразна. В их число входят задачи на движение, на процентные расчёты, задачи с геометрическим содержанием. Интерес у учащихся обычно вызывают содержащиеся в пункте старинные задачи (**1104**, **1105**, **1115**). Важно обратить внимание учащихся на задачи **1121** и **1122**, связанные с вычислением концентрации растворов, характеризующие практическую значимость формируемых умений. Рекомендуется остановиться на задаче-исследовании **1123**, в которой составление и решение системы уравнений с двумя переменными находит применение в задаче на делимость.

При изучении § 16 можно использовать некоторые дополнительные упражнения. Полезно рассмотреть с учащимися предназначенную для работы в парах задачу **1176**, где предлагается составить уравнение вида $y = kx + b$, график которого проходит через две заданные точки. Учащимся, проявляющим интерес к математике, можно предложить текстовые задачи **1181—1183**, в которых приобретённые ими умения применяются в усложнённых ситуациях.

Указания к основным упражнениям учебника

1073. а) Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 4y = 23, \\ 8x - 10y = 19. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы y через x: $y = \frac{23 - 7x}{4}$. Подставим найденное выражение вместо y во второе уравнение и решим его:

$$8x - \frac{10(23 - 7x)}{4} = 19;\ 16x - 115 + 35x = 38;\ x = 3.$$

Отсюда $y = \frac{23 - 7 \cdot 3}{4}$; $y = 0{,}5$. Значит, точка пересечения графиков имеет координаты (3; 0,5).

1076. б) $\begin{cases} -2(a - b) + 16 = 3(b + 7), \\ 6a - (a - 5) = -8 - (b + 1); \end{cases}$

$$\begin{cases} -2a + 2b + 16 = 3b + 21, \\ 6a - a + 5 = -8 - b - 1; \end{cases} \begin{cases} -2a - b = 5, \\ 5a + b = -14; \end{cases} \begin{cases} b = -5 - 2a, \\ 5a + (-5 - 2a) = -14. \end{cases}$$

$5a - 5 - 2a = -14;\ 3a = -9;\ a = -3;\ b = 1.$

1077. в) Умножив обе части первого уравнения на 15, а второго на 30, получим систему уравнений с целыми коэффициентами, равносильную данной: $\begin{cases} 6m + 5n = 15, \\ 3m - 35n = 120. \end{cases}$ Отсюда $m = 5,\ n = -3.$

1086. г) При решении систем уравнений способом сложения можно разрешить учащимся записывать справа число, на которое умножаются обе части уравнения.

$$\begin{cases}-3b+10a=0{,}1, \\ 4b+15a=2{,}7;\end{cases}\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right. \quad \begin{cases}-12b+40a=0{,}4, \\ \underline{12b+45a=8{,}1;}\end{cases}$$

$$85a=8{,}5;\ a=0{,}1.$$

$-3b+10\cdot 0{,}1=0{,}1;\ -3b=-0{,}9;\ b=0{,}3.$

1087. в) Подставим в уравнение $y=kx+b$ координаты точек A и B, получим систему уравнений

$$\begin{cases}-1=8k+b, \\ 17=-4k+b.\end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $k=-1{,}5$, $b=11$. Уравнение прямой: $y=-1{,}5x+11$.

1091. Выберем на графике линейной функции какие-либо две точки, например $A(-1;\ 1)$ и $B(0;\ -1)$, и подставим их координаты в уравнение прямой $y=kx+b$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases}-k+b=1, \\ b=-1.\end{cases}$$

Отсюда $k=-2$. Уравнение прямой: $y=-2x-1$.

1093. г) $\begin{cases}\frac{1}{6}u-\frac{1}{3}v=-3, \\ 0{,}2u+0{,}1v=3{,}9;\end{cases}\left|\begin{matrix}6\\20\end{matrix}\right. \quad \begin{cases}u-2v=-18, \\ 4u+2v=78.\end{cases}$

Решив эту систему, найдём, что $u=12$, $v=15$.

1095. г) $\begin{cases}4a-5b-10=0, \\ \frac{a}{5}-\frac{b}{3}+\frac{1}{3}=0;\end{cases} \quad \begin{cases}4a-5b=10, \\ 3a-5b=-5.\end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $a=15$. Из уравнения $3a-5b=-5$ находим, что $b=10$.

1102. Пусть длина площадки равна x м, а ширина — y м. Тогда $x-y=12{,}8$. По условию задачи периметр прямоугольника $(2x+2y)$ равен 69,48 м, следовательно, $x+y=34{,}74$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}x-y=12{,}8, \\ x+y=34{,}74.\end{cases}$$

1104. Предположим, что ослица несла x мешков, а мул — y мешков. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}2(x-1)=y+1, \\ x+1=y-1.\end{cases}$$

1105. Допустим, что у A было x рупий, а у B — y рупий. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + 100 = 2(y - 100), \\ 6(x - 10) = y + 10. \end{cases}$$

1107. Предположим, что первый автомат изготовлял за час x деталей, а второй — y деталей. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 720, \\ \frac{1}{4} \cdot 2(x + y) = 150. \end{cases}$$

Отсюда $x = 120$, $y = 180$.

1109. Пусть скорость теплохода в стоячей воде равна x км/ч, а скорость течения — y км/ч. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3(x + y) + 2(x - y) = 240, \\ 3(x - y) - 2(x + y) = 35. \end{cases}$$

Отсюда $x = 47{,}5$; $y = 2{,}5$; $x - y = 45$; $x + y = 50$.

Возможен другой способ решения задачи.

Пусть x км/ч — скорость теплохода по течению реки, а y км/ч — его скорость против течения. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 240, \\ 3y - 2x = 35. \end{cases}$$

Отсюда $x = 50$, $y = 45$.

1110. Допустим, что первый автомобиль ехал со скоростью x км/ч, а второй — со скоростью y км/ч. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y = 280, \\ 14x - 14y = 280. \end{cases}$$

1112. Предварительно находим, что скорость лодки по течению равна 70 : 3,5, т. е. 20 км/ч. Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде, а y км/ч — скорость течения. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 5(x - y) = 4(x + y). \end{cases}$$

1114. Допустим, что на первой полке было x книг, а на второй — y книг. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 55, \\ 4 \cdot \frac{y}{2} = x + \frac{y}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $x = 33$, $y = 22$.

1115. Пусть слиток золота весит x г, а слиток серебра — y г. Тогда $9x = 11y$. Если поменять местами один слиток серебра с одним слитком золота, то на левой чашке весов вес слитков составит $(8x + y)$ г, а на правой — $(10y + x)$ г. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 9x = 11y, \\ 8x + y + 13 = 10y + x. \end{cases}$$

1117. Пусть под озимые культуры была отведена площадь, равная x га, а под яровые — y га. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 480, \\ 0{,}75x - 0{,}2y = 300. \end{cases}$$

1119. Допустим, что надо взять x л молока 5%-ной жирности и y л молока 1%-ной жирности. Тогда $x + y = 3$. Содержание жира в молоке первого вида составит $x \cdot 0{,}05$ л, а второго — $y \cdot 0{,}01$ л. Содержание жира в полученном молоке равно $3 \cdot 0{,}032$, т. е. $0{,}096$ л. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x \cdot 0{,}05 + y \cdot 0{,}01 = 0{,}096. \end{cases}$$

1120. Пусть клиент положил x р. на вклад «Депозитный» и y р. на вклад «До востребования», тогда $x + y = 45\,000$. Доход, полученный клиентом через год по вкладу «Депозитный», составил $x \cdot 0{,}09$ р., а по вкладу «До востребования» — $y \cdot 0{,}01$ р. Общий доход за год составил 3410 р. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 45\,000, \\ 0{,}09x + 0{,}01y = 3410. \end{cases}$$

1121. Предположим, что надо взять x г 10%-ного раствора и y г 15%-ного. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 80, \\ 0{,}1x + 0{,}15y = 80 \cdot 0{,}12. \end{cases}$$

1123. (*Задача-исследование.*) Обозначим через x число, на которое надо уменьшить число 100, а через y частное от деления полученной разности $(100 - x)$ на 5. Тогда второе частное равно $y - 2$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 100 - x = 5y + 1, \\ 100 - x = 7(y - 2) + 1. \end{cases}$$

Отсюда $5y + 1 = 7(y - 2) + 1$; $y = 7$; $100 - x = 36$; $x = 64$. Значит, число 100 надо уменьшить на 64.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

1170. в) $\begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ \dfrac{2x+1}{6} = \dfrac{9-5y}{8}; \end{cases} \left| \begin{matrix} (-2) \\ 24 \end{matrix} \right. \begin{cases} -8x + 6y = -2, \\ 8x + 4 = 27 - 15y. \end{cases}$

$21y = 21$; $y = 1$. Из уравнения $4x - 3y = 1$ находим, что $x = 1$.

1171. а) $\begin{cases} (x-1)^2 - (x+2)^2 = 9y, \\ (y-3)^2 - (y+2)^2 = 5x; \end{cases}$

$\begin{cases} (x - 1 + x + 2)(x - 1 - x - 2) = 9y, \\ (y - 3 + y + 2)(y - 3 - y - 2) = 5x; \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

Решив эту систему способом подстановки, найдём, что $x = -5$, $y = 3$.

1173. а) Достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 4y = 1, \\ 3x + 1 = 13 \end{cases}$$

и проверить, удовлетворяют ли найденные значения переменных уравнению $7x - 5y = 1$.

1174. Найдём сначала координаты точки пересечения прямых $2x + 3y = 20$ и $3x - 5y = 11$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 20, \\ 3x - 5y = 11. \end{cases}$$

Получим $x = 7$, $y = 2$.

Прямая $x + y = 9$ проходит через точку (7; 2), следовательно, данные три прямые пересекаются в одной точке.

1176. (*Для работы в парах*.) а) Подставив координаты точек M и P в уравнение $y = kx + b$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -k + b = 1, \\ 4k + b = 4. \end{cases}$$

Отсюда $k = \dfrac{3}{5}$, $b = 1\dfrac{3}{5}$.

Искомое уравнение: $y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{8}{5}$, или $5y - 3x = 8$.

б) Подставив координаты точек A и B в уравнение $y = kx + b$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -3k + b = 3, \\ 3k + b = -3. \end{cases}$$

Отсюда $k = -1$, $b = 0$. Искомое уравнение: $y = -x$.

1177. Пусть автомобиль шёл x ч со скоростью 40 км/ч и y ч со скоростью 60 км/ч. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ 40x + 60y = 45 \cdot 8. \end{cases}$$

Отсюда $x = 6$, $y = 2$.

1179. Предположим, что площадь первого поля равна x га, а площадь второго — y га. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 340, \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}x + 60 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}y. \end{cases}$$

При составлении второго уравнения учитываем, что после первого дня остались незасеянными $\frac{3}{4}$ первого поля и $\frac{2}{3}$ второго поля.

1181. Пусть первое число равно x, а второе — y. Тогда после увеличения на 30% первое число станет равным $1{,}3x$, а второе число после уменьшения на 10% станет равным $0{,}9y$. Их сумма станет равной $x + y + 6$.

Если первое число уменьшить на 10%, то оно станет равным $0{,}9x$. Если второе число уменьшить на 20%, то оно станет равным $0{,}8y$. Их сумма станет равной $x + y - 16$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}3x + 0{,}9y = x + y + 6, \\ 0{,}9x + 0{,}8y = x + y - 16. \end{cases}$$

Отсюда $x = 40$, $y = 60$.

1182. Пусть первоначально в двух мешках было по x кг риса и в одном мешке y кг пшена. После продажи 20% риса из каждого мешка в двух мешках осталось $2 \cdot 0{,}8x$ кг риса, а после продажи 25% пшена в мешке с пшеном осталось $0{,}75y$ кг пшена. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 160, \\ 1{,}6x + 0{,}75y = 125. \end{cases}$$

Отсюда $x = 50$, $y = 60$.

1183. Пусть сначала на первом станке изготовляли в день x деталей, а на втором — y деталей. Тогда после усовершенствования на первом станке стали изготовлять в день $1{,}15x$ деталей, а на втором — $1{,}2y$ деталей. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 8x + 5y = 235, \\ 2 \cdot 1{,}15x + 3 \cdot 1{,}2y = 100. \end{cases}$$

Отсюда $x = 20$, $y = 15$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 38

8. Чтобы определить координаты точки пересечения графиков уравнений, составим из этих уравнений систему и решим её:

$$\begin{cases} y = 2{,}5x - 4, \\ y = -3x + 7. \end{cases}$$

Отсюда $x = 2$, $y = 1$.

10. Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 7x - 2y = 25, \\ 11x + 5y = 23. \end{cases}$$

Отсюда $x = 3$, $y = -2$.

12. $\begin{cases} ax + by = a + b, \\ ax - 2by = 2a - b. \end{cases}$

Выразим из первого уравнения системы ax через y: $ax = a + b - by$.

Подставим во второе уравнение системы вместо ax получившееся выражение и решим уравнение относительно переменной y:

$$a + b - by - 2by = 2a - b;\ 3by = 2b - a;\ y = \frac{2b - a}{3b}.$$

Теперь найдём x:

$$ax = a + b - \frac{2b - a}{3};\ x = \frac{4a + b}{3a}.$$

13. Найдём координаты точки пересечения прямых $3x - y = -9$ и $5x + 4y = 2$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = -9, \\ 5x + 4y = 2. \end{cases}$$

Отсюда $x = -2$, $y = 3$.

Эти прямые пересекаются в точке $(-2;\ 3)$. Прямая $y - x = 5$ также проходит через эту точку, следовательно, данные три прямые пересекаются в одной точке.

15. $\begin{cases} (2x - 1)^2 - (2x + 3)^2 = 10y, \\ (y + 2)^2 - (y - 4)^2 = -30x; \end{cases}$

$$\begin{cases} (2x - 1 - 2x - 3)(2x - 1 + 2x + 3) = 10y, \\ (y + 2 - y + 4)(y + 2 + y - 4) = -30x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \cdot (4x + 2) = 10y, \\ 6 \cdot (2y - 2) = -30x; \end{cases} \quad \begin{cases} 8x + 5y = -4, \\ 5x + 2y = 2. \end{cases}$$

Отсюда $x = 2$, $y = -4$.

Пункт 39

8. $\begin{cases} ax + by = 2(a+b), \\ 2ax - 3by = 3(a-b); \end{cases} \Bigg| -2 \quad \begin{cases} -2ax - 2by = -4(a+b), \\ \underline{2ax - 3by = 3(a-b);} \end{cases}$

$$-5by = -a - 7b.$$

Отсюда $y = \frac{a+7b}{5b}$, $x = \frac{9a+3b}{5a}$.

9. Найдём координаты точки пересечения графиков функций $3x - 4y = 9$ и $5x + 2y = 41$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 9, \\ 5x + 2y = 41. \end{cases}$$

Отсюда $x = 7$, $y = 3$.

Графики данных функций пересекаются в точке $N(7;\ 3)$.

Подставим в уравнение линейной функции $y = kx + b$ координаты точек $M(1;\ -9)$ и $N(7;\ 3)$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} k + b = -9, \\ 7k + b = 3. \end{cases}$$

Отсюда $k = 2$, $b = -11$.

Искомая функция: $y = 2x - 11$.

Пункт 40

4. Допустим, что угол при основании равнобедренного треугольника равен $x°$, а угол при вершине — $y°$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 180, \\ 3x - 2y = 116. \end{cases}$$

Отсюда $x = 68$, $y = 44$.

Значит, углы треугольника равны 68°, 68° и 44°.

6. Пусть электровоз весит x т, а каждый из вагонов — y т. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6{,}5 = 5y, \\ x + 20y = 426{,}5. \end{cases}$$

Отсюда $x = 90{,}5$, $y = 16{,}8$.

9. Допустим, что скорость лодки в стоячей воде равна x км/ч, а скорость течения — y км/ч. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2(x + y) + 1{,}5(x - y) = 55, \\ 0{,}5(x + y) + 2(x - y) = 30. \end{cases}$$

Отсюда $x = 15$, $y = 5$.

10. Пусть первый токарь должен был выточить x деталей, а второй — y деталей. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 220, \\ 0{,}7x - 0{,}5y = 10. \end{cases}$$

Отсюда $x = 100$, $y = 120$.

11. Пусть x см — длина прямоугольника, а y см — его ширина. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 0{,}75x + 1{,}1y = 16{,}4. \end{cases}$$

Отсюда $x = 16$, $y = 4$.

Площадь прямоугольника равна $16 \cdot 4 = 64$ (см^2), а сторона равновеликого ему квадрата равна 8 см.

12. Пусть первоначально в каждом мешке с ядрицей было по x кг, а в каждом мешке с пшеном — по y кг. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 230, \\ 2 \cdot 0{,}75x + 3 \cdot 0{,}6y = 150. \end{cases}$$

Отсюда $x = 40$, $y = 50$.

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 46. Линейные неравенства с двумя переменными и их системы

Методический комментарий

При изучении главы VI «Системы линейных уравнений» учащиеся познакомились с такими понятиями, как «линейное уравнение с двумя переменными», «график линейного уравнения с двумя переменными», «система линейных уравнений с двумя переменными». Благодаря этому для них открывается возможность сделать следующий шаг — получить начальные представления о линейных неравенствах с двумя переменными и геометрической интерпретации множества решений простейших линейных неравенств с двумя переменными и систем таких неравенств.

В теоретической части пункта даётся определение понятия решения неравенства с двумя переменными. Подробно рассматривается вопрос о множестве точек, которое задаёт на координатной плоскости неравенство $y > 0{,}5x + 2$. Учащиеся узнают, что таким множеством является полуплоскость, расположенная выше прямой $y = 0{,}5x + 2$, причём граничная прямая не принадлежит этой полуплоскости. Соответствующая иллюстрация даётся на рисунке 82 учебника. В примере 1 рассматривается полуплоскость, которую задаёт на координатной плоскости неравенство $x \geqslant 4$. Следует обратить внимание учащихся на то, что, хотя переменная y в явном виде в этом неравенстве не фигурирует, подразумевается, что оно имеет вид $x + 0y \geqslant 4$.

Следующий шаг связан с выяснением вопроса о том, какое множество точек задаёт на координатной плоскости система линейных неравенств с двумя переменными. Рассматривается пример 2, к которому даётся соответствующая иллюстрация. Этот пример является достаточно простым, и у учащихся не вызывают затруднений приведённые здесь пояснения.

В связи с тем что материал данного пункта является достаточно простым для учащихся, его изучение рекомендуется провести в форме факультативного занятия, на которое учитель может пригласить всех учащихся класса. К этому занятию рекомендуется поручить двум ученикам подготовить небольшие сообщения. Один из них может познакомить одноклассников с определением понятия «решение неравенства с двумя переменными» и соответствующими рассуждениями, которые приводятся в учебнике, а также с разобранным в учебнике примером 1. После этого учащиеся могут приступить к выполнению некоторых из упражнений **1128—1131**. Другой ученик может сделать сообщение по материалу примера 2 учебника, в котором выясняется, какое множество точек задаёт на координатной плоскости указанная система неравенств. После этого учащиеся могут приступить к выполнению некоторых заданий, представленных в упражнениях **1132—1136**.

Изучение представленных в пункте 46 «Линейные неравенства с двумя переменными» сведений из теории и выполнение включённых в него упражнений позволяет учащимся, интересующимся математикой, сделать новые шаги в достижении личностных, метапредметных и предметных результатов обучения, определённых Федеральным государственным образовательным стандартом общего среднего образования.

Указания к упражнениям учебника

1129. Неравенство задаёт полуплоскость, расположенную:

а) выше прямой $y = x$; б) ниже прямой $y = -x$; в) правее прямой $x = 1$; г) ниже прямой $y = 5$.

Во всех случаях граничная прямая принадлежит полуплоскости.

1130. а) Неравенство задаёт полуплоскость, расположенную выше прямой $y = x + 1$.

б) Неравенство задаёт открытую полуплоскость, расположенную ниже прямой $y = -0{,}2x + 3$.

1131. Имеем: а) $y \geqslant x - 1{,}3$; б) $y \geqslant -x + 5$.

1134. Система неравенств задаёт на координатной плоскости:

а) острый угол, ограниченный прямыми $y = x$ и $y = 7$;

б) полосу, ограниченную параллельными прямыми $y = -x + 7$ и $y = -x + 1$.

1135. Прямая $y = -0{,}5x + 2$ пересекает ось y в точке (0; 2), а ось x в точке (4; 0). Отсюда получаем, что данная система неравенств задаёт на координатной плоскости прямоугольный треугольник с вершинами (0; 0), (0; 2) и (4; 0). Длины катетов равны соответственно 2 и 4. Площадь треугольника равна $\frac{2 \cdot 4}{2}$, т. е. равна 4 кв. ед.

1136. а) Данная система неравенств задаёт полосу, если $k = 3$ и $b < 2$.

б) Данная система неравенств задаёт угол, если $k \neq 3$ и b — произвольное число.

Задачи повышенной трудности

Указания и решения

1184. Уравнение $(a-1)x=12$ имеет корень $x=\frac{12}{a-1}$, если $a-1\neq 0$, т. е. $a\neq 1$. Дробь $\frac{12}{a-1}$, где $a\neq 1$, может быть натуральным числом тогда и только тогда, когда знаменатель дроби является делителем числа 12. Следовательно, значение разности $a-1$ может быть равно 1, 2, 3, 4, 6 или 12. Отсюда a равно 2, 3, 4, 5, 7 или 13.

1185. г) Из определения модуля числа следует, что $6-x=7{,}3$ или $6-x=-7{,}3$. Отсюда $x=-1{,}3$ или $x=13{,}3$.

1186. Пусть данное шестизначное число имеет вид $\overline{abcabc}$, где буквами обозначены цифры, причём $a\neq 0$. Это число равно

$$100\,000a+10\,000b+1000c+100a+10b+c.$$

Преобразовав эту сумму, получим

$$(100\,000a+100a)+(10\,000b+10b)+(1000c+c)=$$
$$=100\cdot 1001a+10\cdot 1001b+1001c=1001(100a+10b+c).$$

Значит, данное число кратно 1001. Но $1001=7\cdot 11\cdot 13$, следовательно, данное число кратно 7, 11 и 13.

1187. Предположим, что в каждой бочке первоначально было a л воды. После первой операции в первой бочке стало $0{,}9a$ л воды, а после второй операции в ней стало $0{,}9a+0{,}1\cdot 0{,}9a$, т. е. $0{,}99a$ л. Во второй бочке после первой операции стало $1{,}1a$ л воды, а после второй операции в ней стало $1{,}1a-0{,}1\cdot 1{,}1a$, т. е. $0{,}99a$ л. Следовательно, в обеих бочках воды стало поровну.

1188. Пусть из 11 кг свежих грибов получилось x кг сухих. Количество грибной массы в 11 кг свежих грибов равно $11\cdot 0{,}1=1{,}1$ (кг), а в x кг сухих — $0{,}88x$ кг. Имеем уравнение $0{,}88x=1{,}1$. Отсюда $x=1{,}25$ (кг).

1189. Пусть в первом ящике находится x орехов, а в третьем — y орехов. Тогда по условию задачи во втором ящике $1{,}1x$ или $1{,}3y$ орехов. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}1{,}1x=1{,}3y,\\ x-y=80.\end{cases}$$

Отсюда $x=520$, $y=440$, а $1{,}1x=520\cdot 1{,}1=572$.

1190. Сгруппируем слагаемые, объединив первое с последним, второе с предпоследним и т. д., а затем к каждой сумме применим формулу суммы кубов.

$$1^3 + 2^3 + ... + 98^3 + 99^3 = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + ... +$$
$$+ (49^3 + 51^3) + 50^3 = 100 \cdot (1 - 99 + 99^2) +$$
$$+ 100 \cdot (4 - 196 + 98^2) + ... + 100 \cdot (49^2 - 49 \cdot 51 + 51^2) + 125\,000.$$

Каждое слагаемое этой суммы делится на 100, следовательно, и вся сумма делится на 100.

1191. По условию задачи $a = 0,8b$, $c = 1,4b$, $c - a = 72$, т. е. $1,4b - 0,8b = 72$. Отсюда $b = \frac{72}{0,6} = 120$, $c = 1,4 \cdot 120 = 168$, $a = 0,8 \cdot 120 = 96$.

1192. По условию задачи $a = 0,75b$ и $a = 0,4c$. Отсюда $b = \frac{4}{3}a$ и $c = \frac{5}{2}a$. Поскольку $c - b = 42$, то $\frac{5}{2}a - \frac{4}{3}a = 42$, т. е. $a = 36$. Отсюда $b = 48$.

1193. Пусть искомое двузначное число имеет вид $\overline{ab}$, где $a \neq 0$. Это число равно $10a + b$. По условию задачи $10a + b = 4(a + b)$. Отсюда $b = 2a$. Учитывая, что буквами a и b обозначены цифры, подставляем в него вместо a цифры 1, 2, 3, 4. Получаем соответствующие значения b, равные 2, 4, 6, 8. Значит, существуют четыре искомых двузначных числа: 12, 24, 36 и 48.

1194. Обозначим число $\underbrace{111\ldots1}_{81\text{ раз}}$ буквой b, а число $\underbrace{111\ldots1}_{9\text{ раз}}$ буквой a.

Выразим b через a:

$$b = a + 10^9a + 10^{18}a + 10^{27}a + 10^{36}a + 10^{45}a + 10^{54}a +$$
$$+ 10^{63}a + 10^{72}a =$$
$$= a(1 + 10^9 + 10^{18} + 10^{27} + 10^{36} + 10^{45} + 10^{54} + 10^{63} + 10^{72}).$$

Число a делится на 9, так как сумма его цифр равна 9. Сумма, стоящая в скобках, является числом, содержащим 9 единиц, а остальные — нули, следовательно, эта сумма также делится на 9. Значит, число b делится на 81.

1195. Представим простое число p в виде $p = 30q + r$, где $0 < r < 30$, и докажем, что остаток r не может быть составным числом.

Выпишем все составные числа, меньшие 30:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18,
20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28.

Предположим, что r — составное число, тогда выражение $30q + r$ кратно хотя бы одному из чисел 2, 3 и 5, т. е. является составным числом. Это противоречит условию, что p — простое число. Следовательно, r — простое число или единица.

1196. Пусть искомое двузначное число имеет вид $\overline{ab}$. После того как к нему слева и справа приписали 1, оно примет вид $\overline{1ab1}$, т. е. станет равным $1000 + 100a + 10b + 1$. По условию задачи

$$1000 + 100a + 10b + 1 = 23(10a + b).$$

Преобразовав это равенство, получим

$$1001 - 130a - 13b = 0.$$

Отсюда $13(10a + b) = 1001$, $10a + b = 77$.

1197. Пусть искомое двузначное число имеет вид $\overline{ab}$. Если в этом числе зачеркнуть цифру b, получим равенство $10a + b = 31a$; если же зачеркнуть цифру a, получим равенство $10a + b = 31b$. Первый случай невозможен, так как приводит к равенству $b = 21a$. Во втором случае имеем $10a = 30b$; $a = 3b$.

Возможны три варианта, когда цифра b равна 1, 2 или 3. Значит, в каждом из чисел 31, 62 или 93 зачеркнули первую цифру.

1198. Пусть первоначальное число имеет вид $\overline{8ab}$. Тогда после перенесения цифры 8 на последнее место получится число $\overline{ab8}$. Имеем равенство

$$100a + 10b + 8 - (800 + 10a + b) = 18.$$

Отсюда $90a + 9b = 810$; $10a + b = 90$. Значит, искомое трёхзначное число 890.

1199. а) График уравнения $(x - 2)(y + 3) = 0$ представляет собой пару прямых: $x = 2$ и $y = -3$.

б) График уравнения $x(x + y) = 0$ представляет собой пару прямых: $x = 0$ и $y = -x$, т. е. ось y и биссектрису II и IV координатных углов.

1200. а) Рассмотрим два случая: $y < 0$ и $y \geqslant 0$.

Если $y < 0$, то $|y| = -y$ и $x = y - y = 0$; если $y \geqslant 0$, то $|y| = y$ и $x = 2y$; $y = \frac{x}{2}$.

График представляет собой объединение множества точек нижней полуоси y и луча $y = 0{,}5x$, где $x \geqslant 0$ (рис. 4, a).

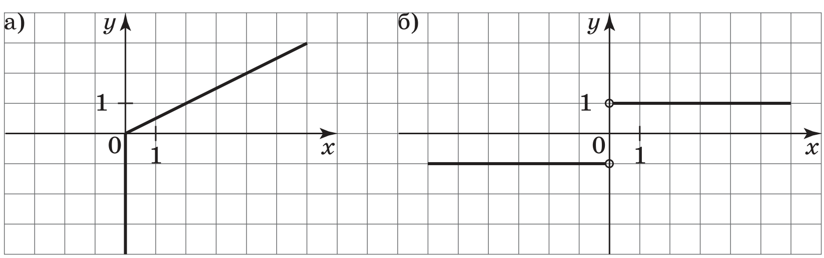

Рис. 4

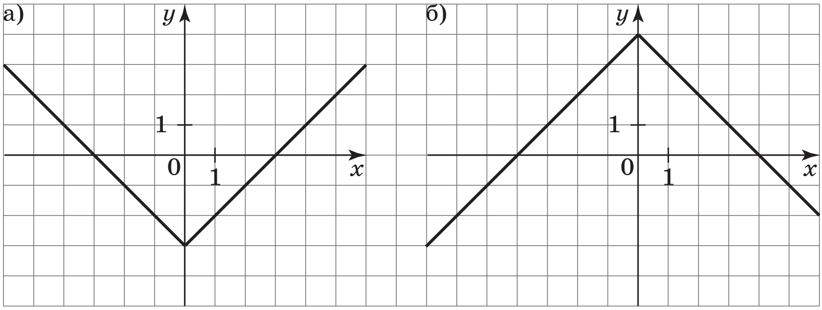

Рис. 5

б) Из уравнения $y = x|y|$ выразим x, получим $x = \frac{y}{|y|}$. Рассмотрим два случая: $y < 0$ и $y > 0$.

Если $y < 0$, то $|y| = -y$ и $x = -1$; если $y > 0$, то $|y| = y$ и $x = 1$.

График представляет собой объединение множества точек, принадлежащих лучу $x = -1$, где $y < 0$, и лучу $x = 1$, где $y > 0$ (рис. 4, *б*).

1201. а) График получается из графика функции $y = |x|$ сдвигом на 3 единицы вниз (рис. 5, *а*).

б) График получается из графика функции $y = -|x|$ сдвигом на 4 единицы вверх (рис. 5, *б*).

1202. Пусть a — искомое число, т. е.

$$2a = p^2 \text{ и } 3a = q^3,$$

где p и q — натуральные числа. Следовательно, p кратно 2, а q кратно 3, т. е.

$$p = 2b, \text{ а } q = 3c,$$

где b и c — натуральные числа.

Отсюда $2a = 4b^2$ и $3a = 27c^3$, т. е. $a = 2b^2$ и $a = 9c^3$. Значит, a кратно 18.

Подбором находим, что из чисел, кратных 18, наименьшим числом, удовлетворяющим условию задачи, является число 72. Действительно, $2 \cdot 72 = 144 = 12^2$, а $3 \cdot 72 = 216 = 6^3$.

1203. Если число оканчивается цифрой 6, то любая его степень оканчивается цифрой 6, поэтому число 96^7 оканчивается цифрой 6. Число $22^5 = 11^5 \cdot 2^5$; число 11^5 оканчивается цифрой 1, а число 2^5 оканчивается цифрой 2, поэтому число 22^5 оканчивается цифрой 2. Число $48^6 = 16^6 \cdot 3^4 \cdot 3^2$; число 16^6 оканчивается цифрой 6, число 3^4 оканчивается цифрой 1, а $3^2 = 9$, поэтому 48^6 оканчивается цифрой 4.

Следовательно, выражение $96^7 - 22^5 - 48^6$ оканчивается нулём, т. е. кратно 10.

1204. Из рисунка 85 учебника видно, что если принять одну клетку за единицу, то точка M имеет координаты $x = 2$, $y = 3$. Тогда искомые точки имеют координаты: $A(4;\ 6)$, $B(-6;\ 1{,}5)$, $C(1;\ -6)$ и $D(-1;\ -1)$.

1205. Составим разность дробей $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ и $\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$ и преобразуем её:

$$\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} - \frac{10^{11}+1}{10^{12}+1} = \frac{(10^{10}+1)(10^{12}+1)-(10^{11}+1)^2}{(10^{11}+1)(10^{12}+1)}.$$

Знаменатель этой дроби положителен. Определим знак числителя:

$$(10^{10}+1)(10^{12}+1)-(10^{11}+1)^2 =$$
$$= 10^{22}+10^{12}+10^{10}+1-10^{22}-2\cdot 10^{11}-1 =$$
$$= 10^{12}+10^{10}-2\cdot 10^{11} = 10^{10}(100+1-20) > 0.$$

Следовательно, первая дробь больше второй.

1206. Представим данную сумму в виде

$$2x^2+2y^2+2xy-2xy.$$

Отсюда

$$2x^2+2y^2 = (x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2) = (x+y)^2+(x-y)^2.$$

1207. Так как $y \neq 0$, то данное выражение можно представить в виде

$$15x^2-18xy+15y^2 = 15y^2\left(\frac{x^2}{y^2}-1{,}2\frac{x}{y}+1\right) =$$
$$=15y^2\left(\frac{x^2}{y^2}-1{,}2\frac{x}{y}+0{,}36+0{,}64\right) = 15y^2\left(\frac{x}{y}-0{,}6\right)^2+9{,}6y^2 > 0.$$

1208. а) Заменим слагаемое -2 суммой $-1-1$. Получим

$$x^8+x^4-2 = (x^8-1)+(x^4-1) = (x^4-1)(x^4+1)+(x^4-1) =$$
$$= (x^4-1)(x^4+2) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+2) =$$
$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+2).$$

б) Сгруппируем первое слагаемое с третьим, а второе с четвёртым, получим

$$a^5-a^2-a-1 = (a^5-a)-(a^2+1) = a(a^4-1)-(a^2+1) =$$
$$= a(a^2-1)(a^2+1)-(a^2+1) = (a^2+1)(a^3-a-1).$$

в) Представим выражение n^4+4 в виде $n^4+4n^2+4-4n^2$. Получим

$$n^4+4 = (n^4+4n^2+4)-4n^2 = (n^2+2)^2-(2n)^2 =$$
$$= (n^2-2n+2)(n^2+2n+2).$$

г) Представим n^2 как $2n^2-n^2$, получим

$$n^4+n^2+1 = (n^4+2n^2+1)-n^2 =$$
$$= (n^2+1)^2-n^2 = (n^2+1-n)(n^2+1+n).$$

1209. Представим разность $p^2 - 1$ как произведение $(p-1)(p+1)$. По условию p — простое число, большее 3, следовательно, p — нечётное число, а значит, $(p-1)$ и $(p+1)$ — чётные числа. Из трёх последовательных целых чисел $p-1$, p и $p+1$ одно кратно 3. Число p не делится на 3, следовательно, одно из чисел $p-1$ или $p+1$ кратно 3, а так как оно чётное, значит, кратно 6.

Пусть $p + 1 = 6k$, где $k \in \boldsymbol{N}$, тогда

$$p - 1 = 6k - 2 = 2(3k - 1).$$

Произведение $(p - 1)(p + 1) = 12k(3k - 1)$.

Если k чётное число, то $12k$ кратно 24; если k нечётное число, то число $3k - 1$ чётное, значит, $12(3k - 1)$ кратно 24. В обоих случаях $p^2 - 1$ кратно 24. Предположение $p - 1 = 6k$ приводит к тому же результату.

1210. Обозначим через n и $n + 1$ два последовательных натуральных числа. Составим разность их кубов и преобразуем её:

$$(n + 1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n(n + 1) + 1.$$

Из двух последовательных натуральных чисел одно чётное, следовательно, произведение $3n(n + 1)$ кратно 6, а разность $(n + 1)^3 - n^3$ даёт при делении на 6 остаток, равный 1.

1211. Обозначим через n среднее из пяти последовательных натуральных чисел ($n > 2$), тогда остальные числа имеют вид $n - 2$, $n - 1$, $n + 1$ и $n + 2$. Преобразуем сумму квадратов этих пяти чисел:

$$(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 =$$
$$= 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2).$$

Это число может быть квадратом натурального числа, если $n^2 + 2$ кратно 5. Но число n^2 не может оканчиваться цифрой 3 или цифрой 8. Следовательно, $n^2 + 2$ не может быть кратно 5, а значит, сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть квадратом натурального числа.

1212. Пусть n — натуральное число, не кратное 3, тогда оно имеет вид $3k + 1$ или $3k + 2$, где $k \in \boldsymbol{N}$.

Если $n = 3k + 1$, то $(3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 9k^2 + 6k = 3k(3k + 2)$, т. е. кратно 3.

Если $n = 3k + 2$, то $(3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1)$, т. е. кратно 3.

1213. Представим данное произведение в виде

$$(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1),$$

включив в него множитель $2 - 1 = 1$. В результате последовательного применения формулы разности квадратов получим $2^{64} - 1$.

1214. Рассмотрим сначала случай, когда $x-y$ и $x+y$ — положительные числа, и предположим, что уравнение $x^2-y^2=30$ имеет решение в целых числах. Так как $30=2\cdot3\cdot5$, то возможны следующие варианты:

$$\begin{cases}x-y=2,\\x+y=15;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=3,\\x+y=10;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=5,\\x+y=6.\end{cases}$$

Решением каждой из этих систем является пара дробных чисел.

Случай, когда $x-y$ и $x+y$ — отрицательные числа, даёт тот же результат. Полученное противоречие показывает, что уравнение $x^2-y^2=30$ не имеет целых решений.

1215. Предположим, что существуют целые числа a, b, c, d, для которых верны равенства

$$a\cdot19^3+b\cdot19^2+c\cdot19+d=1,$$
$$a\cdot62^3+b\cdot62^2+c\cdot62+d=2.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$a(62^3-19^3)+b(62^2-19^2)+c(62-19)=1.$$

После применения формул разности кубов и разности квадратов получим

$$43\cdot(a\ (62^2+62\cdot19+19^2)+b\cdot81+c)=1.$$

Отсюда $43\cdot p=1$, где p — целое число. Это равенство невозможно ни при каком целом p. Полученное противоречие доказывает, что целых чисел a, b, c, d, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

1216. Преобразуем левую часть равенства:

$$x^4+2x^3z-2xz^3-z^4-4x^2y^2+4y^2z^2=$$
$$=(x^4-z^4)+(2x^3z-2xz^3)-(4x^2y^2-4y^2z^2)=$$
$$=(x^2-z^2)(x^2+z^2)+2xz(x^2-z^2)-4y^2(x^2-z^2)=$$
$$=(x^2-z^2)(x^2+z^2+2xz-4y^2).$$

Если y есть среднее арифметическое чисел x и z, то $y=\frac{x+z}{2}$ и $4y^2=(x+z)^2$. Выполним подстановку: $4y^2=(x+z)^2$.

Получим

$$(x^2-z^2)(x^2+z^2+2xz-4y^2)=(x^2-z^2)((x+z)^2-(x+z)^2)=0.$$

1217. Выразим из данного равенства $2q^2$, получим $2q^2=p^2-1$. Подставим вместо q наименьшее простое число $q=2$, тогда $p^2-1=8$. Отсюда $p=3$.

Других чисел, кроме $p=3$ и $q=2$, удовлетворяющих условию задачи, не существует. Действительно, если p — нечётное число, то $p-1$ и $p+1$ — числа чётные, следовательно, их произведение кратно 4, тогда как $2q^2$ при $q>2$ не делится на 4, так как q — нечётное число.

1218. Преобразуем правую часть данного равенства:

$$a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d=$$
$$=a(x^3-6x^2+12x-8)+b(x^2-4x+4)\ +\ c(x-2)+d=$$
$$=ax^3+(b-6a)x^2+(12a-4b+c)x+(4b-8a-2c+d).$$

Сравнив коэффициенты при x^3, x^2, x, x^0 в левой и правой частях равенства, получим

$$a=5;\ b-6a=-32;\ 12a-4b+c=75;\ 4b-8a-2c+d=-71.$$

Отсюда $a=5$, $b=-2$, $c=7$, $d=-9$.

1219. Заменив в многочлене ay^3+by^2+cy+d переменную y двучленом $(x+1)$, получим

$$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d=$$
$$=ax^3+3ax^2+3ax+a+bx^2+2bx+b+cx+c+d=$$
$$=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+(a+b+c+d).$$

Приравняем коэффициенты при x^3, x^2, x и x^0 полученного многочлена и многочлена $3x^3+7x^2+9x+6$:

$$a=3;\ 3a+b=7;\ 3a+2b+c=9;\ a+b+c+d=6.$$

Отсюда $a=3$, $b=-2$, $c=4$, $d=1$.

Искомое выражение имеет вид

$$3(x+1)^3-2(x+1)^2+4(x+1)+1.$$

1220. Представим уравнение $3x+7y=23$ в виде

$$y=3-\frac{3x-2}{7}.$$

Значение y может быть натуральным числом тогда и только тогда, когда $3x-2=7$ или $3x-2=14$. Из первого условия находим, что $x=3$; из второго условия находим, что $x=5\frac{1}{3}$. Последнее значение x не удовлетворяет условию задачи, а $x=3$ удовлетворяет, так как в этом случае $y=2$. Значит, $x=3$, $y=2$.

1221. а) $\begin{cases} x-y=-1, \\ y-z=-1, \\ z+x=8. \end{cases}$

Сложив все три уравнения, получим $2x=6$; $x=3$. Тогда $y=x+1$; $y=4$; $z=8-x$; $z=5$.

б) $\begin{cases} x+y=-3, \\ y+z=6, \\ z+x=1. \end{cases}$

Сложив все три уравнения, получим $2x+2y+2z=4$; $x+y+z=2$. Вычтем последовательно из этого уравнения каждое уравнение системы и найдём значения переменных: $z=5$, $x=-4$, $y=1$.

в) $\begin{cases} x-y+2z=1, \\ x-y-z=-2, \\ 2x-y+z=-1. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе, получим $3z=3$; $z=1$. Подставим значение z во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x-y=-2. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим $x=-1$. Тогда $y=0$.

1222. Пусть искомое трёхзначное число имеет вид $\overline{xyz}$.

По условию задачи $\overline{xyz}=c^3$, где $1 \leqslant c \leqslant 9$. Так как c^3 является трёхзначным числом, то $c \geqslant 5$, т. е. c^3 равно одному из чисел 125, 216, 343, 512 или 729. Из этих чисел только 729 является квадратом двузначного числа: $729=27^2$. Значит, искомое трёхзначное число равно 729.

1223. Обозначим через a и b искомые натуральные числа. Тогда $a+b=168$, НОД $(a, b)=24$. Отсюда $a=24k$, $b=24l$, где k, l — натуральные числа. Подставим эти выражения для a и b в уравнение $a+b=168$:

$$24k+24l=168;\ k+l=7.$$

Подбором найдём три возможные пары значений k и l: (1; 6); (2; 5) и (3; 4). Значит, искомые числа: 24 и 144, или 48 и 120, или 72 и 96.

1224. Пусть x и y — простые числа, сумма которых равна 26. Подставив в уравнение $x+y=26$ вместо x простые числа от 2 до 13, выберем те, при которых y также является простым числом.

Из ряда простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13 подходят лишь три числа: 3, 7 и 13.

Задача имеет три пары решений: (3; 23), (7; 19) и (13; 13).

1225. Пусть скорость мотоциклиста при движении в гору равна x км/ч, а под гору — y км/ч. Тогда на весь путь от A до B мотоциклист затратил $\left(\frac{3}{x}+\frac{6}{y}+\frac{12}{18}\right)$ ч, что по условию задачи равно $1\frac{7}{60}$ ч. Отсюда первое уравнение

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{y}+\frac{12}{18}=\frac{67}{60} \text{ или } \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{20}.$$

На обратный путь мотоциклист затратил $\left(\frac{12}{18}+\frac{6}{x}+\frac{3}{y}\right)$ ч, что по условию задачи равно $1\frac{16}{60}$ ч.

Отсюда получаем второе уравнение

$$\frac{12}{18}+\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=\frac{76}{60} \text{ или } \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{3}{20},\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения системы на −2 и сложив результат со вторым уравнением, получим уравнение

$$\frac{1}{y}-\frac{4}{y}=\frac{1}{5}-\frac{3}{10}; \quad -\frac{3}{y}=-\frac{1}{10}; \quad y=30.$$

Подставив полученное значение y в первое уравнение, найдём, что $x=12$.

Значит, скорость мотоциклиста при движении в гору была равна 12 км/ч, а при движении под гору — 30 км/ч.

1226. Предположим, что в артели было x косцов и каждый из них скашивал в день y м^2. Тогда за полдня на большом лугу косцы скосили $x\cdot\frac{y}{2}$ м^2, а за следующие полдня — $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}$ м^2. Значит, площадь большого луга равна $\left(x\cdot\frac{y}{2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\right)$ м^2. На малом лугу в первый день косцы скосили $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}$ м^2, и остались ещё не скошенными y м^2. Следовательно, площадь малого луга равна $\left(\frac{xy}{4}+y\right)$ м^2.

По условию задачи площадь первого луга вдвое больше, чем площадь второго, т. е.

$$\frac{xy}{2}+\frac{xy}{4}=2\left(\frac{xy}{4}+y\right).$$

Разделим обе части уравнения на y ($y\neq 0$):

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=\frac{x}{2}+2.$$

Отсюда $x=8$. Следовательно, в артели было 8 косцов.

1227. Пусть скорость автобуса равна x км/ч, а скорость легкового автомобиля — y км/ч. Автобус и автомобиль ехали до встречи $\left(7\frac{5}{6}-6\frac{1}{3}\right)$ ч, т. е. $1\frac{1}{2}$ ч. Имеем первое уравнение

$$1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}y=180 \text{ или } x+y=120.$$

Если бы автобус вышел на 1 ч 15 мин раньше, а автомобиль — на 15 мин позже, то автобус вышел бы из пункта A в 5 ч 5 мин, а автомобиль — из пункта B в 6 ч 35 мин. Значит, до встречи автобусу потребовалось бы $\left(7\frac{7}{12} - 5\frac{1}{12}\right)$ ч, т. е. $2\frac{1}{2}$ ч, а автомобилю — $\left(7\frac{7}{12} - 6\frac{7}{12}\right)$ ч, т. е. 1 ч. Имеем второе уравнение $2\frac{1}{2}x + y = 180$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 120, \\ 2\frac{1}{2}x + y = 180. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $x = 40$, $y = 80$. Значит, скорость автобуса была 40 км/ч, а автомобиля — 80 км/ч.

1228. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста, а y км/ч — скорость одного из автобусов. Тогда $1\frac{5}{7}y$ км/ч — скорость второго автобуса, шедшего быстрее первого.

Встреча велосипедиста со вторым автобусом произошла через $\left(10\frac{1}{6} - 8\frac{5}{6}\right)$ ч, т. е. через $1\frac{1}{3}$ ч. Имеем первое уравнение $1\frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{5}{7}y + x\right) = 100$ или $1\frac{5}{7}y + x = 75$.

Встреча велосипедиста с первым автобусом произошла через $\left(10\frac{5}{6} - 8\frac{5}{6}\right)$ ч, т. е. через 2 ч. Имеем второе уравнение $(x + y) \cdot 2 = 100$ или $x + y = 50$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1\frac{5}{7}y + x = 75, \\ x + y = 50. \end{cases}$$

Отсюда $y = 35$, $x = 15$. Значит, скорость велосипедиста 15 км/ч.

1229. Сделаем чертёж (рис. 6). Пусть скорость всадника равна x км/ч, а скорость пешехода — y км/ч. Обозначим расстояние AB через s км. Всадник проехал это расстояние дважды за $1\frac{2}{3}$ ч, следовательно, $s = x \cdot \frac{5}{3} : 2$, т. е. $s = \frac{5}{6}x$ (км). Пешеход затратил на путь AB $\frac{s}{y}$ ч, а всадник — $\frac{s}{x}$ ч. Получим уравнение $\frac{s}{y} - \frac{s}{x} = \frac{5}{6}$.

Рис. 6

К моменту встречи всадник проехал $(s + 2)$ км, а пешеход прошёл $(s - 2)$ км. Следовательно, $\frac{s+2}{x} = \frac{s-2}{y}$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} s = \frac{5}{6}x, \\ \frac{s}{y} - \frac{s}{x} = \frac{5}{6}, \\ \frac{s+2}{y} = \frac{s-2}{x}. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$

Из первого уравнения найдём, что $\frac{1}{y} = \frac{2}{x}$. Следовательно, $\frac{2}{x} + \frac{4}{x} = \frac{5}{6}$; $x = 7{,}2$. Тогда $y = 3{,}6$, $s = \frac{5}{6} \cdot 7{,}2$, т. е. $s = 6$.

Итак, скорость всадника 7,2 км/ч, скорость пешехода 3,6 км/ч, а расстояние AB равно 6 км.

1230. В одной тонне только что добытого каменного угля содержится 20 кг воды и 980 кг сухого вещества. Пусть x кг — масса каменного угля после двухнедельного пребывания на воздухе. Тогда в нём содержится $\frac{12x}{100}$ кг воды и $\frac{88x}{100}$ кг сухого вещества. Масса сухого вещества не изменилась, следовательно, $\frac{88x}{100} = 980$; $x = \frac{980 \cdot 100}{88} \approx 1114$.

Значит, после того как тонна угля пролежала на воздухе две недели, его масса увеличилась примерно на 114 кг.

1231. Сделаем чертёж (рис. 7). Буквой *Ш* обозначим точку, в которой располагается школа, буквой *Д* — дом, буквой C — точку, из которой первый брат вернулся в школу, буквой B — точку встречи братьев.

Пусть обычная скорость братьев равна x км/ч, скорость бега первого брата равна kx км/ч $(k > 1)$, а расстояние BC равно s км.

Время, затраченное каждым братом с момента выхода из школы до момента встречи в точке B, обозначим t_1 и t_2 соответственно.

Имеем $t_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x : kx \cdot 2 + \frac{s}{kx}$, $\quad t_2 = \frac{1}{4} + \frac{2s}{x}$.

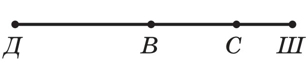

Рис. 7

По условию задачи $t_1 = t_2$. Следовательно,

$$\frac{1}{4} + \frac{x}{2kx} + \frac{s}{kx} = \frac{1}{4} + \frac{2s}{x}.$$

Отсюда $s = \frac{x}{2(2k-1)}$.

Найдём время, затраченное вторым братом на путь от школы до точки B в действительности, и время, которое он затратил бы, если бы шёл домой с братом, как обычно. Получим $\frac{1}{4} + \frac{2s}{x}$ и $\frac{1}{4} + \frac{s}{x}$.

Так как задержка составила $\frac{1}{10}$ ч, то

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2s}{x}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{s}{x}\right) = \frac{1}{10}.$$

Отсюда $\frac{s}{x} = \frac{1}{10}$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} s = \frac{x}{2(2k-1)}, \\ \frac{s}{x} = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение этой системы значение s, получим

$$\frac{x}{2(2k-1)x} = \frac{1}{10}; \quad 2(2k-1) = 10; \quad 2k - 1 = 5; \quad k = 3.$$

Значит, скорость бега первого брата в 3 раза больше обычной скорости ходьбы братьев.

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $5-4\frac{1}{3}:3$.

2. Вычислите значения выражений $1{,}8x+0{,}3y$ и $2{,}6x-0{,}2y$ при $x=-2$, $y=3$ и сравните их.

3. Упростите выражение:

а) $7x-3y-9x+8y$; б) $x-(6x-1)+(13-4x)$;

в) $5(4-3p)-6(8p+2)$.

---

4. В палатку привезли 400 кг картофеля. В первый день продали 45% всего картофеля, а во второй — 30% остатка. Сколько картофеля осталось в палатке?

5. Упростите выражение и найдите его значение при указанном значении переменной:

а) $6(1{,}2a-0{,}8)-3{,}6a+7{,}2$ при $a=-0{,}5$;

б) $9a-(a-(3a-1))$ при $a=-1{,}01$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $6-8\frac{1}{6}:7$.

2. Вычислите значения выражений $1{,}6a-0{,}3p$ и $2{,}1a-0{,}1p$ при $a=-1$, $p=-2$ и сравните их.

3. Упростите выражение:

а) $5a-17b+3b-11a$; б) $10q-(8p-1)+(6p-11)$;

в) $3(2b-6)-0{,}5(12-4b)$.

---

4. В книге 300 страниц. В первый день Антон прочитал 40% всей книги, а во второй — 35% остатка. Сколько страниц осталось непрочитанными?

5. Упростите выражение и найдите его значение при указанном значении переменной:

а) $-5(1{,}4a-6)+(3{,}4a-1)$ при $a=\frac{1}{9}$;

б) $10p-(3p-(p+4))$ при $p=-0{,}1$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\frac{7}{8}x=56$; б) $17{,}2-4y=0$; в) $8{,}5-2x=1{,}3+7x$.

2. В двух ящиках находится 56 деталей. Сколько деталей в каждом ящике, если в одном из них на 6 деталей больше, чем в другом?

3. Найдите среднее арифметическое, размах и моду ряда чисел

29, 18, 11, 18, 6, 14.

---

4. Одно из двух чисел в 4 раза больше другого. Если меньшее число уменьшить на 1, а большее увеличить на 2, то первый результат будет в 6 раз меньше второго. Найдите эти числа.

5. В ряду чисел 6, 8, __ , 12, 15 пропущено одно число. Найдите его, если известно, что среднее арифметическое этого ряда равно 10.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{6}x = -30$; б) $1{,}6 - 0{,}08y = 0$; в) $7{,}6 - 3x = 4{,}1 + 2x$.

2. В двух седьмых классах учатся 54 учащихся, причём в одном из них на 2 учащихся меньше, чем в другом. Сколько учащихся учится в каждом классе?

3. Найдите среднее арифметическое, размах и моду ряда чисел

48, 42, 56, 48, 16, 18.

---

4. Одно из двух чисел в 5 раз больше другого. Если большее число уменьшить на 2, а меньшее увеличить на 2, то первый результат будет втрое больше второго. Найдите эти числа.

5. В ряду чисел 4, 8, 12, __ , 13, 7 пропущено одно число. Найдите его, если известно, что среднее арифметическое этого ряда равно 9.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Функция задана формулой $y = 3x - 9$. Найдите:

а) значение y, если $x = -\frac{1}{3}$; 0; 4,5;

б) значение x, при котором $y = -3$; 0; 6.

2. График какой из функций $y = 2x + 11$, $y = -x + 16$, $y = 3x$, проходит через начало координат? Постройте этот график.

3. Постройте график функции $y = 0{,}5x + 1$.

---

4. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = 0{,}6x - 4{,}2$ с осями координат.

5. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точку $P(0; -3)$ и параллелен графику функции $y = 3x - 2$.

Вариант 2

1. Функция задана формулой $y = -6x + 15$. Найдите:

а) значение y, если $x = -0{,}5;\ 0;\ 2\frac{1}{3}$;

б) значение x, при котором $y = -3;\ 0;\ 20$.

2. График какой из функций $y = -2x + 1$, $y = -x$, $y = 6x + 3$ проходит через начало координат? Постройте этот график.

3. Постройте график функции $y = -0{,}5x + 2$.

---

4. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = 1{,}5x + 3$ с осями координат.

5. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точку $P(-2; 0)$ и параллелен графику функции $y = 1{,}5x + 1$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Выполните действия:

а) $x^3 \cdot x^9$; б) $a^6 : a^2$; в) $(-b^4)^3$.

2. Найдите значение выражения $-5a^4 + a^3$ при $a = -2$.

3. Упростите выражение:

а) $15x^2y \cdot (-2xy^2)$; б) $(-3a^4b^6)^3$.

---

4. Вычислите значение выражения $\frac{5^5 \cdot 125}{25^3}$.

5. Упростите выражение:

а) $\left(3\frac{1}{3}a^4b^2\right)^3 \cdot (-5ab^4)$; б) $(x^{5n-2})^2 \cdot x^{15-n}$.

6. Решите графически уравнение $x^2 = 6 - x$.

Вариант 2

1. Выполните действия:

а) $a^{10} \cdot a^9$; б) $y^{12} : y^4$; в) $(-x^2)^6$.

2. Найдите значение выражения $-6b^2 + b^3$ при $b = -3$.

3. Упростите выражение:
а) $7a^4b^7 \cdot (-3ab^5)$; б) $(-5x^7y^5)^2$.

---

4. Вычислите значение выражения $\frac{81^2}{3^6 \cdot 27}$.

5. Упростите выражение:
а) $\left(2\frac{1}{4}a^5b^3\right)^2 \cdot (-3a^4b^4)$; б) $(b^{6n-1})^3 \cdot b^{9-n}$.

6. Решите графически уравнение $x^2 = 2 - x$.

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Выполните действия:
а) $(3p^2 - 2p - 9) - (p^2 - 2p + 1)$; б) $13x^2(x^2 - 2x + 4) - 7x^4$.
2. Вынесите общий множитель за скобки:
а) $9a^2 - 15ac$; б) $12x^5 - 6x^3 + 3x^2$.
3. Решите уравнение:
а) $5(2x - 3) = 6 - (3 - 8x)$; б) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+4}{10} = 1$.

---

4. Из посёлка на станцию пешеход шёл со скоростью 5 км/ч, а возвращался со скоростью, на 1 км/ч меньшей, затратив на обратный путь на 24 мин больше. На каком расстоянии от посёлка находится станция?
5. Докажите, что значение выражения

$$(0{,}75x^2 - 0{,}6xy + 0{,}6y^2) - \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{5}xy - 0{,}4y^2 - 7\right)$$

не зависит от значений переменной x.

Вариант 2

1. Выполните действия:
а) $(5m^3 - m^2) - (3m^3 + m^2 - 1)$; б) $6a^3(11a^2 - a + 6)$.
2. Вынесите общий множитель за скобки:
а) $8b^3 - 12bc$; б) $15y^4 - 5y^3 + 10y$.
3. Решите уравнение:
а) $4(3x - 1) = 2 - (5 - 2x)$; б) $\frac{7x+1}{6} - \frac{2x-1}{3} = 3$.

---

4. Пешеход вышел из посёлка и отправился по шоссе со скоростью 4 км/ч. Через 1 ч 30 мин вслед за ним из посёлка выехал велосипедист со скоростью 16 км/ч. На каком расстоянии от посёлка велосипедист догонит пешехода?

5. Докажите, что значение выражения

$$(0{,}8a^2 + 1{,}2c^2 - 3{,}06ac + 5) - \left(0{,}2c^2 - 3\frac{3}{50}ac + \frac{4}{5}a^2\right)$$

не зависит от значений переменной a.

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Выполните умножение:
а) $(3y + 4)(2y - 11)$; б) $(2a - 7)(5a + 1)$;
в) $(a - 4)(a^2 - 8a + 16)$.

2. Представьте в виде произведения:
а) $15a - 65$; б) $32x^3y - 8y^5$.

---

3. Преобразуйте в многочлен выражение

$$-0{,}6x(2 - 3x^2)(x^2 + 1).$$

4. Разложите на множители многочлен:
а) $7p - a^2 + ap - 7a$; б) $ax - bx - bc + ac + b - a$.

5. В первой пачке находилось вдвое больше тетрадей, чем во второй. После того как из первой пачки переложили во вторую 30 тетрадей, оказалось, что число тетрадей во второй пачке составляет $\frac{2}{3}$ от числа тетрадей в первой пачке. Сколько тетрадей было в каждой пачке первоначально?

Вариант 2

1. Выполните умножение:
а) $(7a - 9)(3a + 4)$; б) $(6y - 1)(12y + 3)$;
в) $(c - 5)(c^2 + 3c - 2)$.

2. Представьте в виде произведения:
а) $17b - 51$; б) $18x^3y^2 - 9x^2y$.

---

3. Преобразуйте в многочлен выражение

$$-0{,}4b(3 + b^2)(b + 8).$$

4. Разложите на множители многочлен:
а) $6a + 7x^2 - 7ax - 6x$; б) $ay - xy - ab + bx - a + x$.

5. В одну овощную палатку завезли вдвое меньше картофеля, чем в другую. После того как в первой палатке продали 60 кг, а во второй — 90 кг картофеля, оказалось, что масса картофеля, оставшегося в первой палатке, составляет $\frac{2}{7}$ от массы картофеля, оставшегося во второй палатке. Сколько картофеля завезли в каждую палатку?

Контрольная работа № 7

Вариант 1

1. Преобразуйте в многочлен выражение:
а) $(5-a)^2$; б) $(3x+4y)^2$;
в) $(9c-2)(2+9c)$; г) $(7a^3-2b^4)(2b^4+7a^3)$.
2. Упростите выражение $(6a-b)(b+6a)-(36a^2-5b^2)$.
3. Разложите на множители:
а) $49x^2-100y^2$; б) $64a^2-48ab+9b^2$.

---

4. Решите уравнение $4x(3-x)=25-(2x-1)^2$.
5. Представьте в виде многочлена:
а) $(9a^3+8b^2)(8b^2-9a^3)$; б) $(a^3+3a^2)^2$;
в) $(x-3y)^2(3y+x)^2$.
6. Разложите на множители:
а) $0{,}36a^2-c^8$; б) $(3x-4)^2-9$; в) x^6+y^3.

Вариант 2

1. Преобразуйте в многочлен выражение:
а) $(7-b)^2$; б) $(5x+8y)^2$;
в) $(4p-1)(1+4p)$; г) $(3a^3-5b^5)(5b^5+3a^3)$.
2. Упростите выражение $(7x-2y)(2y+7x)-(49x^2-6y^2)$.
3. Разложите на множители:
а) $81p^2-49a^2$; б) $4x^2+25y^2-20xy$.

---

4. Решите уравнение $9y(2-y)=25-(1-3y)^2$.
5. Представьте в виде многочлена:
а) $(11p^2-3m^3)(3m^3+11p^2)$; б) $(x^4-3x^3)^2$;
в) $(a-5b)^2(5b+a)^2$.
6. Разложите на множители:
а) $0{,}81p^2-q^8$; б) $(5x-1)^2-36$; в) a^6-b^3.

Контрольная работа № 8

Вариант 1

1. Упростите выражение:
а) $(6a-3)(a+1)-3a(2a-3)$; б) $36x(x+2)-(6x+1)^2$;
в) $4(c-3)^2-(2c-7)(7+2c)$.
2. Разложите на множители:
а) $36x-x^9$; б) $5x^2-20xy+20y^2$.

---

3. Упростите выражение

$$4(2b-b^2)^2-b^2(2b-1)(1+2b)+b^2(16b-1).$$

4. Разложите на множители:

а) $a^4 - \frac{1}{16}$;   б) $x - x^2 + y^2 - y$.

5. Докажите, что выражение $-a^2 + 2a - 4$ при любом значении a принимает отрицательное значение.

Вариант 2

1. Упростите выражение:
а) $(12y - 1)(y + 2) - 2y(6y - 3)$;   б) $25a(a + 3) - (5a - 1)^2$;
в) $9(p - 3)^2 - (3p - 1)(3p + 1)$.
2. Разложите на множители:
а) $49b - b^7$;   б) $9a^2 - 72ab + 144b^2$.

---

3. Упростите выражение

$$(2a^2 + 3a)^2 - a^2(1 + 2a)(2a - 1) - 3a^2(4a + 1).$$

4. Разложите на множители:

а) $b^4 - \frac{1}{81}$;   б) $a^2 - b^2 + 4b - 4$.

5. Докажите, что выражение $40 + a^2 - 12a$ при любых значениях a принимает положительное значение.

Контрольная работа № 9

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3x + 11y = 75; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 2x - 3y = 9. \end{cases}$

2. Группу туристов, состоящую из 27 человек, разместили на теплоходе в двухместные и трёхместные каюты, причём трёхместных кают было занято на 6 меньше, чем двухместных. Сколько трёхместных и сколько двухместных кают было занято туристами, если известно, что свободных мест в каютах не оставалось?

---

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 5, \\ 5x - 3y = 13. \end{cases}$

4. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(-3;\ -11)$ и $B(4;\ 10)$. Запишите уравнение этой прямой.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + 3y = 0, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 4y = 9, \\ 2x - 3y = 22. \end{cases}$

2. Для уборки помещения 65 семиклассников разбились на бригады по 3 человека и по 4 человека. Сколько бригад каждого вида было составлено, если известно, что всего получилось 18 бригад?

---

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=3,\\ 3x-2y=10.\end{cases}$

4. Прямая $y=kx+b$ проходит через точки $C(-1;\ -8)$, $D(4;\ 22)$. Запишите уравнение этой прямой.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. Упростите выражение $(a+5)^2-(a+2)(7+a)$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}4x-y=18,\\ 3x+5y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+4y=17,\\ 4x-5y=-29.\end{cases}$

3. Постройте график функции $y=2x-3$. Проходит ли этот график через точку $A(9{,}5;\ 16)$?

---

4. Разложите на множители многочлен:

а) $2a^3-128a$; б) $5a-b^2-ab+5b$.

5. Токарь планировал обработать полученный комплект деталей за 10 ч. Однако он обрабатывал в час на 4 детали больше, чем предполагал, и закончил работу на 2 ч раньше намеченного срока. Сколько деталей обработал токарь?

6. Решите уравнение:

а) $16x-x^3=0$; б) $y^8+1-2y^4=0$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $(a+4)^2-2a(4+3a)$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-3y=8,\\ 6x+5y=25;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+4y=29,\\ 4x+7y=52.\end{cases}$

3. Постройте график функции $y=2x+3$. Проходит ли этот график через точку $B(7{,}5;\ 18)$?

---

4. Разложите на множители:

а) x^3-81xy^2; б) $a^2-13b+13a-ab$.

5. Ателье планировало выполнить полученный заказ на пошив спортивных курток за 12 дней. Однако оно шило ежедневно на одну куртку больше, чем предполагало, и потому выполнило заказ на 2 дня раньше срока. Сколько спортивных курток сшило ателье?

6. Решите уравнение:

а) $x^3 - 64x = 0$; б) $y^{12} + 4 - 4y^6 = 0$.

Тест для итогового зачёта[1]

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\frac{a}{a-1}$, если $a = 0{,}25$.

Ответ: ________________

2. Товар стоил 3200 р. Сколько стал стоить этот товар после снижения цены на 5%?

А. 3040 р. **Б.** 304 р. **В.** 1600 р. **Г.** 3100 р.

3. Учащиеся класса в среднем выполнили по 7,5 задания из предложенного теста. Максим выполнил 9 заданий. На сколько процентов его результат выше среднего?

Ответ: ________________

4. Ряд состоит из натуральных чисел. Какая из следующих статистических характеристик не может выражаться дробным числом?

А. Среднее арифметическое **Б.** Мода **В.** Медиана
Г. Такой характеристики среди данных нет

5. Какое из уравнений не имеет корней?

А. $x^2 = 1$ **Б.** $x^2 = -1$ **В.** $x^2 = 0$ **Г.** $-x^2 = -9$

6. На координатной прямой отмечены числа A и B (рис. 8). Сравните числа $-A$ и B.

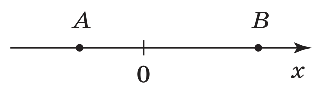

Рис. 8

А. $-A < B$ **Б.** $-A > B$ **В.** $-A = B$
Г. Сравнить невозможно

7. Упростите выражение $a(a - 2) - (a - 1)(a + 1)$.

Ответ: ________________

8. Значения каких переменных надо знать, чтобы найти значение выражения

$$(5a - 2b)(5a + 2b) - 4b(3a - b) + 6a(2b - 1)?$$

А. a и b **Б.** a **В.** b
Г. Значение выражения не зависит от значений переменных

9. Решите уравнение $(x - 2)^2 + 8x = (x - 1)(1 + x)$.

Ответ: ________________

---

[1] По результатам выполнения теста ставится зачёт, если верно или с небольшими погрешностями сделана половина заданий.

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 5x + 6y = 27. \end{cases}$

Ответ: ________________

11. За 3 ч езды на автомобиле и 4 ч езды на поезде туристы проехали 620 км, причём скорость поезда была на 10 км/ч больше скорости автомобиля. Каковы скорость поезда и скорость автомобиля?

Обозначив через x км/ч скорость автомобиля и через y км/ч скорость поезда, составили системы уравнений. Какая из них составлена правильно?

А. $\begin{cases} 3x + 4y = 620, \\ x - y = 10 \end{cases}$ **Б.** $\begin{cases} 3x + 4y = 620, \\ y - x = 10 \end{cases}$

В. $\begin{cases} 4x + 3y = 620, \\ x - y = 10 \end{cases}$ **Г.** $\begin{cases} 4x + 3y = 620, \\ y - x = 10 \end{cases}$

12. Какая из точек не принадлежит графику функции $y = -0{,}6x + 1$?

А. (3; −0,8) **Б.** (−3; 0,8) **В.** (2; −0,2) **Г.** (−2; 2,2)

13. В какой координатной четверти нет ни одной точки графика функции $y = -0{,}6x + 1{,}5$?

Ответ: ________________

14. Задайте формулой линейную функцию, график которой пересекает ось x в точке (2; 0) и ось y в точке (0; 7).

Ответ: ________________

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\frac{x}{x-2}$, если $x = 2{,}25$.

Ответ: ________________

2. Товар стоил 1600 р. Сколько стал стоить товар после повышения цены на 5%?

А. 1760 р. **Б.** 1700 р. **В.** 1605 р. **Г.** 1680 р.

3. За смену токари цеха обработали в среднем по 12,5 детали. Петров обработал за эту смену 15 деталей. На сколько процентов его результат выше среднего?

Ответ: ________________

4. В ряду данных все числа целые. Какая из следующих характеристик не может выражаться дробным числом?

А. Среднее арифметическое **Б.** Мода **В.** Медиана

Г. Такой характеристики среди данных нет

5. Какое из уравнений не имеет корней?

А. $x^2 = 0$ **Б.** $-x^2 = -4$ **В.** $x^2 = 1$ **Г.** $x^2 = -1$

6. На координатной прямой отмечены числа B и C (рис. 9). Сравните числа B и $-C$.

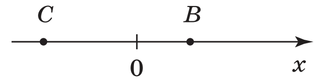

Рис. 9

А. $B > -C$ **Б.** $B < -C$ **В.** $B = -C$
Г. Сравнить невозможно

7. Упростите выражение $x(x-6)-(x-2)(x+2)$.
Ответ: ________________

8. Значения каких переменных надо знать, чтобы найти значение выражения

$$(3x-4y)(3x+4y)-3x(3x-y)+3y(1-x)?$$

А. x **Б.** y **В.** x и y
Г. Значение выражения не зависит от значений переменных

9. Решите уравнение $(x+3)^2-x=(x-2)(2+x)$.
Ответ: ________________

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+5y=-1, \\ 3x-2y=8. \end{cases}$

Ответ: ________________

11. Масса 5 см^3 железа и 10 см^3 меди равна 122 г. Масса 4 см^3 железа больше массы 2 см^3 меди на 14,6 г. Каковы плотность железа и плотность меди?

Обозначив через x г/см^3 плотность железа и через y г/см^3 плотность меди, составили системы уравнений. Какая из систем составлена правильно?

А. $\begin{cases} 5x+10y=122, \\ 4x-2y=14{,}6 \end{cases}$ **Б.** $\begin{cases} 5x+10y=122, \\ 4y-2x=14{,}6 \end{cases}$

В. $\begin{cases} 10x+5y=122, \\ 4x-2y=14{,}6 \end{cases}$ **Г.** $\begin{cases} 10x+5y=122, \\ 4y-2x=14{,}6 \end{cases}$

12. Какая из точек не принадлежит графику функции $y=-1{,}2x-1{,}4$?

А. $(-1;\ -0{,}2)$ **Б.** $(-2;\ 1)$ **В.** $(0;\ -1{,}4)$ **Г.** $(-3;\ 2{,}2)$

13. В какой координатной четверти нет ни одной точки графика функции $y=1{,}8x-7{,}2$?
Ответ: ________________

14. Задайте формулой линейную функцию, график которой пересекает ось x в точке $(-4;\ 0)$ и ось y в точке $(0;\ 3)$.
Ответ: ________________

Примерное планирование учебного материала

I вариант — 3 ч в неделю, всего 102 ч
II вариант — 4 ч в неделю, всего 136 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава I. Выражения, тождества, уравнения		**23**	**26**
1	Выражения	6	7
2	Преобразование выражений	4	5
	Контрольная работа № 1	1	1
3	Уравнения с одной переменной	7	8
4	Статистические характеристики	4	4
	Контрольная работа № 2	1	1
Глава II. Функции		**11**	**12**
5	Функции и их графики	5	6
6	Линейная функция	5	5
	Контрольная работа № 3	1	1
Глава III. Степень с натуральным показателем		**11**	**13**
7	Степень и её свойства	5	6
8	Одночлены	5	6
	Контрольная работа № 4	1	1
Глава IV. Многочлены		**18**	**20**
9	Сумма и разность многочленов	4	5
10	Произведение одночлена и многочлена	6	6
	Контрольная работа № 5	1	1
11	Произведение многочленов	6	7
	Контрольная работа № 6	1	1

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава V. Формулы сокращённого умножения		**18**	**23**
12	Квадрат суммы и квадрат разности	5	6
13	Разность квадратов. Сумма и разность кубов	5	8
	Контрольная работа № 7	1	1
14	Преобразование целых выражений	6	7
	Контрольная работа № 8	1	1
Глава VI. Системы линейных уравнений		**15**	**16**
15	Линейные уравнения с двумя переменными и их системы	5	5
16	Решение систем линейных уравнений	9	10
	Контрольная работа № 9	1	1
Повторение		**6**	**26**
Итоговый тест		1	1
Итоговая контрольная работа		2	2

Оглавление

Учебное издание

Миндюк Нора Григорьевна
Шлыкова Инга Соломоновна

АЛГЕБРА
Методические рекомендации
7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Г. Войлокова*
Младший редактор *Е. В. Трошко*
Художник *О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *Н. А. Артемьевой*
Компьютерная вёрстка и техническое редактирование
О. В. Храбровой, Е. М. Завалей
Корректоры *Н. В. Бурдина, О. В. Крупенко*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 20.07.16. Формат 60×90 1/16. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Уч.-изд. л. 9,28. Тираж 50 экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в типографии «Onebook» ООО «Сам Полиграфист».
129090, Москва, Протопоповский пер., 6. Тел.: +7(495) 545-37-10.
E-mail: info@onebook.ru
Сайт: www.onebook.ru

АЛГЕБРА

Примерная рабочая программа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа основного общего образования по алгебре составлена на основе Фундаментального ядра содержания общего образования и Требований к результатам освоения основной общеобразовательной программы основного общего образования, представленных в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования. В ней также учитываются основные идеи и положения Программы развития и формирования универсальных учебных действий для основного общего образования.

Сознательное овладение учащимися системой алгебраических знаний и умений необходимо в повседневной жизни для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Практическая значимость школьного курса алгебры обусловлена тем, что её объектом являются количественные отношения действительного мира. Математическая подготовка необходима для понимания принципов устройства и использования современной техники, восприятия научных и технических понятий и идей. Математика является языком науки и техники. С её помощью моделируются и изучаются явления и процессы, происходящие в природе.

Алгебра является одним из опорных предметов основной школы: она обеспечивает изучение других дисциплин. В первую очередь это относится к предметам естественно-научного цикла, в частности к физике. Развитие логического мышления учащихся при обучении алгебре способствует усвоению предметов гуманитарного цикла. Практические умения и навыки алгебраического характера необходимы для трудовой и профессиональной подготовки школьников.

Развитие у учащихся правильных представлений о сущности и происхождении алгебраических абстракций, соотношении реального и идеального, характере отражения математической наукой явлений и процессов реального мира, месте алгебры в системе наук и роли математического моделирования в научном познании и в практике способствует формированию научного мировоззрения учащихся и качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе.

Требуя от учащихся умственных и волевых усилий, концентрации внимания, активности развитого воображения, алгебра развивает нравственные черты личности (настойчивость, целеустремлённость, творческую активность, самостоятельность, ответственность, трудолюбие, дисциплину и критичность мышления) и умение аргументированно отстаивать свои взгляды и убеждения, а также способность принимать самостоятельные решения.

Изучение алгебры, функций, вероятности и статистики существенно расширяет кругозор учащихся, знакомя их с индукцией и дедукцией, обобщением и конкретизацией, анализом и синтезом, классификацией и систематизацией, абстрагированием, аналогией. Активное использование задач на всех этапах учебного процесса развивает творческие способности школьников.

Изучение алгебры позволяет формировать умения и навыки умственного труда — планирование своей работы, поиск рациональных путей её выполнения, критическую оценку результатов. В процессе изучения алгебры школьники должны научиться излагать свои мысли ясно и исчерпывающе, лаконично и ёмко, приобрести навыки чёткого, аккуратного и грамотного выполнения математических записей.

Важнейшей задачей школьного курса алгебры является развитие логического мышления учащихся. Сами объекты математических умозаключений и принятые в алгебре правила их конструирования способствуют формированию умений обосновывать и доказывать суждения, приводить чёткие определения, развивают логическую интуицию, кратко и наглядно раскрывают механизм логических построений и учат их применению. Тем самым алгебра занимает одно из ведущих мест в формировании научно-теоретического мышления школьников. Раскрывая внутреннюю гармонию математики, формируя понимание красоты и изящества математических рассуждений, алгебра вносит значительный вклад в эстетическое воспитание учащихся.

Общая характеристика курса. В курсе алгебры можно выделить следующие основные содержательные линии: арифметика; алгебра; функции; вероятность и статистика. Наряду с этим в содержание включены два дополнительных методологических раздела: логика и множества; математика в историческом развитии, что связано с реализацией целей общеинтеллектуального и общекультурного развития учащихся. Содержание каждого из этих разделов разворачивается в содержательно-методическую линию, пронизывающую все основные содержательные линии. При этом первая линия — «Логика и множества» — служит цели овладения учащимися некоторыми элементами универсального математического языка, вторая — «Математика в историческом развитии» — способствует созданию общекультурного, гуманитарного фона изучения курса.

Содержание линии «Арифметика» служит базой для дальнейшего изучения учащимися математики, способствует развитию их логического мышления, формированию умения пользоваться алгоритмами, а также приобретению практических навыков, необходимых в повседневной жизни. Развитие понятия о числе в основной школе связано с рациональными и иррациональными числами, формированием первичных представлений о действительном числе.

Содержание линии «Алгебра» способствует формированию у учащихся математического аппарата для решения задач из разделов математики, смежных предметов и окружающей реальности. Язык алгебры подчёркивает значение математики как языка для построения математических моделей процессов и явлений реального мира.

Развитие алгоритмического мышления, необходимого, в частности, для освоения курса информатики, и овладение навыками дедуктивных рассуждений также являются задачами изучения алгебры. Преобразование символьных форм вносит специфический вклад в развитие воображения учащихся, их способностей к математическому творчеству. В основной школе материал группируется вокруг рациональных выражений.

Содержание раздела «Функции» нацелено на получение школьниками конкретных знаний о функции как важнейшей математической модели для описания и исследования разнообразных процессов. Изучение этого материала способствует развитию у учащихся умения использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), вносит вклад в формирование представлений о роли математики в развитии цивилизации и культуры.

Раздел «Вероятность и статистика» — обязательный компонент школьного образования, усиливающий его прикладное и практическое значение. Этот материал необходим, прежде всего, для формирования у учащихся функциональной грамотности — умения воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты. Изучение основ комбинаторики позволит учащемуся осуществлять рассмотрение случаев, перебор и подсчёт числа вариантов, в том числе в простейших прикладных задачах.

При изучении статистики и вероятности обогащаются представления о современной картине мира и методах его исследования, формируется понимание роли статистики как источника социально значимой информации и закладываются основы вероятностного мышления.

Место предмета в учебном плане. Базисный учебный (образовательный) план на изучение алгебры в 7—9 классах основной школы отводит 3 часа в неделю в течение каждого года обучения, всего 315 уроков на базовом уровне и не менее 4 ч в неделю на углублённом уровне.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ В 7—9 КЛАССАХ

Для обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом и углублённом (выделено *курсивом*) уровнях выпускник получит возможность научиться в 7—9 классах:

Элементы теории множеств и математической логики

• Оперировать[1] понятиями: множество, *характеристики множества,* элемент множества*, пустое, конечное и бесконечное множество*, подмножество, принадлежность, *включение, равенство множеств*;

• *изображать множества и отношение множеств с помощью кругов Эйлера*;

• *определять принадлежность элемента множеству, объединению и пересечению множеств*;

• задавать множество перечислениемего элементов, *словесного описания*;

• находить пересечение, объединение, подмножество в простейших ситуациях;

• оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, доказательство, *высказывание, истинность и ложность высказывания, отрицание высказываний, операции над высказываниями: и, или, не, условные высказывания (импликации)*;

• приводить примеры и контрпримеры для подтвержнения своих высказываний;

• *строить высказывания, отрицания высказываний.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать графическое представление множеств для описания реальных процессов и явлений при решении задач из других учебных предметов;

• *строить цепочки умозаключений на основе использования правил логики*;

• *использовать множества, операции с множествами, их графическое представление для описания реальных процессов и явлений.*

Числа

• Оперировать понятиями: натуральное число, целое число, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанная дробь, рациональное число, арифметический квадратный корень;

[1] Здесь и далее на:
базовом уровне — распознавать конкретные примеры общих понятий по характерным признакам, выполнять действия в соответствии с определением и простейшими свойствами понятий, конкретизировать примерами общие понятия;
углублённом уровне — знать определение понятия, уметь пояснять его смысл, уметь использовать понятие и его свойства при проведении рассуждений, доказательств, решении задач.

• *оперировать понятиями: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, иррациональное число, квадратный корень, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел*;

• *понимать и объяснять смысл позиционной записи натурального числа*;

• использовать свойства чисел и правила действий при выполнении вычислений, *в том числе с использованием приёмов рациональных вычислений*;

• использовать признаки делимости на 2, 5, 3, 9, 10 при выполнении вычислений и решении несложных задач;

• выполнять округление рациональных чисел в соответствии с правилами и *с заданной точностью*;

• оценивать значение квадратного корня из положительного целого числа;

• распознавать рациональные и иррациональные числа и *сравнивать их*;

• *представлять рациональное число в виде десятичной дроби*;

• *упорядочивать числа, записанные в виде обыкновенной и десятичной дроби*;

• находить НОД и НОК чисел и *использовать их при решении задач*.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• оценивать результаты вычислений при решении практических задач;

• выполнять сравнение чисел в реальных ситуациях;

• составлять числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов;

• *применять правила приближённых вычислений при решении практических задач и решении задач из других учебных предметов*;

• *выполнять сравнение результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближённых вычислений*;

• *составлять и оценивать числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов*;

• *записывать и округлять числовые значения реальных величин с использованием разных систем измерения*.

Тождественные преобразования

• Оперировать понятиями: степень с натуральным показателем, степень с целым отрицательным показателем;

• выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений, содержащих степени с натуральным показателем, степени с целым отрицательным показателем;

• выполнять преобразования целых выражений: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые; *действия с одночленами (сложение, вычитание, умножение), действия с многочленами (сложение, вычитание, умножение)*;

• использовать формулы сокращённого умножения (квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов) для упрощения вычислений значений выражений;

• *выполнять разложение многочленов на множители одним из способов: вынесение за скобку, группировка, использование формул сокращённого умножения*;

• *выделять квадрат суммы и разности одночленов*;

• *раскладывать на множители квадратный трёхчлен*;

• *выполнять преобразования выражений, содержащих степени с целыми отрицательными показателями, переходить от записи в виде степени с целым отрицательным показателем к записи в виде дроби*;

• выполнять несложные преобразования дробно-линейных выражений и выражений с квадратными корнями, *а также сокращение дробей, приведение алгебраических дробей к общему знаменателю, сложение, умножение, деление алгебраических дробей, возведение алгебраической дроби в натуральную и целую отрицательную степень*;

• *выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни*;

• *выделять квадрат суммы или разности двучлена в выражениях, содержащих квадратные корни*;

• *выполнять преобразования выражений, содержащих модуль.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• понимать смысл записи числа в стандартном виде;

• оперировать на базовом уровне понятием «стандартная запись числа».

• *выполнять преобразования и действия с числами, записанными в стандартном виде*;

• *выполнять преобразования алгебраических выражений при решении задач других учебных предметов.*

Уравнения и неравенства

• Оперировать понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, числовое неравенство, неравенство, корень уравнения, решение уравнения, решение неравенства, *равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств)*;

• проверять справедливость числовых равенств и неравенств;

• решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

• решать линейные уравнения и *уравнения, сводимые к линейным,* с помощью тождественных преобразований;

• проверять, является ли данное число решением уравнения (неравенства);

• решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения;

• *решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным, с помощью тождественных преобразований*;

• решать системы несложных линейных уравнений, неравенств;

• изображать решения неравенств и их систем на числовой прямой;

• *решать дробно-линейные уравнения*;

• *решать простейшие иррациональные уравнения вида* $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$;

• *решать уравнения вида* $x^n = a$;

• *решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной*;

• *использовать метод интервалов для решения целых и дробно-рациональных неравенств*;

• *решать линейные уравнения и неравенства с параметрами*;

• *решать несложные квадратные уравнения с параметром*;

• *решать несложные системы линейных уравнений с параметрами*;

• *решать несложные уравнения в целых числах.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• составлять и решать линейные уравнения и *квадратные уравнения, уравнения, к ним сводящиеся, системы линейных уравнений, неравенств* при решении задач из других учебных предметов;

• *выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении линейных и квадратных уравнений и систем линейных уравнений и неравенств при решении задач других учебных предметов*;

• *выбирать соответствующие уравнения, неравенства или их системы для составления математической модели заданной реальной ситуации или прикладной задачи*;

• *уметь интерпретировать полученный при решении уравнения, неравенства или системы результат в контексте заданной реальной ситуации или прикладной задачи.*

Функции

• Оперировать понятиями: *функциональная зависимость,* функция, график функции, способы задания функции, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, нули функции, *промежутки знакопостоянства, монотонность функции, чётность/нечётность функции*;

• находить значение функции по заданному значению аргумента;

• находить значение аргумента по заданному значению функции в несложных ситуациях;

• определять положение точки по её координатам, координаты точки по её положению на координатной плоскости;

• по графику находить область определения, множество значений, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения функции;

• строить график линейной функции;

• проверять, является ли данный график графиком заданной функции (линейной, квадратичной, обратной пропорциональности);

• определять приближённые значения координат точки пересечения графиков функций;

• *строить графики линейной, квадратичной функций, обратной пропорциональности, функций вида:* $y = a + \frac{k}{x+b}$, $y = \sqrt{x}$, $x = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$;

• *на примере квадратичной функции, использовать преобразования графика функции* $y = f(x)$ *для построения графика функции* $y = af(kx + b) + c$;

• *составлять уравнения прямой по заданным условиям: проходящей через две точки с заданными координатами, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой*;

• *исследовать функцию по её графику*;

• *находить множество значений, нули, промежутки знакопостоянства, монотонности квадратичной функции*;

• оперировать на базовом уровне понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия;

• решать простые задачи на прогрессии, в которых ответ может быть получен непосредственным подсчётом без применения формул;

• *решать задачи на арифметическую и геометрическую прогрессию.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать графики реальных процессов и зависимостей для определения их свойств (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания, области положительных и отрицательных значений и т. п.);

• использовать свойства линейной функции и её график при решении задач из других учебных предметов;

• *иллюстрировать с помощью графика реальную зависимость или процесс по их характеристикам*;

• *использовать свойства и график квадратичной функции при решении задач из других учебных предметов.*

Текстовые задачи

• Решать несложные сюжетные задачи разных типов на все арифметические действия;

• решать простые и *сложные задачи разных типов, а также задачи повышенной трудности*;

• строить модель условия задачи (в виде таблицы, схемы, рисунка), в которой даны значения двух из трёх взаимосвязанных величин, с целью поиска решения задачи; *использовать разные краткие записи как модели текстов сложных задач для построения поисковой схемы и решения задач*;

• *различать модель текста и модель решения задачи, конструировать к одной модели решения несложной задачи разные модели текста задачи*;

• осуществлять способ поиска решения задачи, в котором рассуждение строится от условия к требованию или от требования к условию; *знать и применять оба способа поиска решения задач (от требования к условию и от условия к требованию)*;

• решать несложные логические задачи методом рассуждений, *моделировать рассуждения при поиске решения задач с помощью граф-схемы*;

• *решать логические задачи разными способами, в том числе с двумя блоками и с тремя блоками данных с помощью таблиц*;

• составлять план решения задачи; выделять этапы решения задачи *и содержание каждого этапа*;

• *уметь выбирать оптимальный метод решения задачи и осознавать выбор метода, рассматривать различные методы, находить разные решения задачи, если возможно*;

• *анализировать затруднения при решении задач*;

• *выполнять различные преобразования предложенной задачи, конструировать новые задачи из данной, в том числе обратные*;

• *интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи*;

• *анализировать всевозможные ситуации взаимного расположения двух объектов и изменение их характеристик при совместном движении (скорость, время, расстояние) при решении задач на движение двух объектов как в одном, так и в противоположных направлениях*;

• знать различие скоростей объекта в стоячей воде, против течения и по течению реки; *исследовать всевозможные ситу-*

ации при решении задач на движение по реке, рассматривать разные системы отсчёта;

• решать задачи на нахождение части числа и числа по его части, *решать разнообразные задачи «на части»*;

• *решать и обосновывать своё решение задач (выделять математическую основу) на нахождение части числа и числа по его части на основе конкретного смысла дроби*;

• находить процент от числа, число по его проценту, процентное отношение двух чисел, процентное снижение или процентное повышение величины;

• *решать задачи на проценты, в том числе сложные проценты с обоснованием, используя разные способы*;

• решать, *осознавать и объяснять идентичность* задачи разных типов (на работу, на покупки, на движение), связывающих три величины, выделять эти величины и отношения между ними, *применять их при решении задач, конструировать собственные задачи указанных типов*;

• *владеть основными методами решения задач на смеси, сплавы, концентрации*;

• *решать задачи по комбинаторике и теории вероятностей на основе использования изученных методов и обосновывать решение*;

• *решать несложные задачи по математической статистике*;

• *овладевать основными методами решения сюжетных задач: арифметический, алгебраический, перебор вариантов, геометрический, графический, применять их в новых по сравнению с изученными ситуациях.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• выдвигать гипотезы о возможных предельных значениях искомых величин в задаче (делать прикидку);

• *выделять при решении задач характеристики рассматриваемой в задаче ситуации, отличные от реальных (те, от которых абстрагировались), конструировать новые ситуации с учётом этих характеристик, в частности при решении задач на концентрации учитывать плотность вещества*;

• *решать и конструировать задачи на основе рассмотрения реальных ситуаций, в которых не требуется точный вычислительный результат.*

Статистика и теория вероятностей

• Иметь представление о статистических характеристиках, вероятности случайного события, комбинаторных задачах;

• решать простейшие комбинаторные задачи методом прямого и организованного перебора;

• представлять данные в виде таблиц, диаграмм, графиков;

• читать информацию, представленную в виде таблицы, диаграммы, графика;

• определять основные статистические характеристики числовых наборов;

• оценивать вероятность события в простейших случаях;

• иметь представление о роли закона больших чисел в массовых явлениях;

• *оперировать понятиями: столбчатые и круговые диаграммы, таблицы данных, среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения выборки, размах выборки, дисперсия и стандартное отклонение, случайная изменчивость*;

• *извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках*;

• *составлять таблицы, строить диаграммы и графики на основе данных*;

• *оперировать понятиями: факториал числа, перестановки и сочетания, треугольник Паскаля*;

• *применять правило произведения при решении комбинаторных задач*;

• *оперировать понятиями: случайный опыт, случайный выбор, испытание, элементарное случайное событие (исход), классическое определение вероятности случайного события, операции над случайными событиями*;

• *представлять информацию с помощью кругов Эйлера*;

• *решать задачи на вычисление вероятности с подсчётом количества вариантов с помощью комбинаторики.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• оценивать количество возможных вариантов методом перебора;

• иметь представление о роли практически достоверных и маловероятных событий;

• сравнивать основные статистические характеристики, полученные в процессе решения прикладной задачи, изучения реального явления;

• оценивать вероятность реальных событий и явлений в несложных ситуациях;

• извлекать, интерпретировать и *преобразовывать* информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений;

• *определять статистические характеристики выборок по таблицам, диаграммам, графикам, выполнять сравнение в зависимости от цели решения задачи*;

• *оценивать вероятность реальных событий и явлений.*

История математики

• Описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

• знать примеры математических открытий и их авторов в связи с отечественной и всемирной историей;

• понимать роль математики в развитии России;

• *характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей.*

Методы математики

• Выбирать подходящий изученный метод для решении изученных типов математических задач;

• приводить примеры математических закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства;

• *используя изученные методы, проводить доказательство, выполнять опровержение*;

• *выбирать изученные методы и их комбинации для решения математических задач*;

• *использовать математические знания для описания закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства*;

• *применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении математических задач.*

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ В 7—9 КЛАССАХ

(Содержание, выделенное *курсивом*,
изучается на углублённом уровне)

Числа

Рациональные числа. Множество рациональных чисел. Сравнение рациональных чисел. Действия с рациональными числами. *Представление рационального числа десятичной дробью.*

Иррациональные числа. Понятие иррационального числа. Распознавание иррациональных чисел. Примеры доказательств в алгебре. Иррациональность числа $\sqrt{2}$. Применение в геометрии. *Сравнение иррациональных чисел. Множество действительных чисел.*

Тождественные преобразования

Числовые и буквенные выражения. Выражение с переменной. Значение выражения. Подстановка выражений вместо переменных.

Целые выражения. Степень с натуральным показателем и её свойства. Преобразования выражений, содержащих степени с натуральным показателем. Одночлен, многочлен. Действия с одночленами и многочленами (сложение, вычитание, умножение). Формулы сокращённого умножения: разность квадратов, квадрат суммы и разности. Разложение многочлена на множители: вынесение общего множителя за скобки, *группировка, применение формул сокращённого умножения. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители.*

Дробно-рациональные выражения. Степень с целым показателем. Преобразование дробно-линейных выражений: сложение, умножение, деление. *Алгебраическая дробь. Допустимые значения переменных в дробно-рациональных выражениях. Сокращение алгебраических дробей. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю. Действия с алгебраическими дробями: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень. Преобразование выражений, содержащих знак модуля.*

Квадратные корни. Арифметический квадратный корень. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни: умножение, деление, вынесение множителя из-под знака корня, *внесение множителя под знак корня.*

Уравнения и неравенства

Равенства. Числовое равенство. Свойства числовых равенств. Равенство с переменной.

Уравнения. Понятие уравнения и корня уравнения. *Представление о равносильности уравнений. Область определения уравнения (область допустимых значений переменной).*

Линейное уравнение и его корни. Решение линейных уравнений. *Линейное уравнение с параметром. Количество корней линейного уравнения. Решение линейных уравнений с параметром.*

Квадратное уравнение и его корни. Квадратные уравнения. Неполные квадратные уравнения. Дискриминант квадратного уравнения. Формула корней квадратного уравнения. *Теорема Виета. Теорема, обратная теореме Виета.* Решение квадратных уравнений: использование формулы для нахождения корней, *графический метод решения, разложение на множители, подбор корней с использованием теоремы Виета. Количество корней квадратного уравнения в зависимости от его дискриминанта. Биквадратные уравнения. Уравнения, сводимые к линейным и квадратным. Квадратные уравнения с параметром.*

Дробно-рациональные уравнения. Решение простейших дробно-линейных уравнений. *Решение дробно-рациональных уравнений. Методы решения уравнений: методы равносильных преобразований, метод замены переменной, графический метод. Использование свойств функций при решении уравнений. Простейшие иррациональные уравнения вида* $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. *Уравнения вида* $x^n = a$. *Уравнения в целых числах.*

Системы уравнений. Уравнение с двумя переменными. Линейное уравнение с двумя переменными. *Прямая как графическая интерпретация линейного уравнения с двумя переменными.*

Понятие системы уравнений. Решение системы уравнений. Методы решения систем линейных уравнений с двумя переменными: *графический метод, метод сложения,* метод подстановки. *Системы линейных уравнений с параметром.*

Неравенства. Числовые неравенства. Свойства числовых неравенств. Проверка справедливости неравенств при заданных значениях переменных. Неравенство с переменной. Строгие и нестрогие неравенства. *Область определения неравенства (область допустимых значений переменной).*

Решение линейных неравенств. *Квадратное неравенство и его решения. Решение квадратных неравенств: использование свойств и графика квадратичной функции, метод интервалов. Запись решения квадратного неравенства. Решение целых и дробно-рациональных неравенств методом интервалов.*

Системы неравенств. Системы неравенств с одной переменной. Решение систем неравенств с одной переменной: линейных, *квадратных.* Изображение решения системы неравенств на числовой прямой. Запись решения системы неравенств.

Функции

Понятие функции. Декартовы координаты на плоскости. Формирование представлений о метапредметном понятии «координаты». Способы задания функций: аналитический, графический, табличный. График функции. Примеры функций, получаемых в процессе исследования различных реальных процессов и решения задач. Значение функции в точке. Свойства функций: область определения, множество значений, нули, промежутки знакопостоянства, *чётность/нечётность,* промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения. Исследование функции по её графику. *Представление об асимптотах. Непрерывность функции. Кусочно заданные функции.*

Линейная функция. Свойства и график линейной функции. Угловой коэффициент прямой. Расположение графика линейной функции в зависимости от её углового коэффициента и свободного члена. *Нахождение коэффициентов линейной функции по заданным условиям: прохождение прямой через две точки с заданными координатами, прохождение прямой через данную точку и параллельно данной прямой.*

Квадратичная функция. Свойства и график квадратичной функции (парабола). *Построение графика квадратичной функции по точкам.* Нахождение нулей квадратичной функции, *множества значений, промежутков знакопостоянства, промежутков монотонности.*

Обратная пропорциональность. Свойства функции $y = \frac{k}{x}$. Гипербола.

Графики функций. *Преобразование графика функции $y = f(x)$ для построения графиков функций вида $y = af(kx + b) + c$. Графики функций $y = a + \frac{k}{x + b}$, $y = \sqrt{x}$, $x = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$.*

Последовательности и прогрессии. Числовая последовательность. Примеры числовых последовательностей. Бесконечные последовательности. Арифметическая прогрессия и её свойства. Геометрическая прогрессия. *Формула общего члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Сходящаяся геометрическая прогрессия.*

Решение текстовых задач

Задачи на все арифметические действия. Решение текстовых задач арифметическим способом. Использование таблиц, схем, чертежей, других средств представления данных при решении задачи.

Задачи на движение, работу и покупки. Анализ возможных ситуаций взаимного расположения объектов при их движении, соотношения объёмов выполняемых работ при совместной работе.

Задачи на части, доли, проценты. Решение задач на нахождение части числа и числа по его части. Решение задач на проценты и доли. Применение пропорций при решении задач.

Логические задачи. Решение логических задач. *Решение логических задач с помощью графов, таблиц.*

Основные методы решения текстовых задач: арифметический, алгебраический, перебор вариантов. *Первичные представления о других методах решения задач (геометрические и графические методы).*

Статистика и теория вероятностей

Статистика. Табличное и графическое представление данных, столбчатые и круговые диаграммы, графики, применение диаграмм и графиков для описания зависимостей реальных величин, извлечение информации из таблиц, диаграмм и графиков. Описательные статистические показатели числовых наборов: среднее арифметическое, *медиана,* наибольшее и наименьшее значения. Меры рассеивания: размах, *дисперсия и стандартное отклонение.* Случайная изменчивость. Изменчивость при измерениях. *Решающие правила. Закономерности в изменчивых величинах.*

Случайные события. Случайные опыты (эксперименты), элементарные случайные события(исходы). Вероятности элементарных событий. События в случайных экспериментах и благоприятствующие элементарные события. Вероятности случайных событий. Опыты с равновозможными элементарными событиями. Классические вероятностные опыты с использованием монет, кубиков. *Представление событий с помощью диаграмм Эйлера. Противоположные события, объединение и пересечение событий. Правило сложения вероятностей. Случайный выбор. Представление эксперимента в виде дерева. Независимые события. Умножение вероятностей независимых событий. Последовательные независимые испытания.* Представление о независимых событиях в жизни.

Элементы комбинаторики. *Правило умножения, перестановки, факториал числа. Сочетания и число сочетаний. Формула числа сочетаний. Треугольник Паскаля. Опыты с большим числом равновозможных элементарных событий. Вычисление вероятностей в опытах с применением комбинаторных формул. Испытания Бернулли. Успех и неудача. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли.*

Случайные величины. *Знакомство со случайными величинами на примерах конечных дискретных случайных величин. Распределение вероятностей. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания. Понятие о законе больших чисел. Измерение вероятностей. Применение закона больших чисел в социологии, страховании, в здравоохранении, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях.*

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тематическое планирование реализует один из возможных подходов к распределению изучаемого материала по учебно-методическому комплекту по алгебре, выпускаемому издательством «Просвещение», не носит обязательного характера и не исключает возможностей иного распределения содержания.

В примерном тематическом планировании разделы основного содержания по алгебре разбиты на темы в хронологии их изучения по соответствующим учебникам.

Особенностью примерного тематического планирования является то, что в нём содержится описание возможных видов деятельности учащихся в процессе усвоения соответствующего содержания, направленных на достижение поставленных целей обучения. Это ориентирует учителя на усиление деятельностного подхода в обучении, на организацию разнообразной учебной деятельности, отвечающей современным психолого-педагогическим воззрениям, на использование современных технологий.

Тематическое планирование представлено в двух вариантах.

Первый вариант составлен из расчёта часов, указанных в проекте Базисного учебного (образовательного) плана (БУП) образовательных учреждений общего образования (не менее 3 часов в неделю, 102 часа в год). При составлении рабочей программы образовательное учреждение может увеличить указанное в проекте БУП минимальное учебное время за счёт его вариативного компонента.

Второй вариант примерного тематического планирования предназначен для классов, нацеленных на повышенный уровень математической подготовки учащихся. В этом случае в основное программное содержание включаются дополнительные вопросы, способствующие развитию математического кругозора, освоению более продвинутого математического аппарата, математических способностей. Расширение содержания математического образования в этом случае даёт возможность существенно обогатить круг решаемых математических задач. При работе по второму варианту примерного тематического планирования на изучение алгебры рекомендуется отводить не менее 4 часов в неделю. Учебные часы, приведённые в примерном тематическом планировании, даны в минимальном объёме (из расчёта 4 часов в неделю, 136 часов в год). Дополнительные вопросы в примерном тематическом планировании даны в квадратных скобках.

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова «Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9»

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
	7 класс			
Глава I. Выражения, тождества, уравнения		**22**	**26**	Находить значения числовых выражений, а также выражений с переменными при указанных значениях переменных. Использовать знаки $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, читать и составлять двойные неравенства. Выполнять простейшие преобразования выражений: приводить подобные слагаемые, раскрывать скобки в сумме или разности выражений. Решать уравнения вида $ax = b$ при различных значениях a и b, а также несложные уравнения, сводящиеся к ним. Использовать аппарат уравнений для решения текстовых задач, интерпретировать результат. Использовать простейшие статистические характеристики (среднее арифметическое, размах, мода, медиана) для анализа ряда данных в несложных ситуациях
1	Выражения	5	5	
2	Преобразование выражений	4	6	
	Контрольная работа № 1	1	1	
3	Уравнения с одной переменной	7	9	
4	Статистические характеристики	4	4	
	Контрольная работа № 2	1	1	

Глава II. Функции		**11**	**18**	Вычислять значения функции, заданной формулой, составлять таблицы значений функции. По графику функции находить значение функции по известному значению аргумента и решать обратную задачу. Строить графики прямой пропорциональности и линейной функции, описывать свойства этих функций. Понимать, как влияет знак коэффициента k на расположение в координатной плоскости графика функции $y = kx$, где $k \neq 0$, как зависит от значений k и b взаимное расположение графиков двух функций вида $y = kx + b$. Интерпретировать графики реальных зависимостей, описываемых формулами вида $y = kx$, где $k \neq 0$ и $y = kx + b$
5 6	Функции и их графики Линейная функция Контрольная работа № 3	5 5 1	7 10 1	
Глава III. Степень с натуральным показателем		**11**	**18**	Вычислять значения выражений вида a^n, где a — произвольное число, n — натуральное число, устно и письменно, а также с помощью калькулятора. Формулировать, записывать в символической форме и обосновывать свойства степени с натуральным показателем. Применять свойства степени для преобразования выражений. Выполнять умножение одночленов и возведение одночленов в степень. Строить графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$. Решать графически уравнения $x^2 = kx + b$, $x^3 = kx + b$, где k и b — некоторые числа
7 8	Степень и её свойства Одночлены Контрольная работа № 4	5 5 1	10 7 1	

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Глава IV. Многочлены		**17**	**23**	Записывать многочлен в стандартном виде, определять степень многочлена. Выполнять сложение и вычитание многочленов, умножение одночлена на многочлен и многочлена на многочлен. Выполнять разложение многочленов на множители, используя вынесение множителя за скобки и способ группировки. Применять действия с многочленами при решении разнообразных задач, в частности при решении текстовых задач с помощью уравнений
9	Сумма и разность многочленов	3	4	
10	Произведение одночлена и многочлена	6	7	
	Контрольная работа № 5	1	1	
11	Произведение многочленов	6	10	
	Контрольная работа № 6	1	1	
Глава V. Формулы сокращённого умножения		**19**	**23**	Доказывать справедливость формул сокращённого умножения, применять их в преобразованиях целых выражений в многочлены, а также для разложения многочленов на множители. Использовать различные преобразования целых выражений при решении уравнений, доказательстве тождеств, в задачах на делимость, в вычислении значений некоторых выражений с помощью калькулятора
12	Квадрат суммы и квадрат разности	5	6	
13	Разность квадратов. Сумма и разность кубов	6	6	
	Контрольная работа № 7	1	1	
14	Преобразование целых выражений	6	9	
	Контрольная работа № 8	1	1	

Глава VI. Системы линейных уравнений		**16**	**17**	Определять, является ли пара чисел решением данного уравнения с двумя переменными. Находить путём перебора целые решения линейного уравнения с двумя переменными. Строить график уравнения $ax + by = c$, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Решать графическим способом системы линейных уравнений с двумя переменными. Применять способ подстановки и способ сложения при решении систем линейных уравнений с двумя переменными. Решать текстовые задачи, используя в качестве алгебраической модели систему уравнений. Интерпретировать результат, полученный при решении системы
15	Линейные уравнения с двумя переменными и их системы	5	6	
16	Решение систем линейных уравнений	10	10	
	Контрольная работа № 9	1	1	
Повторение		**6**	**11**	
Итоговый зачёт		1	1	
Итоговая контрольная работа		2	2	
8 класс				
Глава I. Рациональные дроби		**23**	**30**	Формулировать основное свойство рациональной дроби и применять его для преобразования дробей. Выполнять сложение, вычитание, умножение и деление рациональных дробей, а также возведение дроби в степень. Выполнять различные преобразования рациональных выражений, доказывать тождества. Знать свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, и уметь строить её график. Использовать компьютер для исследования положения графика в координатной плоскости в зависимости от k
1	Рациональные дроби и их свойства	5	5	
2	Сумма и разность дробей	6	8	
	Контрольная работа № 1	1	1	
3	Произведение и частное дробей	10	15	
	Контрольная работа № 2	1	1	

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Глава II. Квадратные корни		**19**	**25**	Приводить примеры рациональных и иррациональных чисел. Находить значения арифметических квадратных корней, используя при необходимости калькулятор. Доказывать теоремы о корне из произведения и дроби, тождество $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$, применять их в преобразованиях выражений. Освобождаться от иррациональности в знаменателях дробей вида $\frac{a}{\sqrt{b}}$, $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$. Выносить множитель за знак корня и вносить множитель под знак корня. Использовать квадратные корни для выражения переменных из геометрических и физических формул. Строить график функции $y = \sqrt{x}$ и иллюстрировать на графике её свойства
4	Действительные числа	2	3	
5	Арифметический квадратный корень	5	6	
6	Свойства арифметического квадратного корня	3	4	
	Контрольная работа № 3	1	1	
7	Применение свойств арифметического квадратного корня	7	10	
	Контрольная работа № 4	1	1	
Глава III. Квадратные уравнения		**21**	**30**	Решать квадратные уравнения. Находить подбором корни квадратного уравнения, используя теорему Виета. Исследовать квадратные уравнения по дискриминанту и коэффициентам. Решать дробные рациональные уравнения, сводя решение таких уравнений к решению линейных и квадратных уравнений с последующим исключением посторонних корней. Решать текстовые задачи, используя квадратные и дробные уравнения
8	Квадратное уравнение и его корни	10	16	
	Контрольная работа № 5	1	1	
9	Дробные рациональные уравнения	9	12	
	Контрольная работа № 6	1	1	

Глава IV. Неравенства		**20**	**24**	Формулировать и доказывать свойства числовых неравенств. Использовать аппарат неравенств для оценки погрешности и точности приближения. Находить пересечение и объединение множеств, в частности числовых промежутков. Решать линейные неравенства. Решать системы линейных неравенств, в том числе таких, которые записаны в виде двойных неравенств
10	Числовые неравенства и их свойства	8	9	
	Контрольная работа № 7	1	1	
11	Неравенства с одной переменной и их системы	10	13	
	Контрольная работа № 8	1	1	
Глава V. Степень с целым показателем. Элементы статистики		**11**	**13**	Знать определение и свойства степени с целым показателем. Применять свойства степени с целым показателем при выполнении вычислений и преобразовании выражений. Использовать запись чисел в стандартном виде для выражения и сопоставления размеров объектов, длительности процессов в окружающем мире. Приводить примеры репрезентативной и нерепрезентативной выборки. Извлекать информацию из таблиц частот и организовывать информацию в виде таблиц частот, строить интервальный ряд. Использовать наглядное представление статистической информации в виде столбчатых и круговых диаграмм, полигонов, гистограмм
12	Степень с целым показателем и её свойства	6	8	
	Контрольная работа № 9	1	1	
13	Элементы статистики	4	4	
Повторение		**8**	**14**	
Итоговый зачёт		1	1	
Итоговая контрольная работа		2	2	

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
	9 класс			
Глава I. Квадратичная функция		**22**	**29**	Вычислять значения функции, заданной формулой, а также двумя и тремя формулами. Описывать свойства функций на основе их графического представления. Интерпретировать графики реальных зависимостей. Показывать схематически положение на координатной плоскости графиков функций $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$. Строить график функции $y = ax^2 + bx + c$, уметь указывать координаты вершины параболы, её ось симметрии, направление ветвей параболы. Изображать схематически график функции $y = x^n$ с чётным и нечётным n. Понимать смысл записей вида $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ и т. д., где a — некоторое число. Иметь представление о нахождении корней n-й степени с помощью калькулятора
1	Функции и их свойства	5	7	
2	Квадратный трёхчлен	4	5	
	Контрольная работа № 1	1	1	
3	Квадратичная функция и её график	8	11	
4	Степенная функция. Корень n-й степени	3	4	
	Контрольная работа № 2	1	1	
Глава II. Уравнения и неравенства с одной переменной		**14**	**20**	Решать уравнения третьей и четвёртой степени с помощью разложения на множители и введения вспомогательных переменных, в частности решать биквадратные уравнения. Решать дробные рациональные уравнения, сводя их к целым уравнениям с последующей проверкой корней.
5	Уравнения с одной переменной	8	12	
6	Неравенства с одной переменной	5	7	

	Контрольная работа № 3	1	1	Решать неравенства второй степени, используя графические представления. Использовать метод интервалов для решения несложных рациональных неравенств
Глава III. Уравнения и неравенства с двумя переменными		**17**	**24**	Строить графики уравнений с двумя переменными в простейших случаях, когда графиком является прямая, парабола, гипербола, окружность. Использовать их для графического решения систем уравнений с двумя переменными. Решать способом подстановки системы двух уравнений с двумя переменными, в которых одно уравнение первой степени, а другое — второй степени. Решать текстовые задачи, используя в качестве алгебраической модели систему уравнений второй степени с двумя переменными; решать составленную систему, интерпретировать результат
7	Уравнения с двумя переменными и их системы	10	16	
8	Неравенства с двумя переменными и их системы	6	7	
	Контрольная работа № 4	1	1	
Глава IV. Арифметическая и геометрическая прогрессии		**15**	**17**	Применять индексные обозначения для членов последовательностей. Приводить примеры задания последовательностей формулой n-го члена и рекуррентной формулой. Выводить формулы n-го члена арифметической прогрессии и геометрической прогрессии, суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий, решать задачи с использованием этих формул. Доказывать характеристическое свойство арифметической и геометрической прогрессий.
9	Арифметическая прогрессия	7	8	
	Контрольная работа № 5	1	1	
10	Геометрическая прогрессия	6	7	
	Контрольная работа № 6	1	1	

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
		I	II	
				Решать задачи на сложные проценты, используя при необходимости калькулятор
Глава V. Элементы комбинаторики и теории вероятностей		**13**	**17**	Выполнить перебор всех возможных вариантов для пересчёта объектов и комбинаций. Применять правило комбинаторного умножения. Распознавать задачи на вычисление числа перестановок, размещений, сочетаний и применять соответствующие формулы. Вычислять частоту случайного события. Оценивать вероятность случайного события с помощью частоты, установленной опытным путём. Находить вероятность случайного события на основе классического определения вероятности. Приводить примеры достоверных и невозможных событий
11 12	Элементы комбинаторики Начальные сведения из теории вероятностей Контрольная работа № 7	9 3 1	11 5 1	
Повторение		**21**	**29**	
Итоговая контрольная работа		2	2	