***Внеаудиторная самостоятельная работа № 2.***

***Тема: «Локальная и интегральная теоремы Лапласа».***

Цель: познакомиться с теоремами Лапласа, научится вычислять вероятности событий в повторных независимых испытаниях.

## План:

1. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
2. Контрольные вопросы.
3. Перечень задач для решения.

Рассмотрим последовательность из n независимых опытов, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью p, либо не произойти — с  вероятностью q = 1 − p. Обозначим через Pn(k) вероятность того, что событие A произойдет ровно k раз из n возможных.

В таком случае величину Pn(k) можно найти по теореме Бернулли:

Формула: схема Бернулли

Эта теорема прекрасно работает, однако у нее есть недостаток. Если n будет достаточно большим, то найти значение Pn(k) становится сложно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Например, если п = 50, k = 30, р=0,1, то для отыскания вероятности Р50 (30) надо вычислить выражение

Р50 (30) = · (0,1)30 · (0,9)20,

где 50! =30 414 093·1057, 30! =26 525 286 ·1025, 20! = 24 329020·1011.

В этом случае работает Локальная теорема Муавра — Лапласа, которая позволяют найти приближенное значение вероятности:

***Локальная теорема Лапласа.*** Если вероятность р появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность Pn(k) того, что событие А появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

Функция называется функцией Гаусса. Ее значения давно вычислены и занесены в таблицу (см. файл «Таблица значений функции Гаусса.pdf»), которой можно пользоваться даже на контрольных работах и экзаменах.

Функция Гаусса обладает двумя свойствами, которые следует учитывать при работе с таблицей значений:

1. φ(−x) = φ(x) , т.е. функция Гаусса — четная;
2. При больших значениях x имеем: φ(x) ≈ 0.

**Пример 1.** Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

**Решение.** По условию, n=243; k = 70; р = 0,25; q = 1 – 0,25 = 0,75. Так как n=243 – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

Найдем значение х:

По таблице значений функции Гаусса найдем (1,37) = 0,1561. Искомая вероятность

.

***Интегральная теорема Лапласа.*** Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна р (0 < р < 1), событие наступит не менее k1 раз и не более k2 раз, приближенно равна

Здесь функция называется функцией Лапласа. Значения функции находят по специальной таблице значений функции Лапласа (см. файл «Таблица значений функции Лапласа.pdf»).

Функция Лапласа обладает двумя свойствами, которые следует учитывать при работе с таблицей значений:

1. Функция Ф(x) нечетная, т.е. Ф(–x) = – Ф(x).
2. Для х > 5 можно принять Ф (х) = 0,5.

**Пример 2.** Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна р = 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

**Решение.** По условию, р = 0,2; q = 1 – 0,2 = 0,8; n = 400; k1 = 70; k2=100. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

Таким образом, имеем По таблице значений функции Лапласа находим: . Искомая вероятность

**Контрольные вопросы.**

1. Сформулируйте теорему Бернулли. В чем заключается недостаток теоремы Бернулли?
2. Сформулируйте локальную теорему Лапласа.
3. Запишите функцию Гаусса. Сформулируйте свойства функции Гаусса.
4. Сформулируйте интегральную теорему Лапласа.
5. Запишите функцию Лапласа. Сформулируйте свойства функции Лапласа.

**Перечень задач для решения.**

1. С помощью таблиц значений функций Гаусса и Лапласа найти для указанного значения аргумента *х*:
   1. значения функции Гаусса ;
   2. значения функции Лапласа .
2. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна ***p***. Найти вероятность того, что из ***n*** малых предприятий за время t сохранятся:
   1. ***k***;
   2. не менее ***k1*** и не более ***k2***.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | **Значение переменной** | | | | | | | **Вариант** | **Значение переменной** | | | | | | |
| ***х*** | ***p*** | ***n*** | ***k*** |  | ***k1*** | ***k2*** | ***x*** | ***p*** | ***n*** | ***k*** |  | ***k1*** | ***k2*** |
| **1** | -0,01  1,89  2,22 | 0,2 | 200 | 50 |  | 30 | 60 | **9** | -0,09  1,81  2,12 | 0,75 | 100 | 80 |  | 70 | 90 |
| **2** | 0,02  -1,88  3,20 | 0,8 | 400 | 304 |  | 310 | 330 | **10** | 0,10  -1,79  2,80 | 0,85 | 450 | 390 |  | 370 | 390 |
| **3** | 0,03  1,87  -2,34 | 0,45 | 300 | 145 |  | 160 | 170 | **11** | 0,11  1,78  -2,16 | 0,95 | 200 | 170 |  | 180 | 185 |
| **4** | -0,04  1,86  3,60 | 0,5 | 500 | 260 |  | 270 | 280 | **12** | -0,12  1,77  2,82 | 0,35 | 300 | 135 |  | 120 | 130 |
| **5** | 0,05  -1,85  2,14 | 0,25 | 300 | 60 |  | 65 | 75 | **13** | 0,13  -1,76  2,84 | 0,1 | 100 | 19 |  | 13 | 16 |
| **6** | 0,06  1,84  -3,80 | 0,9 | 250 | 230 |  | 215 | 240 | **14** | 0,14  1,75  -2,20 | 0,3 | 300 | 90 |  | 110 | 120 |
| **7** | -0,07  1,83  2,18 | 0,15 | 400 | 80 |  | 75 | 85 | **15** | -0,15  1,74  2,86 | 0,4 | 400 | 160 |  | 180 | 190 |
| **8** | 0,08  -1,82  3,40 | 0,55 | 500 | 260 |  | 280 | 300 | **16** | 0,16  -1,73  2,28 | 0,51 | 100 | 50 |  | 46 | 56 |