

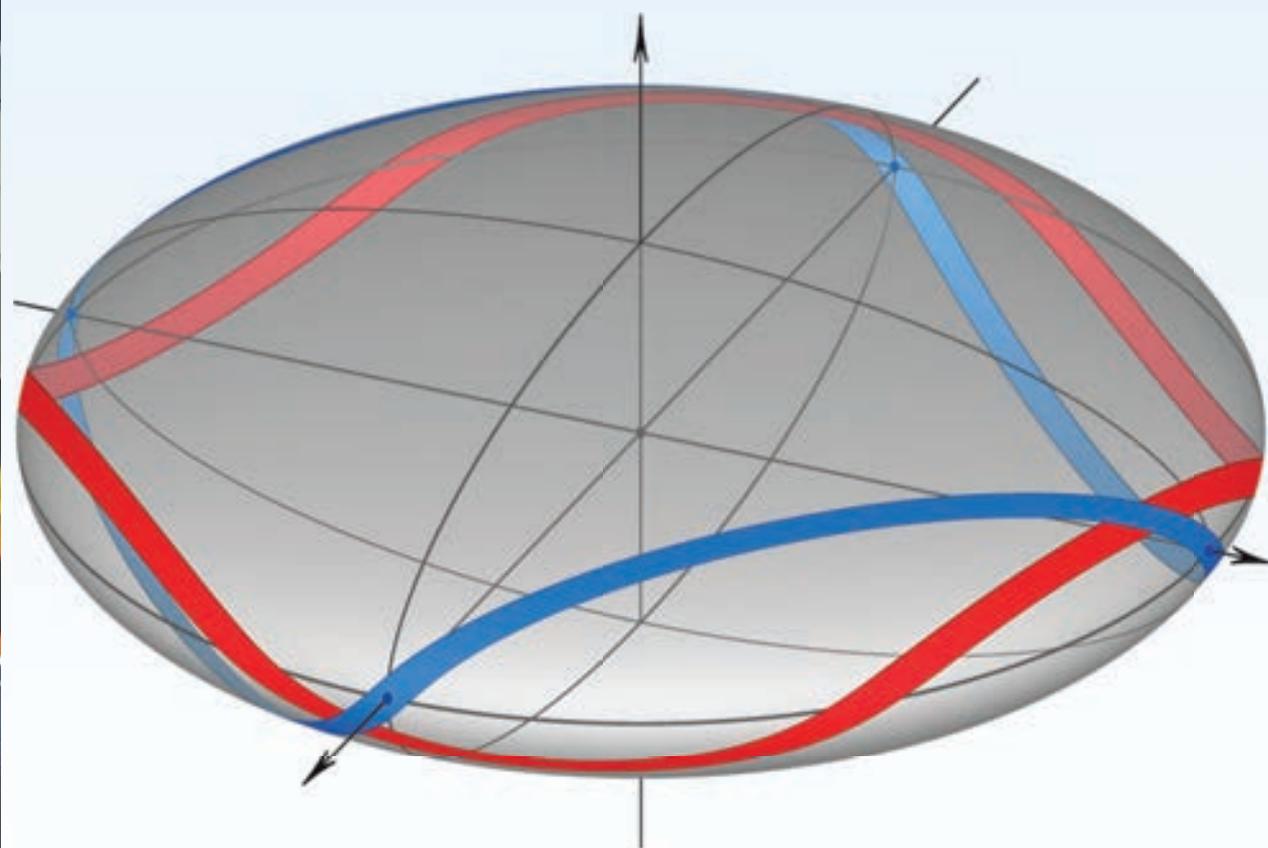
ЯНВАРЬ

ISSN 0130-2221

2021 · № 1

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





ГЛАГОЛИЦА

Древнейшая система письма у славян носит название глаголица. Ниже приводятся старославянские слова, записанные глаголицей, с указанием того, какие русские слова им соответствуют:

ⱁⱃⱅⱇⱉ	– стол	ⱁⱃⱅⱇ	– сто	ⱄⱆⱈⱊ	– цена
ⱉⱋⱍⱏ	– лов	ⱉⱋⱍⱏ	– зло	ⱉⱋⱍⱏ	– лес
ⱁⱃⱅⱇ	– сон	ⱁⱃⱅⱇⱉⱋ	– сын	ⱉⱋⱍⱏ	– пёс
ⱉⱋⱍⱏ	– лоб	ⱉⱋⱍⱏⱒⱔ	– кров	ⱉⱋⱍⱏⱒⱔ	– деньёк

ЗАДАНИЕ 1

Каким русским словам соответствуют следующие старославянские?

ⱉⱋⱍⱏ

ⱁⱃⱅⱇⱉⱋⱍⱏⱒⱔ

ЗАДАНИЕ 2

Запишите глаголицей старославянские слова, соответствующие русским словам:

КОНЬ, ЛЕСОК

Из книги «Задачи лингвистических олимпиад»



В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,
Ю.П.Плысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДАГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Неопределенность – основа квантовой физики. *А.Варламов, Ж.Виллен, А.Ригамонти*
12 Кратчайшие пути и гипотеза Пуанкаре (окончание). *В.Протасов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 23 Задачи М2634–М2637, Ф2641–Ф2644
25 Решения задач М2618–М2620, М2622–М2625, Ф2625–Ф2632
36 Полимино. *Ю.Маркелов, А.Сайранов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 О трех равных отрезках

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 38 Задачи
39 Почему самолет взлетает против ветра. *С.Дворянинов*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 41 Задачи 17–20

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 42 Ртуть и вода – диффузия и испарение. *Л.Ашкинази*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 44 Задачи Произволова о сумме модулей. *Е.Бакаев*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 50 Падение магнита в алюминиевой трубке. *А.Князев, А. Князев (мл.)*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 53 Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

- 57 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (11, 22, 41)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Протасова (использован рисунок А.Даниярходжаева и М.Панова)*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Неопределенность — основа квантовой физики

А.ВАРЛАМОВ, Ж.ВИЛЛЕН, А.РИГАМОНТИ

1900 год, знаменующий начало XX века, является еще и датой возникновения квантовой механики. Именно тогда Макс Планк нашел окончательное решение задачи о тепловом излучении тел, поставленной Густавом Кирхгофом четырем десятилетиями ранее. Решение Планка основывалось на предположении, что энергия физической системы квантуется. Например, если монохроматический свет частотой ν заключен в зеркальной камере, то его энергия обязательно окажется кратной одному «кванту» энергии, равному $h\nu$, где $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная величина, называемая теперь постоянной Планка. Сначала эта гипотеза казалась относительно невинной. Однако спустя тридцать лет выяснилось, что она бросает вызов детерминистическому пониманию физики...

Принцип неопределенности

В 1927 году немецкий физик Вернер Гейзенберг (1901–1976) сформулировал следующий принцип, называемый принципом неопределенности. Рассмотрим частицу массой m , которая движется по оси x со скоростью v . Если нам удастся измерить ее скорость с точностью Δv , то ее положение x оказывается невозможным определить с точностью Δx более высокой, чем $\hbar/(m\Delta v)$, где $\hbar = h/(2\pi)$. (Постоянную \hbar также называют постоянной Планка.) Иными словами, $m\Delta x\Delta v \geq \hbar$. Это утверждение можно распространить и на движение частицы, перемещающейся в трехмерном пространстве. Вместо того чтобы рассуждать о ее скорости \vec{v} , часто вводят импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. В этом случае соотноше-

ние неопределенности в проекции на ось x записывают следующим образом:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar. \quad (1)$$

Аналогично оно записывается и для двух других составляющих вектора импульса и координат. Это неравенство удивительно. Законы Ньютона позволяют, исходя из начальных условий, очень точно определить положение и скорость объекта в любой момент времени. В физике Ньютона, так называемой классической механике, нет места для неопределенности. Но этот детерминизм, свойственный макроскопическому миру, перестает действовать в атомном масштабе. Объясним, почему это происходит.

Для начала приведем иллюстрацию соотношений неопределенности. Направим поток частиц (например, электронов или нейтронов) на стенку, в которой есть отверстие диаметром Δx (рис. 1). Некото-

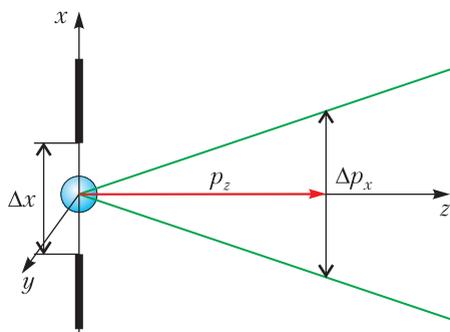


Рис. 1. Если частица проходит через отверстие или щель ширины Δx , то ее положение в направлении x известно с точностью Δx , а ее импульс в этом направлении может быть известен только с некоторой точностью Δp_x . Если частица является частью пучка с импульсом p_z вдоль оси z , то прохождение пучка через щель вызывает его расхождение под углом, определяемым отношением $\Delta p_x / p_z$

рые из них пролетят через отверстие. В момент прохождения отверстия их положение определяется в плоскости стенки с точностью Δx . При этом параллельные этой плоскости составляющие их скорости могут быть известны только с некоторой неопределенностью, обратно пропорциональной Δx . Даже если скорость какой-то частицы при полете строго перпендикулярна стенке,



Вернер Гейзенберг (слева) и Нильс Бор (справа) – ученые, открывшие квантовый индетерминизм

то после прохода через отверстие скорости всех прошедших частиц распределятся внутри некоторого телесного угла. Таким образом, здесь мы сталкиваемся с тем же явлением дифракции, что и в случае световых лучей, проходящих через узкую щель.

Неопределенность и измерение

Согласно толкованию Гейзенберга, квантовый индетерминизм является результатом взаимодействия наблюдаемой частицы с измерительным прибором. Вот как он рассуждал.

Предположим, мы хотим проанализировать движение электрона. Как это сделать? Невооруженный глаз, очевидно, не обладает достаточным разрешением, а что насчет микроскопа? Разрешение микроскопа определяется диапазоном длин волн λ наблюдаемого излучения. Для света они составляют порядка 100 нм (т.е. 100 миллиардных частей метра), частицы меньшего размера не будут видны. Поэтому с помощью микроскопа невозможно увидеть атомы, размер которых порядка 0,1 нм, и тем более – обнаружить электроны. Представим, однако, что нам удалось сделать микроскоп с использованием электромагнитного излучения более короткой длины волны: рентгеновского или даже γ -излучения, длина волны которого составляет



менее 0,01 нм. Стало бы такое изобретение идеальным инструментом для точного измерения положения и скорости электрона?

Прежде чем праздновать победу, пристальнее рассмотрим наш воображаемый опыт. Для того чтобы получить информацию о положении электрона, необходимо использовать как минимум один квант электромагнитного излучения. Энергия E такого кванта равна hc/λ , где c – скорость света в вакууме. Чем короче длина волны, тем большую энергию несет квант. Однако импульс кванта пропорционален этой энергии, а при столкновении с электроном квант неизбежно передает ему часть своего импульса. По этой причине любое измерение положения, тем более для рентгеновского или γ -излучения, вносит неопределенность в величину импульса электрона. Точный анализ процесса показывает, что произведение неопределенностей в установлении положения электрона и измерении его импульса не может быть меньше постоянной Планка. Это возвращает нас к принципу Гейзенберга.

Можно предположить, что такое рассуждение относится только к конкретному случаю или что метод измерения неверен. Ничего подобного. Самые выдающиеся ученые (в частности, как будет рассказано далее, Альберт Эйнштейн) пытались при-

думать мысленные эксперименты, которые могли бы позволить определить положение и импульс тела с большей точностью, чем предписано соотношениями неопределенности. Ни одна из этих попыток успехом не увенчалась. Принцип неопределенности – это закон природы, фундаментальный закон. Не следует думать, что эта неопределенность всегда связана с погрешностями измерения: многочисленные экспериментально установленные факты показывают, что она имеет фундаментальную природу и что соотношение неопределенности соблюдается даже при использовании самых точных измерительных устройств.

Детерминированный и квантовый миры

Кажется, что принцип неопределенности противоречит тому, что мы знаем об окружающем мире. До какой степени он опровергается наши детерминистические представления? Для объекта массой m принцип Гейзенберга выглядит как $\Delta x \Delta v_x \geq \hbar/m$. В случае шара массой 0,7 кг для игры в петанк (провансальский национальный вид спорта, бросание шаров) предел произведения $\Delta x \Delta v_x$ немного превышает 10^{-34} м²/с, что очень близко к нулю. Если положение шара известно с высокой точностью, например $\Delta x = 10^{-10}$ м (близко к размеру атома!), то минимальная неопределенность Δv_x для скорости остается крайне низкой – от 0,03 нанометра в час. Поэтому макроскопический мир, сообразно нашим представлениям, несмотря на соотношение Гейзенберга, остается практически детерминистическим.

А с какого же размера квантовые эффекты становятся существенными? Пойдем дальше по направлению к наномиру и обсудим броуновское движение мельчайших частиц в жидкости. Рассмотрим броуновскую частицу массой около 10^{-13} кг и диаметром примерно 1 мкм. Соотношение неопределенности говорит нам, что произведение $\Delta x \Delta v_x$ должно превышать величину \hbar/m , в рассматриваемом случае составляющую примерно 10^{-21} м²/с. Если мы хотим знать положение броуновской частицы с

точностью до 1% от ее размера, то неопределенность в измерении ее скорости не может превышать 10^{-13} м/с, что по-прежнему очень мало. В самом деле, скорость движения броуновской частицы составляет примерно 10^{-6} м/с, что превышает найденную погрешность Δv_x более чем в миллион раз! Это означает, что даже мелкие частицы броуновского движения правильно описаны классической механикой. Таким образом, соотношение неопределенности становится существенным только для частиц, значительно меньших броуновской. Так, оно становится крайне важным для электрона. Важным настолько, что, как будет показано далее, на его основании оказывается возможным оценить размер атома.

От принципа неопределенности к радиусу атома. Рассмотрим атом самого простого элемента – водорода, который состоит из протона и электрона. Первое по существу верное описание атома водорода привел британский физик Эрнест Резерфорд (1871–1937). Он выяснил, что электрон, обладающий отрицательным зарядом $-e$, и протон, несущий заряд такой же по величине, но противоположный по знаку, удерживаются вместе благодаря электростатическому взаимодействию. При этом электрон вращается вокруг протона, подобно тому как Земля вращается вокруг Солнца. Заметим, что в таком описании вращающийся электрон представляет собой циркулярный электрический ток. Однако любой замкнутый контур, по которому проходит ток, подобно антенне испускает электромагнитное излучение. В результате, согласно описанию Резерфорда, электрон должен был бы терять энергию... и в конечном итоге «упасть» на протон (рис.2)! Но мы знаем, что он не падает – атом водорода стабилен. Чтобы дать объяснение этому факту, необходимо было ввести некий новый физический принцип, который выходил бы за рамки ньютоновской физики. Им стал принцип неопределенности Гейзенберга. В соответствии с этим принципом, бедный электрон должен вращаться в области пространства некоторого размера с

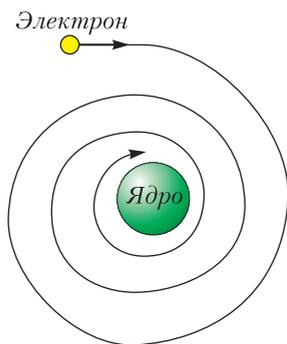


Рис. 2. В классической физике атом Резерфорда был бы нестабилен: электрон в конце концов упал бы на ядро

плохо определенной, но не равной нулю скоростью. И из этих смутных соображений мы собираемся оценить размер атома!

Пусть v и $2R$ суть скорость электрона и диаметр сферы, в пределах которой он движется. Согласно формуле (1), $2mRv > \hbar$. Следовательно, кинетическая энергия электрона, равная $mv^2/2$, не может быть меньше чем $\hbar^2/(8mR^2)$. Добавляя электростатическую энергию его взаимодействия с протоном, находим неравенство для полной энергии электрона W :

$$W \geq \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\hbar^2}{8mR^2}, \quad (2)$$

где элементарный электрический заряд e равен $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а ϵ_0 – электрическая постоянная, равная $8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Энергия W атома не может стать ниже минимума этого выражения, который, как легко понять, реализуется при $R = R_0$, где

$$R_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \approx 0,0529 \text{ нм}. \quad (3)$$

Равновесное состояние механической системы соответствует минимуму ее потенциальной энергии. Радиус атома R не может сильно превышать величину R_0 , потому что потенциальная энергия электрона при этом была бы слишком высока, но он не может быть и намного меньше R_0 , потому что тогда кинетическая энергия была бы слишком велика, а полная энергия должна сохраняться. Именно поэтому электрон и не падает на ядро! Выражение (3) дает нам представление о размере атома водорода –

это примерно 1 ангстрем (десятая часть нанометра).

Спектр излучения атомов – ключ к атомной структуре. Пребывая в своем основном состоянии (минимума полной энергии), атом терять энергию не может. Однако он может ее получать, переходя при этом в то или иное «возбужденное» состояние. Причем бесконечно долго возбужденным он не остается – через некоторое время, излучая свет, атом возвращается в свое основное состояние. Этот свет соответствует излучению точно определенных частот, т.е. спектр излучения атома является «линейчатым». Частоты спектральных линий образуют так называемое дискретное множество, т.е. их можно пронумеровать, например в зависимости от интенсивности каждой из них. Чтобы объяснить происхождение такого линейчатого спектра, разумно предположить, что значения, которые может принимать энергия данного атома, также составляют дискретное множество. Поскольку свет может излучаться только в виде фотонов, то закон сохранения энергии требует, чтобы энергия $h\nu$ каждого фотона была равна разности между двумя допустимыми значениями энергии атома (рис. 3). Таким образом дискретный вид спектра излучения объясняется, по крайней мере, качественно. Ос-

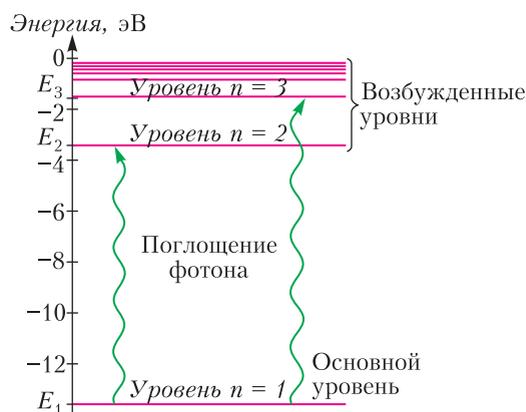


Рис. 3. Энергетическая диаграмма атома водорода. Атом переходит из основного состояния в возбужденное путем поглощения фотона, энергия которого соответствует разнице между двумя энергетическими уровнями атома

тается выяснить, почему значения энергии атома составляют дискретное множество.

В начале XX века вопрос о природе атома – мельчайшей частицы вещества, являющейся носителем его свойств, был одним из центральных в физике. Предлагаемые модели, будучи внутренне противоречивыми или не соответствующими эксперименту, одна за другой опровергались. И вот в 1913 году датский физик Нильс Бор (1885–1962) предложил математически простую теорию атома, объясняющую существующие экспериментальные данные, однако основанную на столь необычных допущениях, что он сам назвал их «постулатами».

Атом по Нильсу Бору

Нильс Бор, предлагая свою модель атома, ничего не знал о принципе неопределенности, до открытия которого оставалось еще 14 лет.

В модели Бора, как и в модели Резерфорда, электрон вращается вокруг ядра, подобно тому как Земля вращается вокруг Солнца, однако при этом электрон может двигаться только по определенным орбитам. Например, круговые орбиты возможны только в том случае, когда произведение импульса mv электрона на радиус его орбиты R , это произведение называют «моментом импульса», является кратным постоянной Планка:

$$mvR = n\hbar. \quad (4)$$

Однако импульс электрона и радиус орбиты связаны также и тем обстоятельством, что центростремительное ускорение электрона, равное v^2/R , обеспечивает сила электростатического притяжения. Для атома водорода, ядро которого состоит из протона, последняя равна $-e/(4\pi\epsilon_0 R)$. Отсюда уже можно найти радиусы R_{n-1} разрешенных орбит для каждого значения n . Так, для $n = 1$ находим уже знакомое нам значение R_0 , которое соответствует основному состоянию. Предоставим читателю самому вывести общую формулу, применимую к возбужденным состояниям электрона.

Модель Бора, разработанная в 1913 году, довольно хорошо описывала спектры из-

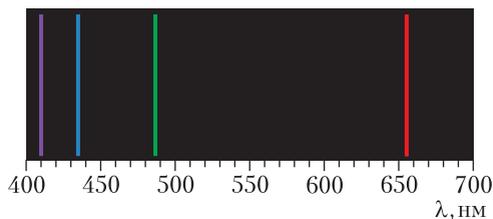


Рис. 4. Модель Бора позволяет объяснить спектр излучения атома водорода в видимой области. Линии, расположенные вблизи длин волн в 410, 434, 486 и 656 нм, соответствуют переходам на уровень $n = 2$ из возбужденных состояний $n = 6, 5, 4$ и 3

лучения атомов (рис. 4), однако вскоре выявились и ее недостатки. Спустя десятилетие теория Бора была концептуально расширена введением вероятностного описания нахождения электрона. Так, оказалось, что значение R_0 (расстояние от электрона до ядра) в атоме водорода может считаться лишь некоей усредненной величиной; принцип неопределенности не позволяет четко определить расстояние между протоном и электроном.

Вероятность нахождения. Предположим, что в какой-то момент нам удалось установить положение электрона. Можно ли предсказать его положение через секунду? Нет, поскольку знание положения электрона неизбежно привело бы к полной неопределенности его скорости. Ни один прибор, ни одна теория не смогли бы предсказать, куда направится электрон. Так что же делать?

Сменим стратегию и отметим точку пространства, в которой обнаружен электрон, затем еще одну точку – результат аналогичного измерения с другим электроном и многократно повторим эту процедуру. Хотя и невозможно предсказать, где появится следующая отметка, все же их распределение следует некоему правилу. Плотность отметок, которая варьирует в зависимости от точки пространства, указывает на вероятность нахождения электрона во время измерения. Мы были вынуждены отказаться от описания движения электрона, но можем теперь определить вероятность его нахождения в каждой точке пространства. Поведение электрона в наномире характеризуется вероятностью!

Читатель, не знакомый с этой концепцией, не может оценить роль случайности в законах природы. Тем не менее, как вы увидите, такая вероятностная теория подтверждается серьезными экспериментальными доказательствами.

Таким образом, в наномире нахождение электрона определяется законами вероятности. Расставленные нами отметки в совокупности напоминают облако, так же как капельки воды образуют в небе облака различной плотности. Такое «электронное облако» является более точным представлением об электроне, чем маленькая планета, вращающаяся вокруг ядра, как его изображал Резерфорд.

Волна де Бройля и уравнение Шрёдингера

Что же определяет структуру электронных облаков? Существует ли уравнение, которое описывает квантовую механику так же, как классическую механику описывают законы Ньютона? Да, такое уравнение существует. Оно было предложено в 1925 году австрийским физиком Эрвином Шрёдингером (1887–1961) и является основой атомной физики и теоретической химии.

Теория Шрёдингера обобщила предложенную годом ранее французом Луи де Бройлем (1892–1987) революционную идею, которая состояла в том, что с любой частицей, обладающей импульсом p , можно связать волну длиной $\lambda = h/p$. Таким образом, любая частица может проявлять как корпускулярное поведение, так и волновое, как это делает свет. Подобно предложенной Джеймсом Максвеллом (1831–1879) волновой теории света, где электрическое поле $E(x, y, z, t)$ является функцией времени и трех пространственных координат, уравнение Шрёдингера описывает состояние частицы с помощью «волновой функции» $\psi(x, y, z, t)$, квадрат модуля которой определяет плотность вероятности нахождения частицы в заданный момент времени t в точке (x, y, z) . Этот подход был основан на аналогии с оптикой, где квадрат модуля электрического поля определяет вероятность нахождения фотона в данной

точке. Различие же заключается в том, что электрическое поле является физически измеримым, например по его действию на электрически заряженные объекты, тогда как введенная де Бройлем волновая функция ясного физического смысла не имела.

С помощью уравнения Шрёдингера оказалось возможным найти пространственное распределение плотности вероятности электрона для его возможных состояний в атоме водорода. Изобразив эти распределения плотности вероятности на плоскости разными цветами, получают изображение различных атомных орбиталей (областей, в которых вероятность нахождения электрона наиболее высока). Такие изображения заменяют электронные орбиты модели атома Бора и наглядно представляют поведение электронов в атоме. Основанные на уравнении Шрёдингера расчеты объясняют существование дискретных уровней энергии, которые и являются причиной линейчатых спектров, наблюдаемых при излучении и поглощении света. Подобные, но более сложные вычисления позволяют понять, как между атомами образуются химические связи.

Заметим, что работы де Бройля и Шрёдингера предшествовали открытию Гейзенбергом принципа неопределенности. Последний прост, краток, элегантен, однако содержит меньше информации, чем уравнение Шрёдингера.

Опыт Дэвиссона–Джермера. Предложенная де Бройлем концепция связи между волнами и частицами, так называемый корпускулярно-волновой дуализм, привела к идее применения оптических методов исследования с заменой света на потоки частиц. Так, в 1927 году американские физики Клинтон Дэвиссон и Лестер Джермер бомбардировали электронами кристалл никеля. В результате они получили дифрактограммы, подобные возникающим при облучении кристаллов рентгеновскими лучами. Для интерпретации полученных дифракционных картин электронам следовало приписать определенную длину волны, и она совпадала с величиной, предсказанной де Бройлем. Таким образом, эксперимент блестяще подтвердил его гипотезу.

Исследование твердых тел с помощью дифрактометрии. Дифракция электронов редко используется для изучения кристаллов, потому что электроны поглощаются материей куда сильнее, чем рентгеновские лучи. Гораздо больший интерес представляет собой еще одна элементарная частица – нейтрон. Если речь идет о наблюдении легких атомов или изучении атомных магнитных свойств, то дифракция нейтронов оказывается предпочтительнее рентгеновских лучей. Последняя позволяет составлять карты электронной плотности, в то время как поляризованные нейтроны дают возможность исследовать не все, а лишь электроны, находящиеся на внешних оболочках атома, именно те, которые определяют его химические и магнитные свойства. Недостатком этого метода является то, что для производства нейтронов требуются дорогие и громоздкие ядерные реакторы, в то время как рентгеновской установкой легко оснастить даже скромную лабораторию.

Нулевые колебания атомов

Принцип неопределенности позволяет получить интересную информацию о движении атомов в твердых телах. Под твердыми телами здесь мы будем подразумевать кристаллы, поскольку при низких температурах кристаллическая структура является устойчивой формой существования почти всех чистых веществ. Атомы в кристалле не являются неподвижными: они колеблются вокруг положения равновесия. Амплитуда этих колебаний очень мала: расстояние между двумя соседними атомами всегда остается близким к своему среднему значению, которое составляет около нескольких десятых нанометра. Как правило, эти колебания обусловлены тепловым движением: чем температура выше, тем больше амплитуда колебаний. Что же происходит, когда температура опускается до абсолютного нуля (0 К, т.е. $-273,15\text{ }^\circ\text{C}$)? Можно предположить, что колебания прекращаются и атомы замирают. Однако в этом случае их положение было бы точно фиксировано, в то время как скорость была бы равна нулю, т.е.

$\Delta x = \Delta p = 0$, что нарушило бы соотношение неопределенности. Отсюда следует, что движение атомов прекратиться не может даже при абсолютном нуле температур: в этом случае тепловые колебания сменяются на «нулевые колебания».

Попробуем разобраться в этом подробнее на примере простого кристалла, состоящего из атомов лишь одного сорта (например, водорода, кислорода, железа). Упрощенное, но качественно приемлемое описание движения атома в кристалле относительно его соседей можно получить, предполагая, что при отклонении от положения равновесия на него действует возвращающая сила, пропорциональная расстоянию, как если бы его удерживала пружина. В таком случае движение атома относительно положения равновесия описывается формулой $x(t) = x_0 \cos(\omega t - \alpha)$, где x_0 – максимальная амплитуда колебаний (для двух других координат формулы аналогичны). При этом скорость атома равна $v_x(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t - \alpha)$. Соотношение неопределенности требует, чтобы $\Delta x \Delta v \geq \hbar/m$ и, следовательно, ωx_0^2 было не менее \hbar/m , где m – масса атома. Частота ω для большинства веществ лежит в диапазоне между 10^{13} и 10^{14} Гц (характерную частоту колебаний атома в твердых телах называют частотой Дебая). Заменяя массу m на $A m_n$, где A – массовое число, а m_n – средняя масса нуклона, около $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, получим, что x_0 в метрах должна составлять не менее $10^{-11}/\sqrt{A}$. Это условие устанавливает верхнюю границу для амплитуды нулевых колебаний в $1/100$ нм, которая, как правило, мала в сравнении с равновесным расстоянием между соседними атомами. Поэтому нет оснований полагать, что нулевые колебания в твердых телах разрушают его устойчивость.

Сомнения могут оставаться только для наименьших значений A , т.е. для водорода ($A = 1$) и гелия ($A = 4$). Оказывается, что только гелий является исключением из правила: если давление не превышает 2,5 МПа, то нулевые колебания действительно делают его кристаллическое состояние неустойчивым при любых температу-

рах. Все остальные простые тела, включая водород H_2 , при приближении температуры к абсолютному нулю рано или поздно затвердевают при любом давлении.

Квантование магнитного момента. Мы уже видели, что согласно квантовой механике ни в какой момент времени невозможно установить точные значения положения \vec{r} и скорости \vec{v} электрона, вращающегося вокруг ядра. Еще более необычными оказываются свойства его магнитного момента.

Магнитный момент – это векторная величина, характеризующая свойство определенных объектов ориентироваться в магнитном поле. Например, стрелка компаса располагается по магнитному полю Земли, указывая направление на северный магнитный полюс. Многие из элементарных частиц и объектов атомного масштаба также обладают магнитным моментом: электрон, нейтрон, протон, а также большая часть ядер, атомов и ионов. Пространственные составляющие магнитного момента обозначаются μ_x , μ_y , μ_z .

Когда стрелка компаса сориентирована в определенном направлении, то четко определены и все три составляющие ее магнитного момента. В отличие от компаса, электрон или нейтрон являются объектами, принадлежащими к квантовому миру. Для них может быть измерена только одна из трех составляющих магнитного момента, при этом она способна принимать только два противоположных значения: $-\mu$ или $+\mu$. Это, казалось бы, парадоксальное утверждение было подтверждено экспериментально: первыми опытными данными, говорящие в пользу квантования магнитного момента представителей квантового мира, еще в 1922 году получили Отто Штерн и Вальтер Герлах. В своих экспериментах они направляли пучок атомов серебра, которые благодаря электронам внешней оболочки обладают магнитным моментом, сквозь неоднородное магнитное поле. В результате было обнаружено, что этот пучок разделяется строго пополам, что и доказывает квантование магнитного момента всего на два дискретных значения (рис. 5). Действительно, если бы магнитный мо-

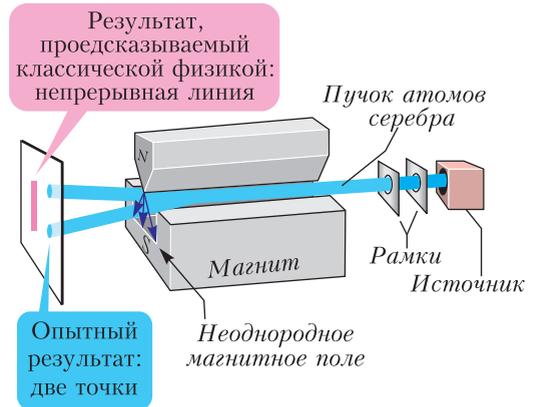


Рис. 5. Принцип опыта Штерна–Герлаха. Атомы серебра проходят через вертикально направленный неоднородное магнитное поле. Согласно классической физике, пучок частиц с непрерывным распределением магнитного момента должен расходиться конусом. Опыт же показывает, что он делится на две компоненты

мент мог принимать хотя бы три значения, то пучок делился бы на три, а если бы магнитный момент атомов серебра мог меняться непрерывно, то пучок просто расходился бы в конус.

Еще несколько слов о пучке атомов серебра. Выберем ось x вдоль направления магнитного поля. Тогда существует такое состояние атома серебра, в котором $\mu_x = -\mu$, и другое, в котором $\mu_x = +\mu$. Существует также состояние, при котором $\mu_y = \mu$. Что произойдет, если частица находится в этом состоянии и измеряется компонента μ_x ? Измерение с равной вероятностью даст $\mu_x = -\mu$ или $\mu_x = +\mu$. Таким образом, среднее значение всех измерений μ_x , которые можно произвести в состоянии $\mu_y = \mu$, равно нулю. То же самое относится к среднему значению всех измерений μ_x в состоянии $\mu_y = -\mu$. Чтобы принять в расчет эти свойства, в квантовой механике считается, что состояние $\mu_y = \mu$ является «соединением» состояний $\mu_x = -\mu$ и $\mu_x = +\mu$.

Кот Шрёдингера. Концепция «смешения состояний» очень хорошо описывает реальность в масштабе атомного мира. Интересно попробовать распространить ее действие на мир макроскопический. Один

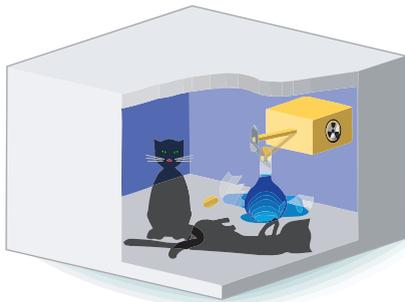


Рис. 6. В мысленном эксперименте Шрёдингер представил себе кота, запертого в герметичной коробке. Устройство, принцип действия которого основан на случайном распаде радиоактивного атома, может разбить колбочку с ядом. По истечении заданного времени вероятность распада атома составляет $1/2$. До тех пор пока наблюдатель не откроет коробку, квантовая механика утверждает, что атом одновременно и распался и не распался, следовательно, и кот теоретически и жив и мертв

из примеров привел Шрёдингер. Он заметил, что, подобно тому как магнитный момент в рамках квантовой механики может принимать два различных значения, так и обычный кот при расширении последней до масштаба комнаты может находиться в двух состояниях: быть и живым и мертвым одновременно (рис. 6)! Если мы открываем дверь в комнату, мы с равной вероятностью $1/2$ можем обнаружить как мертвого, так и живого кота, но пока дверь закрыта, кот одновременно и жив и мертв.

В 2015 году коту Шрёдингера исполнилось 80 лет! Тем не менее, старея, он становится все более живым. Совсем недавно благодаря усилиям ученых он материализовался из области абстрактных рассуждений и стал реальностью. Конечно, это не настоящий кот, а крошечный объект, который только в шутку называют «котом Шрёдингера». Под этим названием сегодня подразумевают любой относительно макроскопический объект, приведенный в состояние квантовой суперпозиции. Этот котенок (представляющий собой лишь несколько атомов) косвенно стал одним из лауреатов Нобелевской премии по физике, присужденной в 2012 году Сержу Арошу и Дэвиду Уайнленду.

«Это же абсурдно! – может решить читатель. – На самом деле кот либо жив, либо

мертв и до открытия двери, неважно, знаем ли мы его состояние». Такое понимание рассматриваемой ситуации базируется на иной, некогда существовавшей интерпретации квантовой механики, основанной на понятии скрытого параметра. Согласно этой концепции, описание мира является детерминистичным, однако некоторые параметры, необходимые для его реализации, оказываются нам недоступными. Современная наука опровергает эту концепцию. Но все же индетерминизм квантовой физики порождает парадоксы, которые интуитивно сложно принять.

Опишем один из них.

Парадокс Эйнштейна – Подольского–Розена (ЭПР-парадокс)

В 1935 году Эйнштейн и его коллеги Борис Подольский и Натан Розен предложили парадокс, который впоследствии стал темой для многих научных работ (некоторые публикуются и в наши дни). Они рассмотрели ситуацию, которую сегодня называют квантовой «запутанностью» (по-английски – *entanglement*). Здесь задействован уже не один объект, как в парадоксе Шрёдингера, а два. Например, возьмем кота и собаку, хотя оригинальная формулировка парадокса их и не предполагала. Предположим, что одно из животных мертво (какое – неизвестно), а другое живо. Состояние, в котором жив кот, а собака мертва, обозначим $|+ - \rangle$, а состояние, в котором кот мертв, а собака жива, запишем как $|- + \rangle$. В случае если эти два состояния смешаны, говорят, что они запутаны. Запутанное состояние представлено обозначением $(|+ - \rangle + |- + \rangle) / \sqrt{2}$. Пока кот и собака находятся в двух отдельных закрытых камерах (звуконепроницаемых и т.д.), неясно, кто из них жив, а кто мертв. Но если мы откроем камеру с котом и обнаружим его мертвым, то узнаем, что собака жива, а если мы обнаружим живого кота, будем знать, что мертва собака: оба наблюдения коррелируют. Отметим, что эта корреляция сохраняется при нахождении животных в двух камерах, расположенных на расстоянии 1000 км друг от

друга. Чтобы узнать, жива ли собака, находящаяся за 1000 км, достаточно открыть камеру с котом. Таким образом, мы получаем информацию мгновенно, хотя никакой сигнал не может распространяться быстрее скорости света! Можно даже подумать, что открытие камеры с котом, которого мы обнаружим живым, мгновенно на расстоянии вызовет смерть собаки, которая до сих пор была только «полумертвой». Конечно, невозможно предугадать исход открытия камеры, потому что мы найдем кота живым или мертвым с одной и той же вероятностью $1/2$, равно как и собаку; однако мы понимаем, что Эйнштейн, Подольский и Розен были озадачены. В конце статьи они высказали мнение о необходимости разработки новой квантовой механики. Она могла бы быть основана на предположении о существовании скрытых параметров, т.е. параметров, недоступных для экспериментальной верификации и не входящих в теории Шрёдингера и Гейзенберга.

Неравенства Белла и опыты Аспе

ЭПР-парадокс оспаривали многие исследователи, в том числе и Бор. Другие выдающиеся ученые, в том числе Луи де Бройль и Дэвид Бом, подобно Эйнштейну предпочли бы восстановить детерминизм. Дискуссия длилась долго и носила философский оттенок. В 1964 году Джон Белл смог сделать ее более конкретной и показал, что детерминистическая физика, даже со скрытым детерминизмом, должна вклю-

чать в себя некоторые доступные измерения неравенства, которые противоречат обычной форме квантовой механики.

Неравенства Белла были проверены Аленом Аспе и его сотрудниками в Париже в 1982 году. Они воспроизвели ситуацию, аналогичную описанной нами чуть раньше. Очевидно, ученые использовали не kota и собаку, поскольку квантовая механика неприменима к макроскопическим объектам, а фотоны, поляризация которых (т.е. направление колебаний электрического поля) может иметь два взаимно ортогональных направления, подобно тому как кошка и собака могут находиться в двух равновероятных состояниях (живом и мертвом). Исследователи намеревались обнаружить корреляцию между поляризациями фотонов. И это лишь одна из многочисленных трудностей эксперимента. Другая сложность была связана с тем, что фотоны движутся с огромной скоростью, а за время их перемещения следует успеть сделать очень многое. В конечном итоге опыты Аспе привели к выводу, что неравенства Белла не могут быть проверены на достоверность. Значит, квантовая механика, изложенная в учебниках, является правильной и не может быть заменена или дополнена теорией скрытых параметров. Опыт Аспе превратил мысленный эксперимент Эйнштейна, Подольского и Розена в эксперимент реальный.

Статья представляет собой главу из книги «Физика повседневности», выпущенной издательством «Альпина non-fiction» в 2020 году.

Вниманию наших читателей

Начиная с 2017 года журнал «Квант» стал ежемесячным и в год выходит 12 номеров журнала.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Кратчайшие пути и гипотеза Пуанкаре

В. ПРОТАСОВ

ПОСТРОЕННЫЙ НАМИ «ДЕТСКИЙ» пример четвертой геодезической на поверхности эллипсоида (рис. 8) опровергает крупнейшее заблуждение, связанное с гипотезой Пуанкаре. На эллипсоиде с разными длинами осей может быть больше геодезических, а значит, и саму «гипотезу о трех геодезических» следовало, видимо, формулировать по-другому. Этого не заметили ни Пуанкаре, ни Гильберт, ни Урысон. Да и не только они. Вот, например, что писал Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987), крупнейший российский математик:

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

«Гипотеза Пуанкаре состоит в том, что по крайней мере тремя различными способами растянутое резиновое колечко можно надеть на наш камень так, что оно, стремясь сократить свою длину, не будет соскальзывать (т.е. так, что его длину нельзя уменьшить при маленьком сдвиге в сторону на небольшом участке). При этом рассматриваются только расположения резинового колечка без самопересечений (например, не имеющие вида восьмерки). На поверхности шара таких расположений колечка бесконечно много (по любому «большому кругу»), **на трехосном эллипсоиде ровно три (по трем**



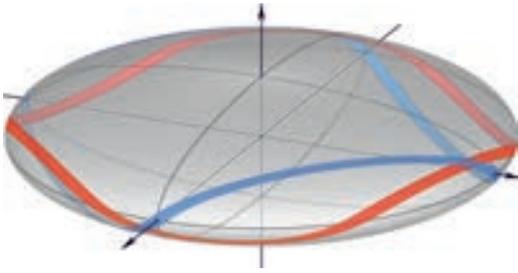


Рис. 8. Неплоские геодезические на эллипсоиде — красная и синяя линии

главным сечениям) (выделено мной — В.П.)».

И снова «ровно три»! А ведь подсказать идею примера было бы по силу младшему школьнику. Получается, что даже на школьном уровне вполне можно сделать важное для современной науки открытие. Конечно, этот случай — исключение. Тем не менее, для исследования геодезических иногда хватает элементарной геометрии. Например, для геодезических на поверхности многогранников.

Геодезические на многогранниках

«А что такого нового можно сказать о многогранниках? — спросите вы. — Это ведь тоже выпуклые поверхности, значит, все, сказанное нами ранее, должно быть верно и для них». Не совсем. Поверхности многогранников негладкие — на них есть вершины и ребра. Эта «мелочь» в данном случае приводит к драматическим последствиям. На некоторых многогранниках геодезических нет вовсе (ни одной!). Так что ни метод Люстерника—Шнирельмана, ни теорема Фрэнкса—Бангерта на многогранники не распространяются. Но зато в данном случае геодезические имеют очень простое, «школьное» описание. Выходит, можно будет строить их и получать про них разные результаты, не применяя высшую математику. Попробуем? Мы увидим, что на некоторых многогранниках геодезических бесконечно много. Более того, на правильном тетраэдре существуют сколь угодно длинные геодезические. Тем самым, на тетраэдр с ребром 1 см можно намотать (без самопересечений!) замкнутую геодезическую длиной, например, 100 км. Но не будем забегать вперед.

Все результаты о существовании замкнутых геодезических на гладких поверхностях — теоретические, их доказательства — не конструктивны: рецептов построения не дают. Можно находить периодические решения уравнений Эйлера—Лагранжа, но это сложно. А главная проблема — эта задача неустойчива, т.е. малое изменение данных влечет сильное изменение решения. Это может вызвать значительные неприятности при численном нахождении решения на компьютере. А что если приблизить гладкую поверхность многогранником (с очень большим числом граней) и построить геодезическую на нем? Хорошая идея!² Значит, надо научиться строить замкнутые геодезические на многогранниках.

Как определить геодезические на поверхности многогранника? Во-первых, на каждой грани геодезическая должна быть отрезком прямой, поскольку на плоскости есть только одна локально-кратчайшая линия — прямая. Поэтому *любая геодезическая на многограннике — это ломаная с вершинами на ребрах*. Чтобы не путать вершины многогранника и вершины ломаной, договоримся последние называть узлами. Два соседних звена геодезической ломаной должны лежать на разных гранях. Если это не так и, скажем, ребра AB и BC лежат на одной грани, то возьмем на этих звеньях точки A_1 и C_1 соответственно, очень близко к точке B (рис.9,а). Из определения геодезической, ломаная A_1BC_1 должна быть кратчайшим путем, связывающим точки A_1 и C_1 , что, естественно, неправда: кратчайшим путем является отрезок A_1C_1 . Итак, звенья AB и BC лежат в разных гранях. Развернем две эти грани на плоскость. Вновь воспользуемся локально-кратчайшим свойством в точке B и получим, что отрезки AB и BC после развертки должны оказаться на одной прямой. Иначе путь A_1BC_1 опять можно заменить на более короткий —

² По-видимому, ее впервые высказал В.М. Тихомиров, известный математик и многолетний автор «Кванта». Он и сформулировал задачу классификации замкнутых геодезических на многограннике.

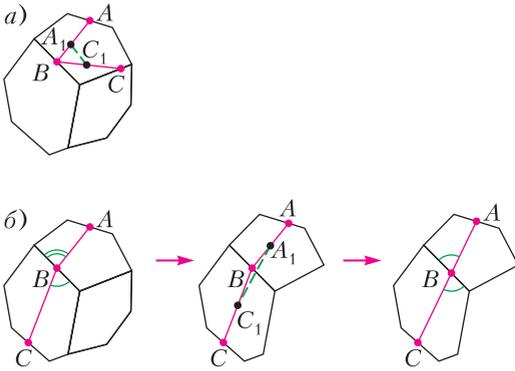


Рис. 9. Оптическое свойство геодезической

на отрезок A_1C_1 (рис.9,б), а затем положить развертку обратно на поверхность многогранника. Таким образом, на развертке соседние звенья геодезической оказываются на одной прямой, или, что то же самое, два соседних звена геодезической образуют равные углы с ребром, которое они пересекают. Угол, под которым геодезическая входит в ребро, равен углу, под которым она выходит. Это свойство естественно назвать *оптическим* – «угол падения равен углу отражения».

Наконец, геодезическая не может проходить через вершины многогранника. А это почему? Все по той же причине. Предположим, что узел B оказался в вершине. Сумма плоских углов при вершине выпуклого многогранника меньше 360° . Ломаная ABC разрезает плоские углы при вершине B на две части. Хотя бы в одной из них сумма углов будет меньше 180° . Сделаем развертку этих углов на плоскость. После развертки угол ABC будет меньше 180° . Тогда вновь получаем, что путь A_1BC_1 не является кратчайшим – его можно заменить на отрезок A_1C_1 , а затем положить развертку обратно на поверхность многогранника (рис.10). Итак, геодезическая является ломаной, не проходящей через вершины многогранника, в каждом узле

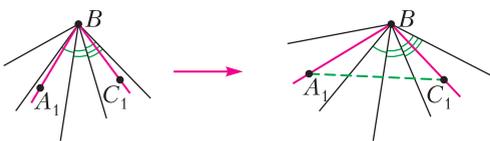


Рис. 10. Геодезическая не проходит через вершину

которой выполняется оптическое свойство – углы, образуемые соседними звеньями с ребром, равны. Понятно, что этого и достаточно: любая ломаная с такими свойствами является локально-кратчайшей линией. Действительно, в каждой внутренней точке звена она является локально-кратчайшей, потому что является прямой, а в узле она является локально-кратчайшей из-за оптического свойства. Мы доказали важное утверждение, хотя и простое (на теорему не тянет), поэтому назовем его предложением:

Предложение 1. *Замкнутая линия на поверхности многогранника является геодезической тогда и только тогда, когда это ломаная с узлами на ребрах, не проходящая через вершины многогранника, и в каждом узле выполнено оптическое свойство.*

Для незамкнутой геодезической это тоже выполнено, с одной лишь оговоркой, что она может начинаться или заканчиваться в вершине. Вернемся к замкнутым геодезическим. Если развернуть две соседние грани на плоскость, то проходящие по ним звенья геодезической окажутся на одной прямой. Возьмем произвольный узел геодезической A и начнем последовательно разворачивать грани при обходе геодезической, пока не попадем в ту же точку A (вторую точку на развертке обозначим A' ; рис.11). Вся геоде-

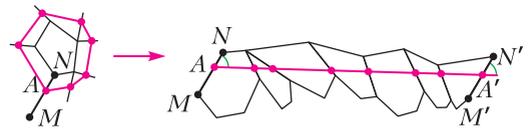


Рис. 11. Геодезическая распрямляется на развертке

зическая превратилась в отрезок AA' . При этом углы, отмеченные на рисунке, равные в силу оптического свойства, стали соответствующими углами при секущей AA' . Значит, отрезки MN и $M'N'$, изображающие одно и то же ребро, параллельны. Мы доказали еще одно свойство, которое можно считать еще одним (уже третьим!) определением геодезической на многограннике:

Предложение 2. *Замкнутая линия на поверхности многогранника является геодезической тогда и только тогда, когда*

после развертки граней вдоль этой линии она становится отрезком, соединяющим две точки на параллельных отрезках, которые изображают одно и то же ребро, а данные две точки изображают одну точку на этом ребре.

Надо уточнить, что отрезки, изображающие одно ребро, должны быть не просто параллельны, но одинаково ориентированы, т.е. векторы \overline{MN} и $\overline{M'N'}$ должны быть равны (см. рис.11).

Заметим, что на развертке одна и та же грань может появиться несколько раз. Это происходит, если геодезическая несколько раз ее пересекает. Наконец, мы совершенно не обязаны обходить геодезическую один раз, мы можем бесконечно обходить ее по кругу. При этом на развертке мы получим прямую линию (либо луч, если наш путь имеет начало), пересекающую периодически повторяющуюся последовательность граней.

Прежде чем начать строить геодезические, отметим одно интересное следствие предложения 2. Оно настолько важное, что мы объявим его теоремой.

Теорема 2. *Если у многогранника есть одна замкнутая геодезическая, то у него есть и бесконечное семейство замкнутых геодезических. Все они изоморфны (т.е. пересекают одни и те же ребра в одинаковой последовательности) и имеют одинаковую длину.*

Доказательство. Сделаем развертку, при которой геодезическая перейдет в отрезок AA' (см. рис.11). Его концы лежат на параллельных отрезках MN и $M'N'$, изображающих одно ребро. Поскольку геодезическая не проходит через вершины многогранника, отрезок AA' также не проходит через вершины многоугольников на развертке. Значит, можно немного подвинуть этот отрезок так, чтобы его концы по-прежнему лежали на MN и $M'N'$ и чтобы он целиком лежал внутри развертки. Длина при этом не изменится, и новый отрезок также будет изображать геодезическую в силу предложения 2.

Итак, если есть одна геодезическая, то их бесконечно много. В этом смысле для многогранников верен аналог теоремы

Фрэнкса–Бангерта о существовании бесконечного числа замкнутых геодезических. Правда, при условии, что существует хотя бы одна. Ну одну-то, наверное, мы всегда найдем? Оказывается, далеко не всегда! Виной тому теорема, доказанная в 1991 году Г.А.Гальпериным, российско-американским математиком, автором многих статей и задач в «Кванте».

Теорема 3 (Г.А.Гальперин, [7]). *Если замкнутая геодезическая делит поверхность многогранника на две части, то в каждой из них сумма всех плоских углов при вершинах делится на 360° .*

Теорема эта вытекает из формул Гаусса–Бонне для кривизны поверхности, известного результата дифференциальной геометрии. Доказывать ее мы не будем. Заметим только, что она дает лишь необходимые, но не достаточные условия существования геодезических. И тем не менее, из нее следует, что только у малой части многогранников геодезические существуют, у большинства их нет вовсе. Например, имеет место вот такой обескураживающий факт:

Следствие. *На поверхности правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой не равно стороне основания, нет ни одной замкнутой геодезической.*

Вот так! Правильная треугольная пирамида, не являющаяся правильным тетраэдром, не имеет ни одной геодезической! Если попытаться натянуть на нее резиночку, то каким бы замысловатым способом это ни сделать, она всегда сползет. Это тем более удивительно, что у правильного тетраэдра таких геодезических бесконечно много, причем неизоморфных друг другу, и среди них есть сколь угодно длинные. Но об этом позже. Сейчас мы посмотрим, как выглядят геодезические на различных многогранниках. Но прежде докажем следствие.

Доказательство следствия. Геодезическая делит поверхность пирамиды на две части, 4 вершины пирамиды должны распределиться между ними как 3 : 1 или 2 : 2. Первый случай невозможен, поскольку тогда в одной части будет одна вершина и сумма плоских углов при ней меньше 360° . Остается второй случай: в каждую

часть попало по две вершины. Так как у пирамиды четыре треугольные грани, то сумма всех ее плоских углов равна $360^\circ \cdot 2$. Поэтому сумма углов в каждой части будет равна 360° . В одну из частей попадут две вершины при основании пирамиды. Сумма углов в каждой равна $2\alpha + 60^\circ$, где α – угол при основании боковой грани. Значит, $2\alpha + 60^\circ = 180^\circ$, поэтому $\alpha = 60^\circ$, т.е. боковая грань – правильный треугольник, а это запрещено.

Построение геодезических на многогранниках. Для этого у нас есть два способа. Первый способ: согласно предложению 2, нужно найти подходящую развертку, в которой было бы два параллельных (и одинаково ориентированных!) отрезка, изображающих одно ребро. Затем надо взять по точке на каждом из них – A и A' . Они должны изображать одну и ту же точку на ребре, т.е., отрезки NA и $N'A'$ должны быть равны. Теперь проводим отрезок AA' . Если он не выходит за пределы развертки, то он изображает геодезическую.

Второй способ: можно обойтись и без развертки, пользуясь предложением 1. Прикинуть, какие ребра может пересекать геодезическая (например, из физических соображений: представив, что мы натягиваем резиновое кольцо), а затем найти положение узлов, пользуясь оптическим свойством.

А есть ли геодезические? В свете теоремы 3 мы теперь не уверены, а есть ли вообще замкнутые геодезические у разных многогранников? Скажем, у куба-то они есть? Да. И у куба, и у правильного октаэдра, и у других популярных многогранников (см. упражнения 9–11). При этом, как мы знаем, каждая геодезическая порождает бесконечно много изоморфных. Для простоты мы будем отождествлять все изоморфные геодезические и будем считать только различные, т.е. неизоморфные.

Куб. Одна геодезическая очевидна – это квадратный пояс (рис.12,а). Через вершины не проходит, оптическое свойство есть (пересекает все ребра под прямым углом). Так что это – геодезическая, и развертку рисовать не обязательно.

Если немного подумать, то найдется и вторая. Это правильный шестиугольник,

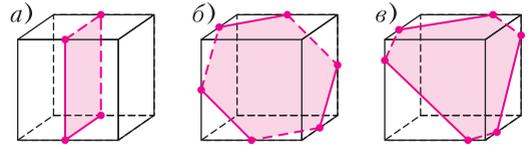


Рис. 12. Две геодезические на кубе

проходящий через середины ребер (рис.12,б). Оптическое свойство также выполнено, все углы равны 45° . Эта геодезическая (как и предыдущая) – плоская, она целиком лежит в одной плоскости. Если сдвинуть эту плоскость параллельно, получится изоморфная ей геодезическая (рис.12,в). Это тоже шестиугольник, но уже не правильный. Он имеет тот же периметр. Мы договорились отождествлять изоморфные геодезические, поэтому данный случай не дает ничего нового.

А вот третью геодезическую на кубе найти непросто! Вот она, на рисунке 13. Она

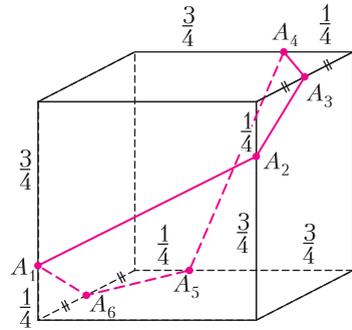


Рис. 13. Третья геодезическая на кубе

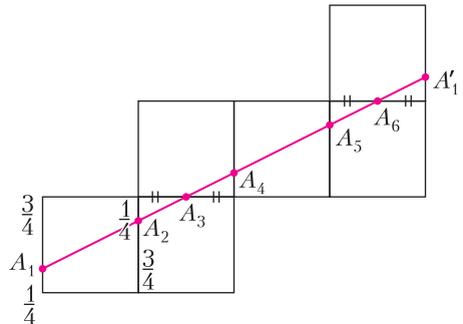


Рис. 14. Развертка третьей геодезической на кубе

шестиугольная и неплоская! Пересекает все ребра под углами α и $90^\circ - \alpha$, где α – угол, тангенс которого равен 2. Для удобства мы указали на рисунке длины отрезков, считая сторону куба равной 1. Две вершины про-

ходят через середины ребер, а четыре делят их в отношении 1 : 3. Соответствующая развертка представлена на рисунке 14. Эту геодезическую, конечно, тоже можно шевелить, получая изоморфные. При этом углы пересечения с ребрами и периметр останутся теми же.

Оказывается, что других геодезических на кубе нет – только эти три.

Правильный октаэдр. Этот многогранник, напомним, представляет собой две соединенные четырехугольные пирамиды с примыкающими основаниями. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, в каждой вершине сходятся по четыре грани.

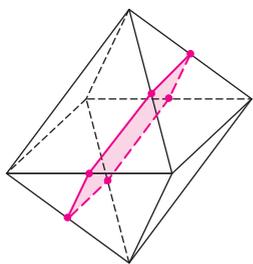


Рис. 15. Геодезическая на правильном октаэдре

Первую геодезическую найти просто – это шестиугольный пояс, проходящий через середины ребер (рис.15).

Сложности начинаются уже со второй геодезической. Есть ли она вообще? Да, есть. Мы

оставим ее построение в виде задачи в упражнении 12. Можем сделать только одну подсказку (кто не хочет – пропустите текст до конца абзаца). Представим себе вновь аналогию с резиновым кольцом. Как надеть его на октаэдр? Не старайтесь зацепиться за две соседних вершины. Это бесполезно, резинка сползет. Почему? По теореме 3. Сумма плоских углов при каждой вершине равна $60^\circ \cdot 4 = 240^\circ$. Поэтому геодезическая не может ограничивать кусок поверхности с двумя вершинами, сумма углов $240^\circ + 240^\circ = 480^\circ$ не делится на 360° . Та же участь постигнет того, кто попытается зацепить резинку за две противоположные вершины так, чтобы она не содержала внутри других вершин. А вот если она захватит еще одну вершину, то сумма углов будет $240^\circ \cdot 3 = 720^\circ$, и все может получиться. Хотя не гарантировано – достаточных условий теорема 3 не дает.

Оказывается, что это все. У октаэдра всего две различные геодезические, и никакой третьей, как у куба, не будет. Это странно, поскольку куб и октаэдр – двойственные фигуры, т.е. центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра и наоборот. Куб имеет 8 вершин и 6 граней, а октаэдр – 8 граней и 6 вершин. Как правило, если какое-то свойство есть у куба, то оно, в некотором двойственном виде, должно повториться у октаэдра. Но у куба есть три разные геодезические, а у октаэдра почему-то две. И как объяснить этот феномен, мы не знаем.

Упражнения

6. Докажите, что геодезическая на конусе не может проходить через его вершину.

7. Не будет ли на кубе еще одной замкнутой геодезической, в виде перевязочной ленты (как на рисунках 5 и 8)? Пусть в основании коробки – квадрат со стороной 1, а высота равна h . При каких значениях h существует геодезическая в виде перевязочной ленты?

8. В основании параллелепипеда – квадрат со стороной 1, а высота равна h . При каких значениях h существует шестиугольная геодезическая, как на рисунке 12,б? При каких h она будет плоская?

9. Как мы знаем, правильная треугольная пирамида, не являющаяся правильными тетраэдром, не имеет замкнутых геодезических. А правильная усеченная пирамида?

10. У правильной треугольной призмы есть геодезические. Это сечения, параллельные основаниям. А могут ли быть другие?

11. Придумайте правильную четырехугольную пирамиду, которая имеет замкнутую геодезическую (и постройте эту геодезическую).

Указание. Сначала с помощью теоремы 3 найдите угол при вершине пирамиды. Для этого, возможно, придется разобрать несколько случаев.

12. Найдите вторую геодезическую у правильного октаэдра.

Хаос на правильном тетраэдре

Самая удивительная картина геодезических возникает на поверхности правильного тетраэдра. Их у него бесконечно много, притом различных (неизоморфных). Число узлов может быть сколь угодно большим, а сама геодезическая – сколь угодно длинной. Например, на правиль-

ный тетраэдр с ребром 1 см. можно «намотать» геодезическую с 10000 узлов и длиной более километра. Без самопересечений! И она не сползет! Как такое возможно? Благодаря свойству правильного тетраэдра – его разверткой можно без наложения покрыть всю плоскость.

Полная развертка правильного тетраэдра. Возьмем правильный тетраэдр $ABCD$ и положим его на плоскость гранью ABC . Разобьем эту плоскость на равные правильные треугольники, один из которых – ABC . Получившаяся треугольная решетка называется *полной разверткой* правильного тетраэдра, вершины треугольников – узлы решетки. На рисунке 16 изображена полная развертка, закрашены треугольники, соответствующие грани ABC , а красным отмечены узлы, соответствующие вершине A . Теперь введем координаты на этой плоскости: A – начало координат,

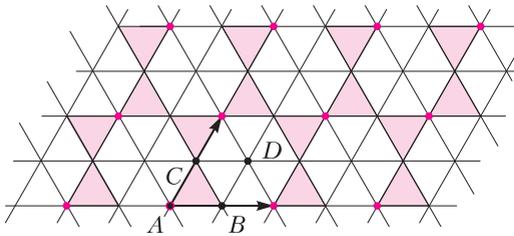


Рис. 16. Полная развертка правильного тетраэдра

$B = \left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $C = \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Таким образом, координатные оси – прямые AB и AC , они не перпендикулярны, а образуют угол в 60° . Каждый узел решетки можно выразить в виде суммы $n \cdot \overline{AB} + m \cdot \overline{AC}$ с целыми числами n и m . Тогда координаты узла

– это $\left(\frac{n}{2}; \frac{m}{2}\right)$. Этот узел изображает вершину A , если оба числа n и m – четные, т.е. если координаты узла – целые. Итак, все узлы решетки делятся на четыре множества. Целые узлы изображают вершину A ; узлы, у которых только первая координата целая, – вершину C ; у которых только вторая целая, – вершину B ; наконец, если

обе координаты нецелые, – вершину D .

Последовательной разверткой тетраэдра на плоскость заполняется вся решетка, причем данной точке x плоскости однозначно ставится в соответствие точка на поверхности тетраэдра, независимо от порядка, в котором разворачивались грани. Прообразом точки тетраэдра является множество на развертке $\{\pm x + (n; m)\}$, где $(n; m)$ – произвольный целый вектор. Две точки плоскости изображают одну и ту же точку тетраэдра, если они совмещаются либо целочисленным сдвигом, либо центральной симметрией относительно узла решетки.

Геодезические на полной развертке. Если развернуть тетраэдр вдоль геодезической g (последовательно разворачиваем грани на плоскость в том порядке, как их пересекает геодезическая), то g перейдет в прямую на плоскости развертки. Прямую будем обозначать тем же символом g . Она не проходит через узлы и параллельна целому вектору. В самом деле, поскольку геодезическая замкнута, на прямой g найдутся две точки, представляющие одну точку тетраэдра. Они не могут быть симметричны относительно узла, так как g не содержит узлов, значит, вектор между этими точками – целый.

Теперь мы можем получить все замкнутые геодезические на правильном тетраэдре.

Теорема 4. Любая прямая на развертке, не проходящая через узлы и параллельная целому вектору, представляет замкнутую геодезическую на поверхности тетраэдра. Все прямые, параллельные одному вектору, представляют изоморфные геодезические с равными длинами.

Доказательство. Пусть $\vec{v} = (n; m)$ – данный целый вектор, прямая g ему параллельна и не проходит через узлы. С возможной перестановкой вершин, считаем, что $n \geq m \geq 0$. Если $m = 0$, то прямая g параллельна одной из линий решетки, в этом случае все ясно. Теперь пусть $m \geq 1$. Считаем, что числа n и m взаимно просты, иначе поделим на их наибольший общий делитель, при этом направление вектора $(n; m)$ сохранится. Если точки x и y геодезической g соответствуют одной и той же

точке тетраэдра, то они либо симметричны относительно узла, либо переводятся одна в другую переносом на целый вектор. Первое невозможно (g не содержит узлов). Во втором случае вектор переноса равен $r \cdot \vec{v}$ при каком-то целом r , поскольку координаты вектора \vec{v} взаимно просты. Взяв $r = 1$, получим, что вектор от точки x к точке y равен \vec{v} , и все точки интервала $(x; y)$ соответствуют разным точкам тетраэдра. Следовательно, отрезок $[x; y]$ представляет на поверхности тетраэдра замкнутую несамопересекающуюся геодезическую, длина которой равна длине вектора \vec{v} .

Осталось доказать, что геодезические, соответствующие параллельным прямым, изоморфны и имеют одинаковую длину. Среди всех прямых, параллельных g и проходящих через узлы, выберем по одной ближайшей к g в каждой полуплоскости и назовем их g_1, g_2 . Возьмем пару ближайших узлов решетки K, L на g_1 (отрезок KL не содержит других узлов) и пару ближайших узлов M, N на g_2 . Так как g_1 и g_2 совмещаются параллельным сдвигом решетки, то $\overline{KL} = \overline{NM}$. Таким образом, $KLMN$ – параллелограмм, не содержащий других узлов. Значит, его вершины представляют 4 различные вершины тетраэдра, иначе середина отрезка между двумя соответствующими узлами также была бы узлом. Любую другую прямую a , параллельную g , также заключаем в полосу a_1a_2 , не содержащую узлов, при этом прямые a_1, a_2 содержат образы K', L', M', N' четырех вершин тетраэдра. Подходящий целый сдвиг либо симметрия относительно узла решетки переводит полосу a_1a_2 в g_1g_2 , а узел K' в K (следовательно, полная развертка переходит в себя). Поэтому можно считать, что a лежит в той же полосе g_1g_2 , а значит, соответствующая геодезическая изоморфна геодезической g .

Итак, мы приходим к важнейшему выводу: каждой замкнутой геодезической однозначно ставится в соответствие пара взаимно простых чисел $(n; m)$ (либо пара $(1; 0)$).

Вот так! Сколько пар чисел – столько и геодезических. Именно поэтому на пра-

вильном тетраэдре их бесконечно много. И среди них есть сколь угодно длинные. А если чуть потянуть вверх вершину тетраэдра, то все они сползут! Ведь у получившейся правильной пирамиды геодезических нет.

На полной развертке все просто – есть только прямые, параллельные целым векторам. А на самом тетраэдре?

Как выглядит каждая геодезическая на тетраэдре? Будем называть пару чисел $(n; m)$ типом геодезической. Каждая геодезическая имеет одну и ту же картину следов на всех четырех гранях тетраэдра. Она пересекает каждую грань по $n + m$ параллельным отрезкам. При этом одно ребро (в нашем случае AC) она пересекает в n точках, второе (AB) – в m точках, и третье (BC) – в $n + m$ точках. На рисунке 17 мы изобразили геодезические типов

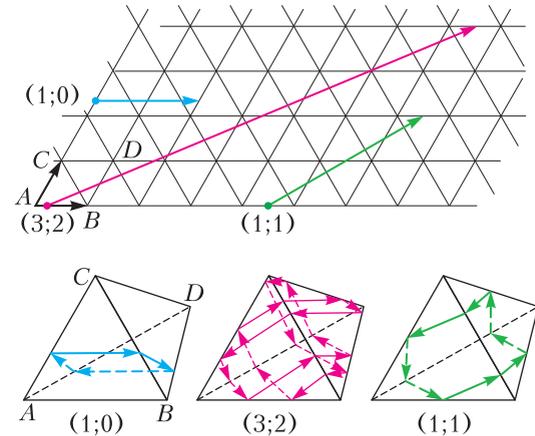


Рис. 17. Геодезические типов $(1;0)$, $(3;2)$ и $(1;1)$ и их развертки

$(1; 0)$, $(1; 1)$ и $(3; 2)$, а также их развертки.

Геодезическая типа $(n; m)$ имеет по $n + m$ узлов на каждом из двух противоположных ребер тетраэдра, по n – на каждом из противоположных ребер другой пары и по m узлов на оставшихся противоположных ребрах. Значит, всего она имеет $4(n + m)$ узлов.

В случае $n = 1, m = 0$ геодезическая устроена просто: она является четырехугольником и пересекает последовательно две пары противоположных ребер. Оказывается, что все остальные геодезические имеют по 4 особых узла, в которых они

«зацепляются» за вершины тетраэдра. Узел L геодезической называется *узлом зацепления*, если он и два соседних с ним узла лежат на трех ребрах, выходящих из одной вершины D тетраэдра, и являются ближайшими к D узлами на этих ребрах. При этом D называется *вершиной зацепления* для узла L . Так, геодезическая на рисунке 18 зацепляется за каждую вершину

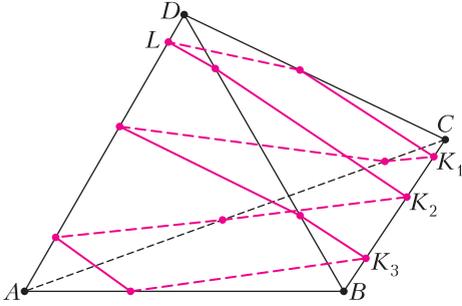


Рис. 18. Геодезическая типа $(2;1)$ зацепляется за вершину D узлом L

ну тетраэдра; для вершин B и C узлы зацепления это K_3 и K_1 соответственно.

Теорема 5. Любая геодезическая типа $(n; t)$, где $n \geq t \geq 1$, имеет в точности 4 узла зацепления. Они составляют две пары противоположных узлов геодезической, каждая пара разбивает ее на две части с одинаковым числом узлов. Каждая вершина тетраэдра является вершиной зацепления для одного из узлов.

Пусть a_1 и b_1 – звенья геодезической, выходящие из узла зацепления, a_2 и b_2 – следующие за ними и т.д. Тогда звенья a_i и b_i лежат на одной грани и между ними нет других точек геодезической.

Доказательство. Представим геодезическую g как прямую на развертке и покажем, что g зацепляется за вершину K из доказательства теоремы 4, с другими вершинами рассуждение такое же. Проведем прямую g' , симметричную g относительно точки K . Ясно, что полоса между g и g' не содержит других узлов, кроме тех, которые лежат на g_1 . (Напомним, что g_1 – это ближайшая к g параллельная прямая на развертке, которая содержит узел.) Поэтому прямые g и g' пересекают все 6 отрезков решетки, выходящих из K , и

каждая из шести точек пересечения представляет узел на геодезической, ближайший к вершине K на соответствующем ребре тетраэдра. Следовательно, геодезическая зацепляется за K . Более того, прямые g и g' идут параллельно по треугольникам решетки (граням), пока не пересекут 6 отрезков решетки, выходящих из K .

Оказывается, вот таким способом можно получить любую из бесконечного числа геодезических на тетраэдре. Мы «натягиваем» геодезическую на трехгранный угол при вершине D , затем наматываем ее на поверхность тетраэдра, делая $2n + 2m - 1$ перегибов через ребра, и зацепляем ее за вершину C . Любая геодезическая получается таким образом, при этом каждая вершина тетраэдра может быть выбрана в качестве начальной.

То же, но более строго: геодезическая зацепляется за вершину D звеньями a_1 и b_1 , затем звенья a_2 , b_2 идут по одной грани, встречают ребро этой грани в соседних узлах, далее a_3 , b_3 идут по следующей грани и т.д., пока, наконец, геодезическая не зацепится за вершину C сторонами a_{2n+2m} , b_{2n+2m} . Геодезическая ограничивает полосу на поверхности тетраэдра парами сторон a_i , b_i .

«Понять вещи, которые не в силах вообразить»

Итак, на правильном тетраэдре есть бесконечно много типов геодезических, каждый тип соответствует паре взаимно простых целых чисел. Оказывается, это еще не все. Каждую геодезическую можно «размножить» так, чтобы она осталась несамопересекающейся.

Пучок геодезических. Геодезическая на правильном тетраэдре определяется прямой линией на развертке, параллельной произвольному целому вектору. А давайте проведем не одну, а несколько таких параллельных прямых. Все они будут геодезическими. Но удивительно другое: они все не будут пересекаться друг с другом. Доказать это совсем просто. Если две такие геодезические g_1 и g_2 пересеклись в какой-то точке P , то рассмотрим точки P_1

и P_2 , изображающие ее на развертке. Ясно, что $P_1 \neq P_2$, поскольку прямые g_1 и g_2 параллельны. Точки P_1 и P_2 на развертке изображают одну точку на поверхности тетраэдра, поэтому P_1 должна переводиться в P_2 либо целым сдвигом, либо симметрией относительно узла. При этом g_1 перейдет в какую-то прямую g'_1 . Так как и симметрия и перенос сохраняют параллельность, прямая g'_1 параллельна g_2 , а значит, совпадает с ней, так как пересекается с ней в точке P_2 . Получается, что геодезические g_1 и g_2 совпадают.

Мало того, что на тетраэдр с ребром 1 см можно намотать без самопересечений геодезическую длиной более 1 км, так этих геодезических можно намотать сколь угодно много (одновременно!), и все они не будут пересекать друг друга. Кстати, согласно теореме 4, все они будут изоморфны и будут иметь одинаковую длину.

Доказали мы это легко – что может быть проще пучка параллельных прямых на плоскости! Но представить это на поверхности тетраэдра уже не представляется возможным! Академик Л.Д.Ландау говорил, что «наука позволяет человеку понять вещи, которые он уже не в силах вообразить».

На рисунке 19 мы представили пучок из трех геодезических типа (1; 1).

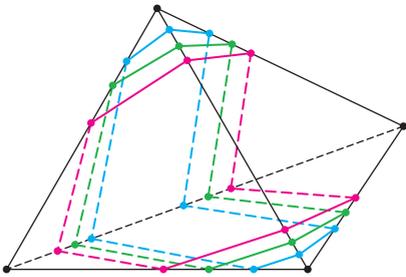


Рис. 19. Пучок из трех геодезических типа (1;1)

Только ли на правильном тетраэдре есть бесконечно много геодезических? Нет, не только. Таким свойством обладает любой *равногранный* тетраэдр. Тетраэдр называется равногранным, если все его грани равны. Получить такой тетраэдр просто: надо взять произвольный остроугольный треугольник и сложить его вдоль средних линий (рис.20). Есть много свойств

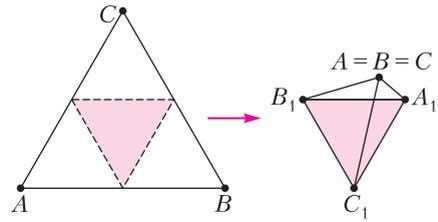


Рис. 20. Равногранный тетраэдр

и признаков равногранного тетраэдра. Часть из них мы собрали в упражнении 14. Во всех наших рассуждениях о геодезических правильный тетраэдр можно заменить на равногранный – ничего не изменится. Только решетка теперь будет состоять не из правильных треугольников, а из одинаковых треугольников, равных грани.

Получается, что равногранный тетраэдр тоже имеет бесконечно много геодезических, занумерованных парами взаимно простых чисел $(n; m)$. Строятся они так же – на бесконечной развертке.

Есть ли другие поверхности с таким разнообразием геодезических? У равногранного тетраэдра есть сколь угодно длинные геодезические. А у других тетраэдров? Оказывается, нет. Среди всех тетраэдров таким свойством обладает только равногранный. У любого другого тетраэдра может быть лишь конечное число неизоморфных геодезических – причем их может и не быть вовсе, как у правильной пирамиды. Может ли быть бесконечно много неизоморфных геодезических у другого многогранника, не тетраэдра? Как мы видели, ни куб, ни правильный октаэдр на эту роль не годятся. В 2008 году было доказано, что не годится никакой другой многогранник [9]. Среди всех многогранников только равногранный тетраэдр имеет сколь угодно длинные геодезические. В той же статье была выдвинута гипотеза о том, что равногранный тетраэдр уникален не только среди многогранников, но и среди всех выпуклых поверхностей. Десять лет гипотеза оставалась открытой, лишь совсем недавно ее доказали А.В.Акопян и А.М.Петрунин [1]:

Если на выпуклой поверхности есть сколь угодно длинные замкнутые геодезические, то это поверхность равногранного тетраэдра.

Таким образом, равногранный тетраэдр является совершенно уникальной фигурой! Среди всех выпуклых фигур только у него есть бесконечное разнообразие замкнутых геодезических линий.

Упражнения

13. Докажите, что равногранный тетраэдр можно сложить только из остроугольного треугольника.
14. Докажите, что следующие свойства тетраэдра равносильны тому, что он – равногранный:
 - 1) Противоположные ребра равны в каждой паре.
 - 2) Два плоских угла, противоположные одному ребру, равны (для каждого ребра).
 - 3) Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180° .
 - 4) Тетраэдр имеет ось симметрии.
 - 5) Вписанный и описанный шары имеют общий центр.
 - 6) Все грани имеют равные площади.
15. Сколько существует типов геодезических с 40 узлами?
16. Сколько узлов имеет геодезическая типа (314; 15) и какова ее длина?
17. Нарисуйте картину следов на каждой грани для геодезической типа (22; 17).
18. Какую минимальную длину может иметь геодезическая с 1000 узлами?

Литература

1. *A.Akopyan, A.Petrunin*. Long geodesics on convex surfaces. – *Mathematical Intelligencer*, 40 (2018), № 3, p.26–31.
2. *Л.А.Люстерник, Л.Г.Шнирельман*. Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей. – *Успехи математических наук*, 2 (1947), № 1, с.166–217.
3. *J.Francis*. Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms. – *Inventiones Mathematicae*, 108 (1992), № 2, p.403–418.
4. *V.Bangert*. On the existence of closed geodesics on two-spheres. – *International Journal of Mathematics*, 4 (1993), № 1, p.1–10.
5. *W.Klingenberg*. *Lectures on Closed Geodesics*. – Springer, New York, 1978.
6. *W.Klingenberg*. *Riemannian geometry*. – de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1982.
7. *Г.А.Гальперин*. О теореме Люстерника–Шнирельмана для многогранников. – *Успехи математических наук*, 46 (1991), № 6, с.207–208.
8. *В.Ю.Протасов*. Замкнутые геодезические на поверхности симплекса. – *Математический сборник*, 198 (2007), № 2, с.103–120.
9. *В.Ю.Протасов*. О числе замкнутых геодезических на многограннике. – *Успехи математических наук*, 63:5(2008), с.197–198.
10. *D.V.Fuchs, E.Fuchs*. Closed geodesics on regular polyhedral. – *Moscow Mathematical Journal*, 7 (2007), № 2, p.265–279.

Вниманию наших читателей

Вы заметили, наверное, что в этом номере журнала на второй странице обложки появилась новая рубрика – «Лингвистические задачи». Эти задачи мы берем из замечательной книги (*Задачи лингвистических олимпиад. 1965 – 1975*. Изд. 2-е, испр./Ред.-сост. В.И.Беликов, Е.В.Муравенко, М.Е.Алексеев. – М.: МЦНМО, 2020), в которой собраны задачи Олимпиад по лингвистике и математике. Такие олимпиады проводятся в Москве с 1965 года. Один из тех, благодаря кому возник сам жанр лингвистической задачи, – академик А.А. Зализняк, великий российский лингвист. А олимпиады возникли по инициативе другого выдающегося лингвиста, А.Н. Журина, и с тех пор продолжают многие годы.



Лингвистические задачи в некотором смысле близки к математическим: их можно решать, опираясь на данные условия; весь материал, необходимый для решения, содержится в условии задачи или может быть восполнен решающим на основе его интуитивных предположений об устройстве родного языка. Решать задачи – интересное занятие, но читатель не только получает удовольствие, но и узнает много нового, самостоятельно «открывая» структурные элементы языка и закономерности его устройства. Кроме того, в задачах в качестве материала используется множество разных языков мира, о которых, возможно, читатель раньше и не слышал, а между тем на этих языках говорят миллионы людей.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2636, M2637 предлагались на XV Южном математическом турнире.

Задачи M2634–M2637, Ф2641–Ф2644

M2634. «Параболической длиной» отрезка

назовем длину проекции этого отрезка на прямую, перпендикулярную оси симметрии параболы. В параболу провели две хорды AB и CD , пересекающиеся в точке N (рис.1). Докажите теорему «о произведении длин отрезков секущих»: произведение параболических длин отрезков AN и BN равно произведению параболических длин отрезков CN и DN .

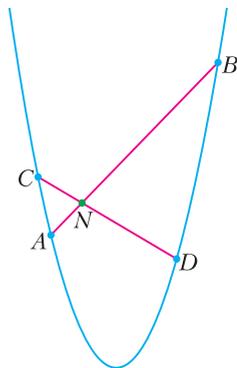


Рис. 1

М. Панов

M2635. В треугольнике ABC известны длины сторон: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ (рис.2). Из вершины C проводят несколько отрезков, которые разрезают треугольник ABC на несколько треугольников. Найдите наименьшее число M , для которого при каждом таком разрезании сумма

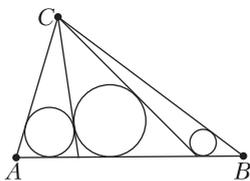


Рис. 2

радиусов окружностей, вписанных в треугольнички, не превосходит M .

О. Титов

M2636*. Натуральное число p назовем абсолютно простым, если для любого натурального k такого, что $2 \leq k \leq \sqrt{p}$, выполнено неравенство $\left\{ \frac{p}{k} \right\} \geq 0,01$ (фигурные скобки обозначают дробную часть числа). Конечно ли множество абсолютно простых чисел?

М. Дидин

M2637*. Дана таблица с тремя строками и 100 столбцами. Изначально в левой клетке каждой строки стоит $400 \cdot 3^{100}$ фишек. За один ход Петя отмечает некоторые фишки в таблице (хотя бы одну), а затем Вася выбирает одну из трех строк. После этого все отмеченные фишки в выбранной строке сдвигаются на клетку вправо, а все отмеченные фишки в других строках удаляются из таблицы. Петя выигрывает, если одна из фишек выходит за правый край таблицы; Вася выигрывает, если все фишки удалены. Кто выигрывает при правильной игре?

П. Святокум, А. Хузиева, Д. Шабанов

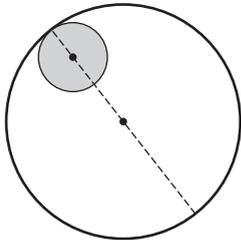
Ф2641. Прямой участок магистрального газопровода (МГ) высокого давления проходит с востока на запад мимо двух поселков: Анискино и Борискино. Поселки расположены севернее газопровода. Кратчай-

шие расстояния от этих поселков до газопровода составляют 14 км и 16 км соответственно. Расстояние между точками на МГ, которым соответствуют эти минимальные расстояния, равно 10,39 км. Для газификации поселков на магистральном газопроводе требуется построить одну распределительную станцию, которая будет подавать газ с уменьшенным давлением в поселки. Определите наименьшую суммарную длину газопровода низкого давления (ГНД), необходимую для поставки газа в поселки. Укажите также место на МГ, в котором следует построить эту распределительную станцию.

Г.Азпром

Ф2642. Однородный тонкий круглый обруч радиусом R и массой m набросили на вбитый горизонтально гвоздь (рис.3). Найдите период малых колебаний обруча около положения равновесия, если предполагается, что сечение гвоздя – круг радиусом r и обруч обкатывает гвоздь без проскальзывания. Ускорение силы тяжести равно g .

Рис. 3



Ф2643. Квадратная пластинка, сделанная из анизотропного материала, при нагрева-

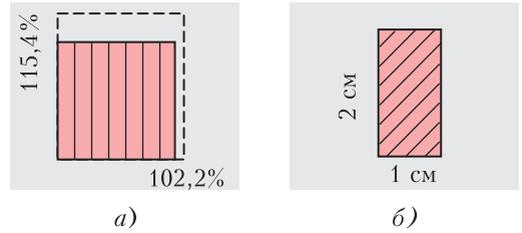


Рис. 4

нии до некоторой температуры расширяется в вертикальном направлении на 15,4%, а в горизонтальном направлении на 2,2%. На рисунке 4,а направление наилучшего расширения материала показано вертикальными линиями. Из этой пластинки вырезают прямоугольную пластину таким образом, что направление наилучшего расширения составляет угол 45° с основанием пластины (рис.4,б), и нагревают ее до той же температуры. На сколько процентов увеличатся при нагреве длины боковых сторон прямоугольной пластины? На сколько процентов увеличится площадь пластины?

Указание. Анизотропными называют материалы, у которых физические свойства в разных направлениях разные.

Е.Соколов

Ф2644. Пакет для доставки клиентам заказанных горячих продуктов сделан из бумаги с нанесенным на нее тонким слоем алюминия. От этого пакета отрезали ленточку шириной $h \approx 2,7$ мм и длиной $L \approx 2,7$ дм. С помощью мультиметра провели два измерения. Слева на фотографии



Рис. 5

(рис.5) выводы щупов мультиметра закорочены. На фото в середине и справа между выводами щупов закреплена ленточка. По показаниям прибора определите примерное число атомов алюминия на этой полоске. Удельное сопротивление алюминия $\lambda = 2,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, плотность $\rho = 2,7$ г/см³, молярная масса $M = 2,7 \cdot 10^{-2}$ кг/моль.

К.Урьер

Решения задач M2618–M2620, M2622–2625, Ф2625–Ф2632

Решения задач M2617 и M2621 будут опубликованы позже.

M2618. Для данного числа α пусть $f_\alpha -$ функция, определенная как $f_\alpha(x) = \left[\alpha x + \frac{1}{2} \right]$, где квадратными скобками обозначена целая часть числа. Пусть $\alpha > 1$ и $\beta = 1/\alpha$. Докажите, что для любого натурального n выполнено соотношение

$$f_\beta(f_\alpha(n)) = n.$$

Так как $f_\alpha(n) = \left[\alpha n + \frac{1}{2} \right]$ и $f_\beta(x) = \left[\frac{x}{\alpha} + \frac{1}{2} \right]$,

то для доказательства равенства

$f_\beta(f_\alpha(n)) = n$ достаточно установить, что

$$n \leq \frac{\left[\alpha n + \frac{1}{2} \right]}{\alpha} + \frac{1}{2} < n + 1,$$

или, эквивалентно,

$$\alpha \left(n - \frac{1}{2} \right) \leq \left[\alpha n + \frac{1}{2} \right] < \alpha \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Последнее следует из неравенств

$$\alpha \left(n - \frac{1}{2} \right) + 1 \leq \alpha n + \frac{1}{2} < \alpha \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

(они верны в силу $\alpha > 1$).

Задача решена. Нетрудно заметить, что при $0 < \alpha < 1$ условие задачи нарушается. В этом случае несложно показать, что уже f_α не является инъективной.

И.Дорофеев

M2619. Пусть даны целые неотрицательные числа $a \leq b \leq c$. Треугольник на клетчатой плоскости с вершинами в узлах

сетки назовем (a, b, c) -треугольником, если на одной его стороне расположено ровно a узлов (не считая вершин), на другой стороне – ровно b узлов, а на третьей стороне – ровно c узлов.

а) Существует ли $(9, 10, 11)$ -треугольник?

б) Найдите все тройки целых неотрицательных чисел $a \leq b \leq c$, для которых существует (a, b, c) -треугольник.

в) Для каждой такой тройки найдите минимальную возможную площадь (a, b, c) -треугольника.

В решении будем пользоваться следующим известным фактом (его несложно доказать, см., например, статью А. Полянского «Одной рукой узелок не развяжешь» в «Кванте» №2 за 2013 г.): если на отрезке с концами в узлах X, Y находится ровно a узлов, не считая X и Y , то он поделен узлами на $A = a + 1$ равных частей; при этом НОД координат вектора \overline{XY} равен A . Дадим сразу ответы на вопросы б) и в). Положим $A = a + 1, B = b + 1, C = c + 1, D = \text{НОД}(A, B, C), A' = A/D, B' = B/D, C' = C/D$. Мы покажем, что (a, b, c) -треугольник существует тогда и только тогда, когда A', B' и C' попарно взаимно просты, и при этом минимальная площадь (a, b, c) -треугольника равна $D^2 \cdot A' \cdot B' \cdot C' / 2$.

Пусть $XYZ - (a, b, c)$ -треугольник, на сторонах YZ, ZX, XY которого расположено соответственно a, b, c узлов. Пусть $D' = \text{НОД}(A, B)$. Тогда координаты векторов $\overline{YZ}, \overline{ZX}$ делятся на D' . Значит, и координаты вектора $\overline{YX} = \overline{YZ} + \overline{ZX}$ делятся на D' , откуда C делится на D' . Тем самым, $D' = \text{НОД}(A, B, C) = D$ и $A' = A/D, B' = B/D$ взаимно просты. Аналогично доказываем, что A', B' и C' попарно взаимно просты.

Далее считаем, что A', B' и C' попарно взаимно просты. Общий случай сводится к случаю $D = 1$ увеличением шага сетки в D раз (при увеличении линейных размеров в D раз площадь увеличится в D^2 раз). Пусть далее $D = 1$, т.е. A, B, C – попарно взаимно простые.

Сторона YZ поделена узлами $Y = U_0, U_1, \dots, U_A = Z$ на A равных частей, поэтому

треугольник XYZ разбивается на A равно-
 великих треугольников ZU_0U_1, ZU_1U_2, \dots
 $\dots, ZU_{A-1}U_A$ с вершинами в узлах. Как
 известно, удвоенная площадь треугольни-
 ка с вершинами в узлах – целое число,
 поэтому $2S_{XYZ}$ делится на A . Аналогично
 показываем, что $2S_{XYZ}$ делится на B и на
 C . Так как A, B, C попарно взаимно
 просты, отсюда следует, что $2S_{XYZ}$ делит-
 ся на ABC , в частности, $2S_{XYZ} \geq ABC$.

Для завершения решения остается приве-
 сти пример, в котором $2S_{XYZ} = ABC$. Пусть
 Z имеет координаты $(0;0)$, а $Y - (A;0)$.
 Тогда, очевидно, на стороне YZ ровно
 $a = A - 1$ узлов. Подберем такое целое t ,
 что

$$tB \equiv A \pmod{C}$$

(такое t найдется в силу $\text{НОД}(B, C) = 1$), и
 пусть вершина X имеет координаты
 $(Bt; BC)$. Отметим, что $\text{НОД}(t, C) = 1$, ина-
 че $\text{НОД}(A, C) > 1$. Тогда $\text{НОД}(Bt, BC) = B$,
 значит, на стороне ZX находится ровно
 $b = B - 1$ узлов. Далее, $tB - A$ делится на C и,
 кроме того, $\text{НОД}(tB - A, B) = \text{НОД}(A, B) =$
 $= 1$, поэтому $\text{НОД}(tB - A, BC) = C$, значит
 (поскольку $(tB - A; BC)$ – координаты век-
 тора \overline{YX}), на стороне XY находится ровно
 $c = C - 1$ узлов.

П. Кожевников

M2620. Какое наименьшее количество
 спутников надо запустить над шарооб-
 разной планетой, чтобы в некоторый
 момент с каждой точки поверхности пла-
 неты были доступны сигналы хотя бы
 двух спутников? Спутник считается
 доступным из точки A поверхности пла-
 неты, если он находится относительно
 касательной плоскости, проведенной в
 точке A , строго по другую сторону, не-
 жели сама планета.

Ответ: 6.

Оценка. Докажем, что пяти спутников не
 хватит. Для каждого спутника есть боль-
 шая недоступная окружность (т.е. ок-
 ружность, для точек которой он недо-
 ступен). Недоступные окружности 1-го и 2-го
 спутника имеют пару диаметрально проти-
 воположных общих точек A и B . Но каж-

дый спутник доступен не более чем для
 одной точки из пары A, B . Поэтому потре-
 буются (помимо рассмотренных 1-го и 2-го
 спутников) еще не менее 4 спутников.

Пример. Спутники – вершины правиль-
 ной треугольной призмы, а планета –
 маленький шарик с центром в центре при-
 змы (т.е. в точке O , проектирующей в
 центр основания и лежащей на срединном
 сечении, параллельном основанию). Тогда
 каждая опорная плоскость шарика близка
 к плоскости, проходящей через центр при-
 змы. Нетрудно видеть, что (строго) в
 каждом полупространстве относительно
 такой плоскости расположено не менее
 двух вершин призмы. Действительно, если
 плоскость α отделяет одну вершину A , то
 она пересекает все три ребра, выходящих
 из A , т.е. в сечении призмы получается
 треугольник, плоскость которого «доволь-
 но далеко» от O .

И. Богданов, С. Волчёнков

M2622. Точки E, F, G, H расположены на
 сторонах DA, AB, BC, CD ромба $ABCD$
 соответственно так, что отрезки EF и
 GH касаются вписанной в ромб окружно-
 сти (рис. 1). Докажите, что $FG \parallel HE$.

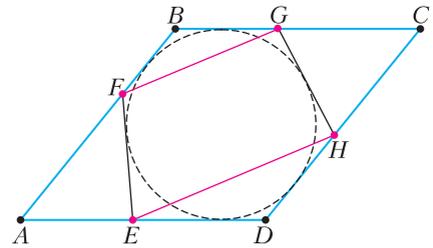


Рис. 1

У треугольников BGF и DEH две пары
 параллельных сторон (рис. 2). А значит,
 для доказательства параллельности
 $FG \parallel HE$ достаточно доказать подобие этих
 треугольников. Так как $\angle B = \angle D$, остается
 доказать, что $BG/BF = DE/DH$, или

$$BG \cdot DH = BF \cdot DE. (*)$$

Пусть $\angle ABD = \angle ADB = x$, $\angle BFE = 2y$,
 $\angle DEF = 2z$; из четырехугольника $BFED$
 имеем $x + y + z = 180^\circ$. Обозначим через O
 центр окружности. Так как FO и EO –
 биссектрисы углов BFE и DEF , то

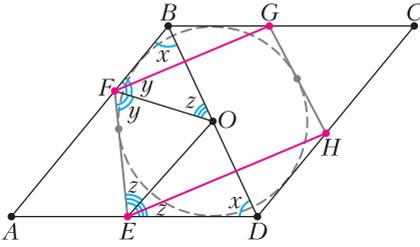


Рис. 2

$\angle BFO = \angle OFE = y$ и $\angle DEO = \angle OEF = z$. В треугольнике BFO имеем $\angle BOF = 180^\circ - x - y = z$. Отсюда следует подобие $BFO \sim DOE$, поэтому $FB/BO = OD/DE$ или $BF \cdot DE = BO \cdot OD$. Аналогично доказывается, что $BG \cdot DH = BO \cdot OD$, тем самым, требуемое равенство (*) доказано и задача решена.

Другое решение можно получить, заметив, что параллельность $FG \parallel HE$ эквивалентна гомотетичности треугольников BGF и DEH , или пересечению прямых BD, EG, FH в одной точке. Последнее следует из теоремы Бриансона для описанного шестиугольника $BFEDHG$.

В. Айзенштадт

M2623. В однокруговом футбольном турнире все команды набрали разное число очков. Если бы за победу давали не три, а два очка, то у всех команд тоже оказалось бы разное число очков, но занятое место у каждой команды было бы другим. При каком наименьшем числе команд это возможно?

Ответ: при 12.

Предположим сначала, что число команд чётно: $n = 2k$. Заметим, что при двух очках за победу более высокое место занимает команда, у которой больше разность между числом побед и числом поражений. Поскольку эти разности у всех команд различны, то у команды, занимающей первое место, разность (а значит, и число побед) не может быть меньше k . Команда, обгоняющая ее при переходе на трехочковую систему, должна иметь больше хотя бы на две победы (каждая команда получает дополнительно столько очков, сколько у нее побед) и, следовательно, должна

иметь больше хотя бы на три поражения. Поэтому $k + 5 \leq 2k - 1$, т.е. $n \geq 12$.

Аналогично получаем, что при нечетном числе команд $n \geq 11$.

Предположим, что случай $n = 11$ возможен. Рассуждая так же, как раньше, получаем, что при двухочковой системе команды набирают от 15 до 5 очков, причем у первой должно быть 5 побед и 5 ничьих, а у второй – 7 побед и 3 поражения, так что при переходе к трехочковой они меняются местами. Далее, у последней команды должно быть не менее двух побед и, поскольку при пяти очках побед не больше двух, то у нее две победы и одна ничья. Тогда она может только поменяться местами с предпоследней, имеющей 6 ничьих и 5 поражений. Аналогично получаем, что третья команда, имеющая либо 3 победы и 7 ничьих, либо 4 победы, 5 ничьих и 1 поражение, может только поменяться местами с четвертой, у которой либо 5 побед, 2 ничьих и 1 поражение, либо 6 побед и 4 поражения. Из остальных пяти команд какие-то три должны меняться по циклу. Это могут быть пятая-шестая-седьмая или седьмая-восьмая-девятая команды. Оба случая рассматриваются аналогично, поэтому ограничимся разбором первого.

Так как седьмая команда при переходе на трехочковую систему должна обогнать пятую, от которой отстает на два очка, у нее должно быть больше хотя бы на три победы и на пять поражений. Таким образом, у пятой команды 1 победа и 9 ничьих, а у седьмой 4 победы, 5 поражений и 1 ничья. Тогда для шестой команды возможны два варианта: 1 победа, 8 ничьих и 1 поражение или 4 победы, 2 ничьих и 4 поражения (в остальных случаях она при трех очках за победу наберет столько же очков, сколько какая-то из соседних команд). Наконец, для восьмой и девятой команд также получаем две возможности: 0-8-2 и 2-3-5 или 1-6-3 и 3-1-6 побед-ничьих-поражений соответственно.

Посмотрим теперь на распределение ничьих. Поскольку у второй команды ничьих нет, а у пятой их 9, все команды, кроме второй, играют с пятой вничью, откуда, в частности, следует, что у третьей и четвер-

Таблица

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	ОЗ	О2
–	0	3	3	3	0	3	3	0	3	3	3	24	16
3	–	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	23	17
0	0	–	0	0	3	3	3	3	3	3	3	21	14
0	1	3	–	3	1	3	1	3	1	3	1	20	15
0	0	3	0	–	0	3	3	0	3	3	3	18	12
3	1	0	1	3	–	0	1	3	1	3	1	17	13
0	0	0	0	0	3	–	1	3	3	0	3	13	9
0	1	0	1	0	1	1	–	3	1	3	1	12	10
3	0	0	0	3	0	0	0	–	1	0	3	10	7
0	1	0	1	0	1	0	1	1	–	3	1	9	8
0	0	0	0	0	0	3	0	3	0	–	1	7	5
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	–	6	6

той команд было 7 и 2 ничьи соответственно. Так как у седьмой и одиннадцатой команд ничьих больше нет, у остальных не может остаться больше 6 ничьих, т.е. у шестой команды 1, а у восьмой 5. Но тогда у девятой команды ничьих нет, а у третьей 6 – противоречие.

Пример турнира 12 команд приведен в таблице (ОЗ, О2 – число очков по трех- и двухочковой системе).

А.Заславский

M2624*. Даны $n \geq 2$ натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ таких, что $a_n < 2a_1$. Пусть количество различных простых делителей числа $a_1 a_2 \dots a_n$ равно m . Докажите, что $(a_1 a_2 \dots a_n)^{m-1} \geq (n!)^m$.

Пусть p – некоторый простой делитель произведения $a_1 a_2 \dots a_n$. Положим $a_i = p^{k_i} \cdot b_i$, где b_i не делится на p ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда, поскольку $a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2a_1$, получаем, что все числа b_i – попарно различные. Действительно, если $b_i = b_j$ для некоторых $i > j$, то

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{p^{k_j} \cdot b_i}{p^{k_i} \cdot b_i} = p^{k_j - k_i} \geq 2.$$

Из того, что все b_i различны, следует, что $b_1 b_2 \dots b_n \geq n!$.

Перемножая полученные неравенства для всех простых делителей произведения $a_1 a_2 \dots a_n$, получаем нужный результат.

Д.Бурек

M2625. Решение этой задачи приведено в статье Ю.Маркелова и А.Сайранова «Полимино».

Ф2625.¹ У Васи есть несколько одинаковых шариков с резиновой оболочкой, заполненных гелием. Если такой шарик отпустить в спокойном воздухе, то он поднимается вверх с установившейся скоростью 3 м/с. Вася взял с собой несколько шариков и на электричке поехал на дачу. Дорога ведет на север, и электричка едет со скоростью 12 м/с. Погода ветреная, и над землей дует восточный ветер со скоростью 4 м/с. Один из шариков Вася выпустил «на свободу» из окна электрички. На каком примерно расстоянии от Васи окажется этот шарик через 2 минуты?

С момента когда шарик окажется на свободе, он за пару секунд поднимется над электричкой и далее будет подниматься вверх со скоростью 3 м/с относительно окружающего воздуха. Ветер будет нести с собой шарик в горизонтальном направлении с востока на запад, а Вася вместе с электричкой будет по горизонтали перемещаться на север. По теореме Пифагора относительная скорость движения шарика и Васи равна по величине $\sqrt{(12^2 + 4^2)} + 3$ м/с = 13 м/с. Пренебрегая начальными секундами, получим примерное расстояние между Васей и шариком через 2 минуты:

$$l = 13 \text{ м/с} \cdot 120 \text{ с} = 1560 \text{ м.}$$

Ф2626. Кеша и Тучка, находясь в своих домиках, получили одновременно СМС-сообщения от Лисички с информацией, что яблочный пирог уже готов, и тут же бросились бежать к дому Лисички. Кеша половину времени бежал со скоростью 5 м/с, а оставшуюся половину времени – со скоростью 4 м/с (устал). Тучка первую половину пути пробежал со скоростью 4 м/с, а вторую половину пути – со скоростью 5 м/с. В результате оба прибежали к Лисичке одновременно. Каково расстояние от дома Кеши до дома Лисички в шагах Цыты, если расстояние от дома Тучки до дома Лисички равно 800 шагов Цыты?

¹ Автор решений задач Ф2625–2628 – С.Варламов.

Введем обозначения: l – расстояние от дома Кеши до дома Лисички и s – расстояние от дома Тучки до дома Лисички. Из условия задачи следуют такие соотношения:

$$5 \text{ м/с} \cdot \frac{t}{2} + 4 \text{ м/с} \cdot \frac{t}{2} = l, \quad \frac{s/2}{4 \text{ м/с}} + \frac{s/2}{5 \text{ м/с}} = t.$$

Отсюда получаем

$$\frac{l}{s} = \frac{81}{80}, \text{ или } l = \frac{81}{80} s = 810 \text{ шагов Цыпы.}$$

Ф2627. *Вася собрал электрическую схему, которая изменяет мощность W электрического нагревателя по линейному закону от времени t , прошедшего после включения нагревателя: $W = W_0 \cdot t/\tau$, где $W_0 = 100 \text{ Вт}$, $\tau = 10 \text{ с}$. Этот нагреватель помещен на дно банки с водой. Начальная температура воды 20°C . Пренебрегая теплоемкостью банки и потерями тепла в окружающую среду, найдите, сколько воды было в банке, если она вскипела через 5 минут. Удельная теплоемкость воды $4,2 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$. Давление воздуха нормальное.*

Если мощность W изменяется линейно со временем, то количество теплоты, выделившееся в воде, пропорционально времени и средней мощности, равной полусумме начального и конечного значений мощности:

$$Q = t \frac{0 + W_0 t/\tau}{2} = \frac{W_0 t^2}{2\tau}.$$

Это количество теплоты тратится на нагрев воды до температуры кипения, которая при нормальном давлении воздуха равна 100°C :

$$Q = cm\Delta T.$$

Отсюда находим

$$m = \frac{W_0 t^2}{2\tau c (T_k - T_0)} \approx 1,3 \text{ кг.}$$

Итак, в банке было приблизительно 1,3 литра воды.

Ф2628. *В однородном магнитном поле с индукцией B движется электрон, и его скорость всегда перпендикулярна полю. В момент начала наблюдений скорость электрона равна $v \ll c$ (здесь c – это скорость света). Через какое время ско-*

рость его движения станет в 2 раза меньше? Мощность W излучения нерелятивистской электрически заряженной частицы, движущейся с ускорением a , пропорциональна квадрату произведения ускорения на заряд q частицы: $W = (qa)^2 \cdot A$, где A – постоянная величина, зависящая от выбора системы единиц. Получите численный ответ для случая, когда $B = 1 \text{ Тл}$, $v = c/100$. Как изменится ответ для времени, если в том же поле и с той же начальной скоростью будет двигаться протон?

Излучение возникает за счет уменьшения кинетической энергии частицы. Поскольку по условию задачи частица (электрон или протон) движется со скоростью, много меньшей скорости света, то она нерелятивистская. Следовательно, выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m \frac{v^2}{2} \right) &= -A (qa)^2 = \\ &= -A \left(q \frac{qvB}{m} \right)^2 = -A \left(\frac{q^2 v B}{m} \right)^2, \end{aligned}$$

или

$$\frac{dv^2}{v^2} = -2A \frac{q^4 B^2}{m^3} \cdot dt.$$

Отсюда следует

$$\ln \frac{v_{\text{кон}}}{v_{\text{нач}}} = -A \frac{q^4 B^2}{m^3} \cdot t,$$

или

$$t = \ln 2 \cdot \frac{m^3}{Aq^4 B^2}.$$

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, полная излучаемая мощность определяется формулой Лармора, которая в системе единиц «СИ» имеет вид

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Следовательно, величина постоянной A в этой системе единиц равна

$$A = \frac{2}{3} \frac{k}{c^3}, \text{ где } k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2.$$

Тогда получается, что для электрона, движущегося перпендикулярно магнитному полю с индукцией 1 Тл , время уменьше-

ния скорости в два раза равно примерно 3,6 секунды.

А для протона, движущегося в том же магнитном поле, время уменьшения скорости в два раза увеличится в огромное число раз, а именно в $6,2 \cdot 10^9$ раз, и составит больше 704 лет!

Ф2629. Легкая упругая пластина (консоль) длиной L , один из концов которой закреплен в стене, под действием груза массой m прогибается на величину $h \ll L$ (рис.1). Без груза на свободном конце

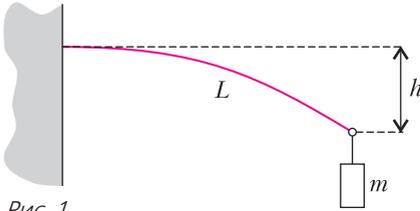


Рис. 1

пластина горизонтальна. Какую работу нужно совершить, чтобы такую же пластину свернуть в кольцо?

Вводим систему координат в соответствии с рисунком 2. Поскольку прогиб невелик,

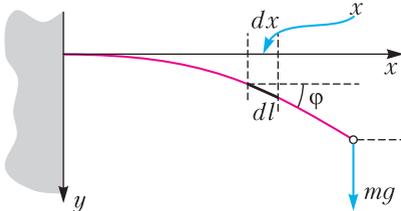


Рис. 2

т.е. $h \ll L$, то $\cos \varphi \approx 1$. Элемент пластины, находящийся в точке x , изгибается моментом силы $M = mg(L - x)$. Для этого элемента (при небольшом изгибе $dl \approx dx$ можно записать закон деформации (аналогичный закону Гука) в виде

$$M = \frac{k_0}{dx} \cdot d\varphi.$$

Здесь k_0 – коэффициент упругости изгиба для единицы длины пластины. Отсюда получаем угловую величину изгиба элемента:

$$d\varphi = \frac{mg}{k_0} (L - x) \cdot dx.$$

Интегрируем и находим угол наклона пластины в точке x :

$$\varphi = \frac{mg}{k_0} \int_0^x (L - x) dx = \frac{mg}{k_0} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right).$$

По этому углу находим изменение вертикальной координаты для элемента пластины. При малом угле наклона элемента

$$dy = dx \cdot \varphi.$$

Интегрируя, получаем уравнение прогиба пластины:

$$y(x) = \frac{mg}{k_0} \int_0^x \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{mg}{k_0} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Для конца пластины находим зависимость величины «стрелы провиса» h от параметров системы:

$$h = \frac{mg}{3k_0} L^3.$$

Отсюда выражаем величину удельной упругости пластины:

$$k_0 = \frac{mgL^3}{3h}.$$

При сворачивании пластины в кольцо угол деформации равен 2π . Теперь, используя известную формулу, легко определить величину необходимой работы:

$$A = k \frac{\varphi^2}{2} = \frac{k_0}{L} \frac{\varphi^2}{2} = \frac{2}{3} \pi^2 mg \frac{L^2}{h}.$$

А.Власов

Ф2630. Космонавты на МКС нашли в очередном «грузовике» тонкостенную цилиндрическую круглую трубу массой $m = 1$ кг, длиной $L = 1$ м и внутренним сечением $S = 10$ см². Оказалось, что внутренняя поверхность трубы замечательно смачивается водой, а внешняя совсем не смачивается. Из шприца внутрь трубы выдавили воду. Делали это очень аккуратно, так что ни одного пузырька воздуха в трубе не оказалось. Труба с водой внутри долгое время в неподвижности «висела» посреди космической лаборатории, пока ее случайно не толкнули в направлении оси симметрии. Толчок был кратковременным, $\Delta t < 10^{-3}$ с, и труба приобрела скорость $v = 1$ см/с. В дальнейшем труба то останавливалась, то вновь двигалась с приобретенной при ударе скоро-

стью. Через большое время скорость трубы с водой установилась и стала равной 0,5 см/с. Оцените период колебаний системы «вода-труба». Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0,07 \text{ Дж/м}^2$. Вязкостью воды при расчете периода колебаний можно пренебречь.

Поскольку установившаяся скорость движения трубы с водой равна половине от начальной скорости трубы, то это означает, что масса воды в трубе в точности равна массе самой трубы. Иными словами, до толчка вода заполняла весь внутренний объем трубы и ее торцевые поверхности были плоскими. Обозначим через r радиус окружности, соответствующей границе касания воды, воздуха и внутренней поверхности трубы. Согласно условию, $\pi r^2 = S$, откуда $r \approx 1,8 \text{ см} \ll 1 \text{ м}$. Следовательно, можно считать, что масса «кривых» участков воды на концах трубы гораздо меньше суммарной массы всей воды в трубе. Выделенный красным цветом на рисунке участок жидкости, выпук-



Рис. 3

лый слева и ограниченный вертикальной плоскостью справа, имеет объем $V = x \cdot \pi r^2$, где x — это величина смещения от равновесного положения жидкости внутри трубы вдоль оси трубы. Этот же объем представляет собой объем шарового сегмента (выпуклого вблизи одного торца трубы и вогнутого у другого торца) с радиусом кривизны R . Смещение вдоль оси трубы средней точки поверхности этого шарового сегмента от положения равновесия обозначим через h . Величины R , r и h связаны соотношением (теорема Пифагора) $R^2 = r^2 + (R - h)^2$, откуда следует $R = (r^2 + h^2)/(2h)$. Объем сегмента шара, как известно, равен $V = \pi h^2 \cdot (R - h/3)$. Если мы найдем радиусы кривизны R свободных поверхностей воды вблизи торцов трубы, то мы найдем силу, действующую на воду в трубе, и получим уравнение динамики (в нашем случае уравнение колебаний).

Максимальная площадь свободной поверхности воды при движении трубы с водой достигается в те моменты времени, когда вода останавливается по отношению к стенкам трубы. Вязкость воды по условию мала, поэтому на начальном этапе движения ею можно пренебречь и считать, что потерь энергии нет, т.е. сохраняется сумма механической энергии и энергии свободной поверхности воды. Максимальное увеличение площади свободной поверхности ΔS воды у одного из торцов трубы можно найти из соотношения

$$\frac{(mv)^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{4m} + 2\sigma\Delta S_{\max},$$

откуда

$$\Delta S_{\max} = \frac{mv^2}{8\sigma} \approx 1,78 \text{ см}^2 \ll S = 10 \text{ см}^2.$$

Таким образом, площадь поверхности увеличилась немного (меньше чем на 20%). Полученное неравенство можно интерпретировать и так: $h/3 \ll R$. Будем этим пользоваться, а в итоге убедимся, что оно на самом деле выполняется. Тогда

$$V \approx \pi h^2 \cdot R = x \cdot \pi r^2, \text{ или } h^2 = r^2 \cdot \frac{x}{R},$$

$$\text{и } R = \frac{r^2 + h^2}{2h} \approx \frac{r^2}{2h}.$$

Исключаем величину h , и получаем $1/R = 4x/r^2$. Вблизи поверхностей воды с такой кривизной возникают Лапласовы давления: повышенное там, где поверхность воды выпуклая, и пониженное там, где поверхность воды вогнутая. В данном случае они одинаковы по величине и равны $2\sigma/R$.

В системе отсчета центра масс механической системы «вода-труда» вода и труба смещаются от своих положений равновесия в противоположных направлениях на одинаковые расстояния $x/2$. При этом на воду действует суммарная «возвращающая» к положению равновесия сила, равная $2 \cdot (2\sigma/R) \cdot \pi r^2$. Напишем уравнение динамики для воды:

$$m \frac{x''}{2} = -4\pi r^2 \cdot \frac{4\sigma x}{r^2}, \text{ или } mx'' = -32\pi\sigma \cdot x.$$

(Продолжение см. на с. 34)

О трех равных отрезках

В геометрии существует ряд задач, где необходимо доказать равенство трех отрезков или построить (найти) точки, создающие три равных отрезка. Такие задачи полезны, красивы, порой непросты и часто имеют творческий характер. Предлагаем вниманию читателей коллекцию таких задач – задач – задач, в которых $x = y = z$.

Задача 1. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка F такая, что $AF = AB$ (рис.1). Перпендикуляр, восстановленный в

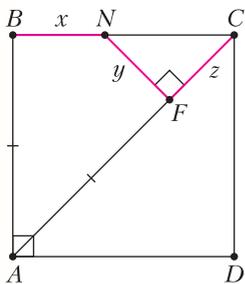


Рис. 1

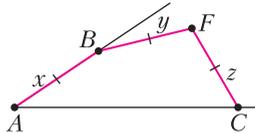


Рис. 2

точке F к прямой AC , пересекает сторону BC в точке N . Докажите, что $x = y = z$.

Задача 2. Дан острый угол A и точка F внутри угла (рис.2). Постройте на сторонах угла точки B и C такие, что $x = y = z$.

Задача 3. На стороне BC треугольника ABC взяты точки K и T такие, что отрезки AK и AT делят угол BAC на три равные

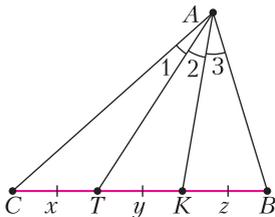


Рис. 3

части: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \alpha$ (рис.3). При каких α возможно, что $x = y = z$?

Задача 4. В окружность ω вписан равносторонний треугольник ABC (рис.4). Точки F и N – середины дуг AC и AB соответственно. Докажите, что отрезки AC и AB

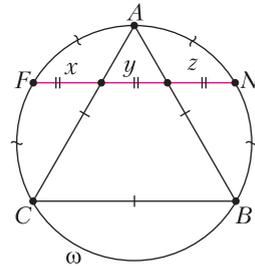


Рис. 4

делят хорду FN на три равные части: $x = y = z$.

Задача 5. Точка O – центр окружности ω , описанной около остроугольного треугольника ABC (рис.5). Луч AO пересекает сторону BC и окружность ω в точках K и T соответственно. Перпендикуляры KD и KE

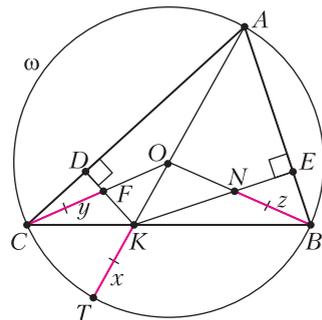


Рис. 5

к сторонам AC и AB пересекают радиусы OC и OB в точках F и N соответственно. Докажите, что $x = y = z$ ($TK = CF = BN$).

Задача 6. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Луч AI пересекает окружность ω , описанную около треуголь-

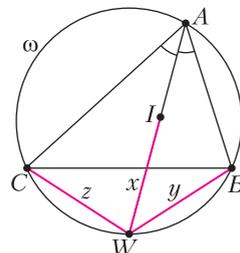


Рис. 6

$x = y = z$

$AF = AB$

A

ника ABC , в точке W (рис.6). Докажите, что $IW = BW = CW$, или $x = y = z$.

Задача 7. Три окружности с центрами O_1 , O_2 и O_3 попарно касаются внешним образом (рис.7). Докажите, что три их внутренние общие касательные пересекаются в

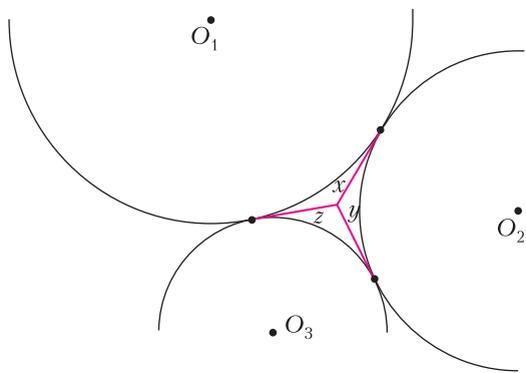


Рис. 7

одной точке и что отрезки этих касательных равны: $x = y = z$.

Задача 8. Дана прямая l и параллельный ей отрезок AB (рис. 8). Пользуясь только

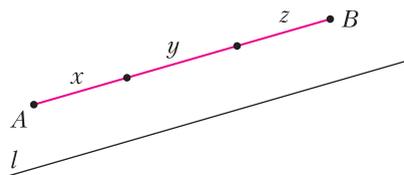


Рис. 8

линейкой, разделите AB на три равные части ($x = y = z$).

Задача 9. Точка O – общий центр окружностей ω и s (рис.9). Проведите секущую $A-B-C-D$ так, чтобы $AB = BC = CD$, или $x = y = z$.

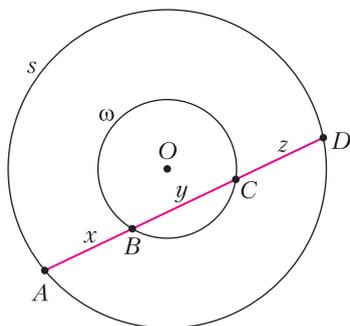


Рис. 9

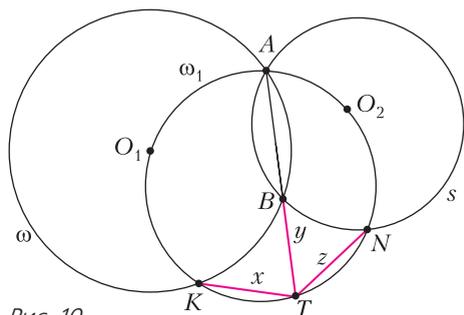


Рис. 10

Задача 10. Окружности ω и s с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (рис.10). Окружность ω_1 проходит через точки A , O_1 и O_2 , второй раз пересекает прямую AB в точке T , а окружности ω и s (вторично) – в точках K и N соответственно. Докажите, что $KT = BT = NT$ ($x = y = z$).

Задача 11. Пусть OA и OB – радиусы в окружности ω (рис.11). Проведите хорду TQ так, чтобы она делилась этими радиусами на три равные части: $x = y = z$.

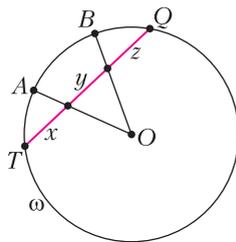


Рис. 11

Задача 12. На сторонах AC и AB треугольника ABC постройте точки F и N

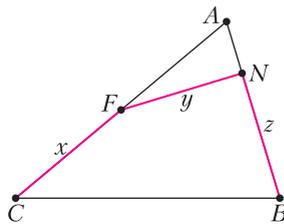


Рис. 12

такие, чтобы длины отрезков CF , FN и NB были равны: $x = y = z$ (рис.12).

Материал подготовил
Г.Филитовский

(Начало см. на с. 23)

Из этого уравнения гармонических колебаний находим угловую частоту ω и период колебаний T :

$$\omega^2 = \frac{32\pi\sigma}{m}, \quad \omega \approx 2,65 \text{ с}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2,37 \text{ с}.$$

Если скорость движения воды при прохождении положения равновесия в системе отсчета центра масс равна $v/2$, т.е. 0,005 м/с, то максимальное смещение воды внутри трубы по отношению к ее стенкам составляет величину $x_{\max} = v/\omega \approx 3,8$ мм. Зная x_{\max} , находим $h_{\max}/3 = 2,53$ мм и $R_{\min} = 21,3$ мм. Получается, что неравенство $h/3 \ll R$, которым мы пользовались при вычислении (оценке) периода колебаний, действительно выполняется.

Г.Агарин

Ф2631. Коллекторный двигатель постоянного тока, имеющийся в электродрели, при подаче на него напряжения 100 В вращается (на холостом ходу), делая в установившемся режиме 1000 оборотов в минуту. При сверлении отверстия в дереве двигатель производит механическую мощность 100 Вт на 700 оборотах в минуту при напряжении на нем 100 В. Какую максимальную механическую мощность сможет в течение длительного времени развивать такой двигатель, если на него подать напряжение 220 В?

Согласно условию задачи коллекторный двигатель дрели является двигателем постоянного тока. Это означает, что магнитное поле статора постоянно. Поскольку в вопросе задачи говорится об установившемся режиме работы, то рассматривать будем только установившиеся движения. Механический момент сил в двигателе создается магнитным полем статора, действующим на обмотку ротора двигателя, по которой течет ток. Величина этого момента сил M пропорциональна величине магнитного поля B , силе тока I , числу витков в обмотке ротора N и площади каждого витка S , а именно, $M = BINS$. Установившаяся скорость вращения определяется нагрузкой, т.е. механическим моментом сил m , который оказывает на вал дрели сопротивляющаяся «дрелению»

среда, и напряжением U , которое подано на двигатель. В установившемся режиме сумма моментов сил, действующих на ротор двигателя, равны нулю, т.е.

$$M + m = BINS + m = 0.$$

Механическая мощность, развиваемая двигателем, равна произведению механического момента сил на угловую скорость ω вращения ротора: $W = m \cdot \omega$.

При вращении ротора двигателя возникает электродвижущая сила (ЭДС) индукции \mathcal{E} , пропорциональная величине магнитного поля, числу витков в каждой обмотке ротора и частоте вращения ротора: $\mathcal{E} = -BSN\omega$. При этом ток в цепи определяется законом Ома: $I = (U + \mathcal{E})/R = (U - BSN\omega)/R$, где R — это сопротивление обмотки, по которой течет ток. В результате получается, что развиваемая двигателем механическая мощность равна

$$W = m\omega = BINS \cdot \omega = \omega \cdot BNS \cdot \frac{U - BSN\omega}{R}.$$

Если нагрузка отсутствует, а трение в подшипниках ротора и на коллекторе мало, то ротор двигателя раскручивается до такой угловой частоты $\omega = U/(BSN)$, при которой ЭДС индукции равна ЭДС источника тока, к которому подключен двигатель. Еще одной характеристикой такого двигателя является ток I_{\max} , текущий по подключенной к источнику обмотке при заторможенном роторе. Величина этого тока определяется ЭДС источника тока и электрическим сопротивлением провода обмотки, по которой ток течет: $I_{\max} = U/R$. Этому максимальному току соответствует максимальный момент сил $M_{\max} = BUNS/R$, создаваемый магнитным полем статора, действующим на обмотку, по которой течет ток.

При максимальной угловой скорости (на холостом ходу) частота вращения ротора самая большая, а момент сил, действующих со стороны магнитного поля на обмотки, равен нулю, поскольку ток в обмотках нулевой. При заторможенном роторе максимален момент сил, действующих на обмотки ротора, но частота вращения равна нулю. В обоих этих случаях развиваемая двигателем механическая мощность равна нулю. Максимальная мощность отбирается от источника энергии как раз в режиме

с заторможенным ротором. Но вся эта электрическая мощность превращается в тепловую, выделяющуюся в сопротивлении обмотки. Если же нагрузка не настолько велика, что ротор затормаживается, то в этом случае часть электрической энергии, отбираемой от источника тока (источника энергии), превращается в механическую работу дрели, которая обычно и считается полезной. Максимальная механическая мощность при заданном напряжении (ЭДС) источника энергии достигается, согласно написанному выражению для мощности, при частоте вращения ω_1 , равной половине частоты вращения ротора двигателя на холостом ходу: $\omega_1 = U/(2BSN)$. При этом ток, текущий по обмотке, равен половине от максимального тока при заторможенном роторе. Следовательно, половина отдаваемой источником мощности превращается в теплоту (обмотки греются), а половина – в механическую мощность, которая равна $W_{\max} = U^2/(4R)$. Эта максимальная механическая мощность пропорциональна квадрату поданного на двигатель напряжения.

По условию задачи при частоте 700 оборотов в минуту и напряжении источника 100 В механическая мощность, развиваемая двигателем, равна 100 Вт. А частота вращения на холостом ходу при этом напряжении равна 1000 оборотов в минуту. Мощность зависит от частоты вращения ротора двигателя по закону $W \sim \omega \cdot (\omega_{\text{хх}} - \omega)$. Подставив численные значения $\omega = 700$ и $\omega_{\text{хх}} = 1000$, получим множитель $21 \cdot 10^4$. А если подставить значение $\omega = \omega_{\max}/2 = 500$, то получится множитель $25 \cdot 10^4$. Это означает, что максимальная мощность двигателя при поданном на него напряжении 100 В равна

$$W_{\max} = 100 \text{ Вт} \cdot 25/21 = 119 \text{ Вт}.$$

Тогда максимальная мощность такого двигателя, работающего при напряжении 220 вольт, получается равной

$$119 \text{ Вт} (220^2/100^2) \approx 576 \text{ Вт}.$$

Д.Релев

Ф2632. Для звукового усилителя используется блок питания с трансформатором. В нем есть двухполупериодный вып-

рямитель из четырех идеальных диодов. Первичная обмотка трансформатора включена в сеть (220 В, 50 Гц). На выходе вторичной обмотки эффективное напряжение равно $U = 12 \text{ В}$, оно подано на этот самый выпрямитель. Амперметр постоянного тока, включенный между выпрямителем и усилителем, показывает средний ток $I = 1 \text{ А}$. Усилитель работает, но противно гудел на частоте 100 Гц и ее гармониках, так как конденсатор, стоявший на выходе выпрямителя параллельно нагрузке, вышел из строя. В распоряжении Васи оказались два конденсатора емкостями $C_1 = C_2 = 10^3 \text{ мкФ}$ и две катушки индуктивностями $L_1 = L_2$. Вася собрал такую схему, что гудение на частоте 100 Гц пропало вовсе, а на других частотах значительно уменьшилось. Нарисуйте схему, придуманную Васей. Чему равно сопротивление нагрузки? Какова индуктивность катушек? Считайте, что нагрузка представляет собой активное сопротивление и оно оста-

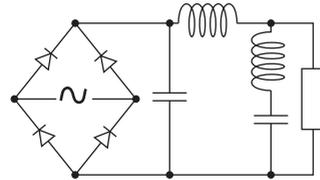


Рис. 4

валось неизменным.

Схема, собранная Васей, изображена на рисунке. Комбинация последовательно соединенных катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C , включенных параллельно нагрузке, имеет по условию задачи нулевое сопротивление для переменного тока на частоте $f = 100 \text{ Гц}$, и в нагрузку напряжение с такой частотой не попадает. Частота $\omega = 2\pi f$ связана с параметрами L и C соотношением

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Отсюда находим индуктивность:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} \approx 2,5 \text{ мГн}.$$

Сопротивление нагрузки равно

$$R = \frac{U}{I} = 12 \text{ Ом}.$$

С.Дмитриев

ПОЛИМИНО

Ю.МАРКЕЛОВ, А.САЙРАНОВ

В этой статье мы обсудим решение задачи M2625. Но начнем с другой задачи, из варианта 7 класса Математического праздника 2018 года:

Существует ли такая фигура, что при любом выборе вида фигурок тетрамино (рис.1) эту фигуру можно составить,

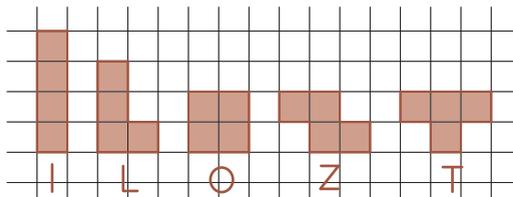


Рис. 1

используя тетраминошки только выбранного вида? (Переворачивать тетраминошки можно.)

Оказывается, такая фигура существует (рис.2).

В фигуре из рисунка 2 есть дырка (т.е. фигура неодносвязна). И во всех примерах, найденных жюри, была дырка. Возникает гипотеза: *если для каждого типа тетрамино данную фигуру можно разбить на тетрамино этого типа, то в фигуре есть дырка.* Мы докажем более сильное утверждение (которое и составляет задачу M2625): *если фигуру можно разрезать как на фигуры типа O, так и на фигуры типа Z, то в ней есть дырка.*

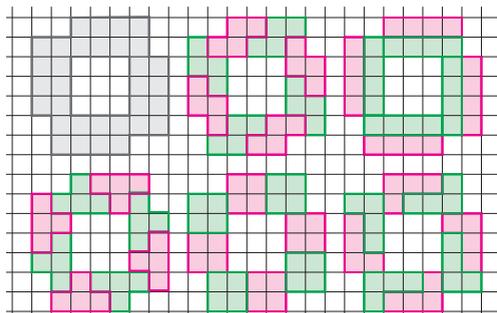


Рис. 2

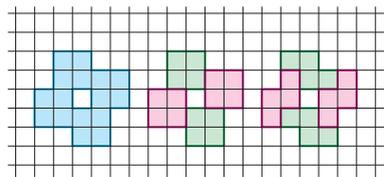


Рис. 3

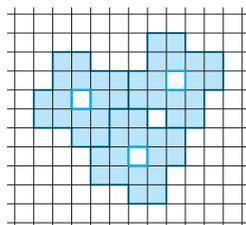


Рис. 4

Замечание. Не сложно видеть, что фигур, которые можно разрезать как на тетраминошки типа O, так и на тетраминошки типа Z, бесконечно много. Например, можно взять фигуру из рисунка 3

и склеивать копии этой фигуры друг с другом (рис.4). Но есть и другие примеры (см. рис.2 и 5).

Пусть существует фигура Φ без дырок, которую можно разделить и на фигурки типа O, и на фигурки типа Z.

Раскрасим клетки фигуры Φ в черный и белый цвета в шахматной раскраске. Рассмотрим фиксированное разбиение фигуры Φ на фигурки типа O и разбиение на фигурки типа Z. В любой фигурке типа O или фигурке типа Z будет ровно две черные и ровно две белые клетки. Соединим в каждой фигурке типа O и в каждой фигурке типа Z центры черных клеток отрезком. Рассмотрим объединение всех таких отрезков. Из каждой черной клетки выходит ровно два отрезка (в некоторых случаях они могут совпадать), поэтому наше множество отрезков будет состоять из циклов. Назовем это множество отрезков *черным* разбиением. Аналогичную конструкцию для белых клеток назовем *белым* разбиением (рис.5).

Докажем, что в черном разбиении или в белом разбиении найдется цикл длины больше 2. В разбиении есть цикл длины 2, если есть фигурка типа O и фигурка типа Z, в пересечении которых две одноцветные клетки. Пусть в белом разбиении все циклы имеют длину 2. Тогда рассмотрим какую-нибудь фигурку O_1 типа O. Существует фигурка Z_1 типа Z, которая содержит две белые клетки фигурки O_1 . Но

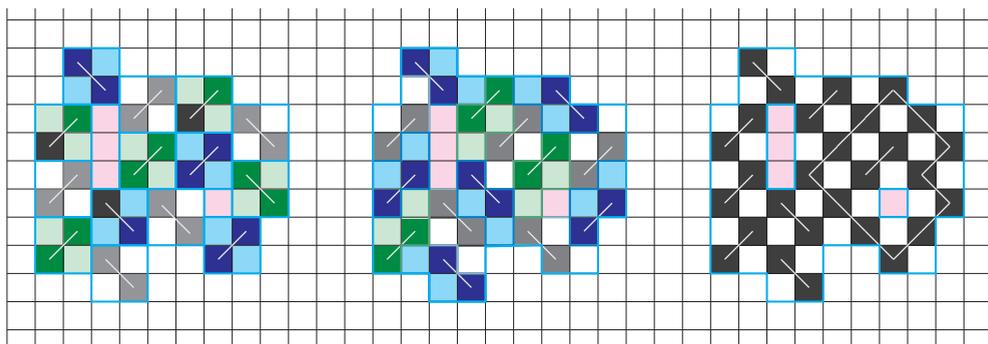


Рис. 5

тогда фигурка Z_1 содержит ровно одну из черных клеток фигурки O_1 . Значит, из соответствующей клетки в черном разбиении отрезки идут в разные клетки. Они и порождают цикл длины больше 2.

Далее мы докажем, что внутри любого цикла длины больше 2 обязательно будет дырка. Не умаляя общности, будем считать, что цикл длины больше 2 есть в черном разбиении. Назовем *внутренней* фигурку типа O из разбиения, целиком лежащую внутри нашего цикла. Назовем *граничной* фигурку типа O из разбиения, две черные клетки которой принадлежат выбранному нами циклу. Отрезки в цикле чередуются: после отрезка, соединяющего черные клетки фигурки типа O , идет отрезок, соединяющий черные клетки фигурки типа Z , значит, длина нашего цикла равна $2k$, где $k \in \mathbb{N}$. Обозначим количество черных и белых клеток, лежащих строго внутри нашего цикла, через b и w соответственно. Любая черная клетка внутри цикла принадлежит внутренней фигурке типа O , любая белая клетка внутри цикла принадлежит либо граничной фигурке типа O , либо внутренней. Всего есть k граничных фигурок, и каждой из них принадлежит ровно одна внутренняя белая клетка. С другой стороны, всем внутренним фигуркам типа O принадлежит ровно b черных клеток, а значит, и ровно b белых клеток. Таким образом, $w = b + k$.

Теперь посчитаем соотношение между b и w иным способом. Рассмотрим новую сетку. Узлами новой сетки будут центры бывших черных клеток. Центрами новых клеток будут центры бывших белых кле-

ток. Тогда наш цикл – фигура, идущая по линиям новой сетки. Количество внутренних узлов сетки равно количеству старых внутренних черных клеток, т.е. b . Количество узлов на границе – это длина цикла, т.е. $2k$. Теперь посчитаем по формуле Пика (см. [1] и [2]) площадь нашей фигуры: $S = b + 2k/2 - 1 = b + k - 1$. Но площадь новой фигуры – это количество внутренних центров новых клеток, т.е. количество старых белых клеток внутри цикла. Откуда заключаем, что $w = S = b + k - 1$. Противоречие.

Из предположения об отсутствии дырок внутри данного цикла мы пришли к противоречию. Значит, в любом цикле будет хотя бы одна дырка.

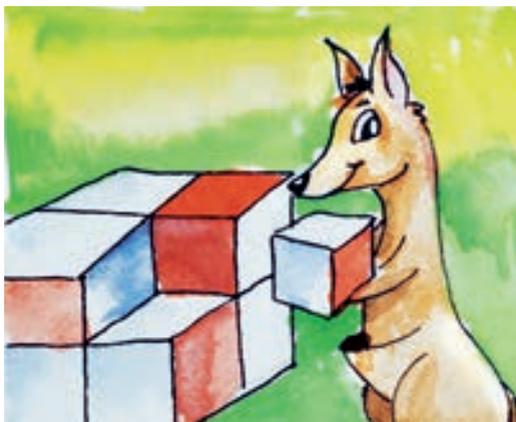
Замечание. Из доказательства следует даже более сильное утверждение: в фигуре, которую можно разрезать и на тетраминошки типа O , и на тетраминошки типа Z , существует дырка нечетной площади. В качестве такой дырки можно выбрать ту, которая не содержит внутри себя других связанных компонент нашей фигуры. Попробуйте самостоятельно модифицировать доказательство для этого случая, выведя условие на количество черных и белых клеток внутри такой дырки.

Литература

1. Г. Мерзон. Формула Пика и тающий лед. – «Квант», 2018, №9.
2. Н. Васильев. Вокруг формулы Пика. – «Квант», 1974, №12.

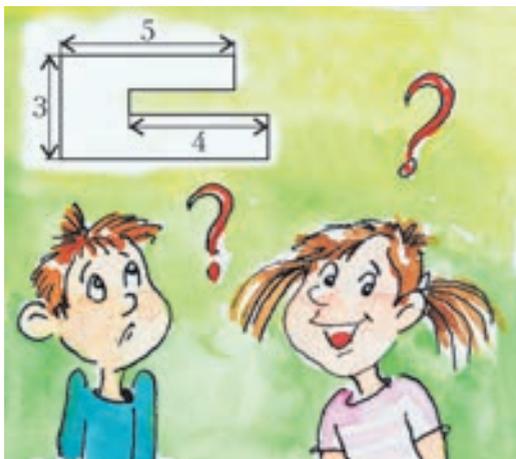
Задачи

1. У кенгуренка Смартика есть 8 кубиков $1 \times 1 \times 1$. У каждого кубика две соседние грани красные, а остальные – белые. Смартик сложил из них большой куб $2 \times 2 \times 2$. Какое наибольшее количество полностью красных граней может оказаться у большого куба?



Каждое количество полностью красных граней может оказаться у большого куба?

2. Все углы на рисунке – прямые. Чему равен периметр фигуры на рисунке?



Задачи 1 и 2 предлагались на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру».

3. Разрежьте изображенный ниже прямоугольник по линиям сетки (т.е. по горизонтальным и вертикальным линиям) на равные части так, чтобы



каждая часть содержала ровно одну снежинку.

С.Костин

4. Равенство

$$211 - 33 = 2021,$$

разумеется, неверно. Но если в этом равенстве переместить три цифры, то



равенство станет верным. Какие три цифры и как именно надо переместить?

С.Костин

Почему самолет взлетает против ветра

С.ДВОРЯНИНОВ

– Я вижу, ты о чем-то крепко задумался? – спросил Папа Карло своего Буратино, заметив, что тот уже долго листает страницы учебника физики.

– Да, сегодня на уроке учитель сказал, что самолету легче взлетать против ветра. А нам надо объяснить, почему это так. Я весь учебник просмотрел, а ответа не нашел.

– Что ж, давай будем рассуждать логически, – Папа Карло отряхнул стружки с фартука, отошел от верстака и присел у стола.

– А как это – «рассуждать логически»? Логика – это когда из *A* следует *B*. А в этой физической задаче никаких *A* и *B* нет, – разочарованно произнес Буратино.

– Ты не прав, – возразил Папа Карло. – И сейчас сам в этом убедишься. Чтобы ответить на вопрос твоего учителя, мы выстроим логическую цепочку. Я буду задавать тебе вопросы, а ты будешь на них отвечать. Итак, начали. – Что происходит с самолетом, прежде чем он отрывается от земли и оказывается в воздухе?

– Самолет разгоняется, двигаясь по взлетной полосе, это ясно, – ответил Буратино.

– А относительно чего движется самолет?

– Относительно земли, конечно, и относительно того, что на ней находится. Это, например, здание аэровокзала, люди, которые, наблюдают за самолетами, деревья...

– Ну а самое главное-то что? Относительно чего движется самолет? Самолет разгоняется относительно воздуха! Будем вначале считать, что стоит безветренная погода, полный штиль, такой, что ни один листочек на дереве не шелхнется. Так вот относительно этого неподвижного воздуха самолет по взлетной полосе движется все быстрее и быстрее. Согласен? – уточнил Папа Карло.

– Да, согласен, это похоже на ускоренное движение моторной лодки по озеру. В

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210103>



озере никакого течения нет, вода стоит неподвижно, – откликнулся Буратино. – Как корабль плавает в океане, так и самолет плавает в воздушном океане.

– Не ошибайся в терминах, мой дорогой Буратино. Корабли не плавают, а ходят, так говорят настоящие мореходы-моряки. Плавают в воздушном океане, согласно закону Архимеда, воздушные шары, аэростаты, дирижабли да еще детские шарики, наполненные гелием. А самолеты летают. Но сначала они должны взлететь. И отрывает их от земли и поднимает вверх сила, которая называется подъемной. Она возникает, когда воздушный поток набегаает на самолет, – продолжил Папа Карло.

– А вот когда я еду на велосипеде, я этот поток набегающий чувствую даже очень хорошо. Но при этом я вверх не поднимаюсь. И даже автомобиль, набравший большую, скорость, продолжает катиться по земле и никуда не улетает, – возразил Буратино.

– Верно ты все говоришь. Но самолет и особенно его крылья имеют такую специальную форму, которая приводит к появлению подъемной силы, направленной вверх. Чем больше скорость набегающего потока, тем больше становится подъемная сила. Наконец, она превосходит силу тяжести, действующую на самолет, и тогда воздушное судно отрывается от земли.

– Но если подъемная сила больше силы тяжести, то самолет будет подниматься вверх все выше и выше неограниченно. А так не бывает, – снова пытался спорить Буратино.

– Нет, конечно. Когда надо, пилот самолета, изменяя угол атаки крыла, добивается того, что две силы – подъемная и тяжести – становятся равными, и тогда самолет летит на неизменной высоте, – заключил Папа Карло. – А теперь сопоставь все факты, о которых мы сейчас говорили, и объясни, почему против ветра самолету взлететь легче.

– Да, я могу объяснить! – воскликнул Буратино, – вот она, логическая цепочка. Для подъема самолета требуется достаточ-



но большая скорость v набегающего воздушного потока. Скорость – понятие относительное. Можно сказать, что поток набегает на самолет, а можно сказать, что самолет движется относительно воздушной массы. Когда на взлетной полосе ветер дует навстречу самолету, то скорость самолета относительно воздуха равна его собственной скорости плюс скорость ветра. При этом требуемое значение скорости v получается при меньшей собственной скорости самолета. Вот так.

– Это правильно, молодец, – заключил Папа Карло. – Поэтому и говорят, что против ветра самолету взлетать легче. Это было особенно важно на заре авиации, когда двигатели были не очень мощные. Современные же самолеты могут взлетать и при попутном ветре, но в любом случае пилоты учитывают и скорость ветра, и его направление. Так что, вырастешь – станешь пилотом и вспомнишь сегодняшний разговор! А мне надо продолжать работу.

И Папа Карло направился к своему верстаку.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest
Желаем успеха!

17. Требуется записать по кругу все натуральные числа от 1 до n в таком порядке, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом. Можно ли это сделать, если:

а) $n = 2021$; б) $n = 2022$?

И.Акулич

18. Нетрудно нарисовать на клетчатой бумаге треугольник с целочисленными длинами сторон и вершинами в узлах – например, прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5. А можно ли нарисовать треугольник с целочисленными длинами сторон и вершинами в узлах так, чтобы ни одна его сторона не проходила по линиям сетки?

Фольклор

19. Можно ли грани додекаэдра раскрасить в 6 цветов так, чтобы для любой тройки цветов нашлась вершина, в которой сходятся три грани этих трех цветов?

Е.Бакаев

20. На доске написаны 8 целых чисел. За ход разрешается произвольным образом сгруппировать числа, написанные на доске, в четыре пары и в каждой паре произвести операцию $(a, b) \mapsto (a + b, |a - b|)$ (т.е. заменить числа на их сумму и на модуль их разности). Можно ли за конечное число таких ходов добиться того, чтобы все 8 чисел на доске стали равными, если исходно на доске были написаны следующие числа:

а) 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6;

б) 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

в) 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

С.Костин

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНИЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
■ Интернет-магазин www.bgshop.ru	■ Книги
■ Кафе	■ Аудиокниги
■ Клубные (дисконтные) карты и акции	■ Антикварнат и предметы коллекционирования
■ Подарочные карты	■ Фильмы, музыка, игры, софт
■ Предварительные заказы на книги	■ Канцелярские и офисные товары
■ Встречи с авторами	■ Цветы
■ Читательские клубы по интересам	■ Сувениры
■ Индивидуальное обслуживание	
■ Подарочная упаковка	
■ Доставка книг из-за рубежа	
■ Выставки-продажи	

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

Ртуть и вода – диффузия и испарение

Л. АШКИНАЗИ

ТО, ЧТО ПАРЫ РТУТИ ВРЕДНЫ, ЗНАют все. Поэтому, если ртуть находится в емкости, из которой она может испариться и попасть в помещение, где находятся люди, в эту емкость доливают некоторое количество воды. Вода, как вы знаете, легче ртути приблизительно в 13,6 раз, она располагается поверх ртути и тормозит испарение. Все кажется понятным, однако мы уже сказали несколько несуразностей.

Вода действительно легче, но из этого не следует, что она «располагается поверх». Спирт и ацетон легче воды, но они не располагаются поверх, а растворяются в воде. Причем их растворимость ничем не ограничена, в таких случаях обычно говорят: «смешиваются во всех соотношениях». А вот бензин располагается поверх, но не полностью – растворимость бензина в воде при нормальных условиях около 10^{-5} (по весу). А в обратную сторону, т.е. растворимость воды в бензине, около 10^{-4} . Такие вот у воды и бензина сложные отношения. Что касается взаимной растворимости воды в ртути и ртути в воде, то они невелики: $2 \cdot 10^{-6}$ и $6 \cdot 10^{-8}$ соответственно (опять же, по весу). Так что про воду и ртуть вполне можно сказать «поверх», но это не следует автоматически из того, что вода легче (даже в 13,6 раз).

А откуда мы взяли, что водяное покрытие «тормозит испарение»? Может ли вообще какое-либо покрытие не тормозить, а ускорять испарение? Идея кажется странной, но, скажем, термобелье, надетое на человека, испарение воды (т.е. пота), как пишут, может и ускорять. Там этот эффект если и возникает, то из-за неоднородной структуры – капилляры посредством поверхностного натяжения выводят воду на поверхность,

откуда она испаряется. В нашем случае покрытие, т.е. слой воды на ртути, однородно, и подозревать его в таких фокусах не приходится.

Два года назад появилось сообщение, что графен, т.е. монослой углерода (слой толщиной в один атом), подавляет испарение воды с гидрофильных поверхностей и ускоряет испарение с гидрофобных. Правда, считать графен «покрытием» немного странно, уравнение диффузии и обычные принципы расчета здесь неприменимы. Но в нашем случае и это не важно, потому что ртуть не покрывают ни графеном, ни монослоем воды. Так что будем считать, что это обычная вода.

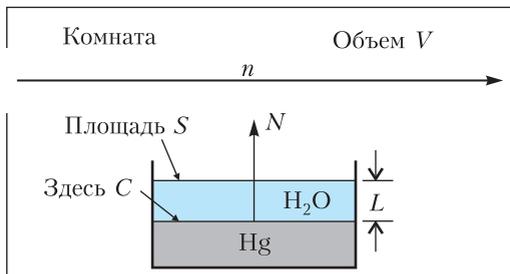
Сначала рассмотрим ситуацию без воды, но в закрытой банке: поверхность ртути открыта, над ртутью есть какое-то количество воздуха, а далее – закрытая крышка. Ртуть испаряется в замкнутый объем воздуха, концентрация ртути в воздухе растет, появляется обратный поток ртути из воздуха в жидкую фазу. Через какое-то время достигается так называемое динамическое равновесие, когда потоки равны, и концентрация ртути в воздухе расти перестает. Эта равновесная концентрация известна; например, при температуре 15°C она составляет $2 \cdot 10^{-5}$ кг/м³. Предельно допустимая концентрация равна $3 \cdot 10^{-10}$ кг/м³, т.е. на 5 порядков меньше. Очевидно, что сидеть в закрытой банке над слоем ртути весьма опасно.

Если ртуть покрыта слоем воды, а за ним находится опять же замкнутый объем воздуха, то ситуация становится сложнее. Концентрация ртути в воде ведет себя так же, как при испарении в замкнутое воздушное пространство – растет до установления динамического равновесия. Однако равновесная концентрация оказывается больше в 3 раза, чем в первом случае, и составляет $6 \cdot 10^{-5}$ кг/м³. Причин у этого явления может быть две – либо молекулы воды притягивают своим электрическим полем атомы ртути (поляризуя их) и облегчают их отрыв от слоя ртути, либо обратный поток атомов ртути из воды на поверхность ртути при той же концентрации (и температуре) оказывается меньше, чем из воздуха. Оба эти процесса нам скоро потребуются. Какой из этих

процессов сильнее, не существенно; но важно, что они действуют в одну сторону.

Одновременно с переходом ртути из ее слоя на дне в воду идет аналогичный процесс испарения ртути из воды в воздух. Естественно, он замедляет процесс достижения динамического равновесия в воде. Но как влияет наличие воды на равновесную концентрацию ртути в замкнутом воздушном пространстве над водой с растворенной в ней ртутью? Если на границе воды и воздуха вода вообще «не влияет», то концентрация в воздухе будет такая же, как в воде. Однако в предыдущем абзаце было указано на два возможных процесса – притяжение водой ртути и торможение водой потока атомов ртути. Оба эти процесса уменьшают равновесную концентрацию ртути в воздухе, однако мы не знаем, во сколько раз. Может быть, они влияют и слабо. Во всяком случае, равновесная концентрация – напоминаем, под закрытой крышкой – вроде бы действительно с водой может быть больше, чем без воды. На этом основании в некоторых книжках пишут, что наливать воду в емкость со ртутью бесполезно. Это верно, только если мы собираемся жить и дышать в банке под закрытой крышкой. Но мы ведь этого не делаем!

Реальная ситуация для человека не такая (см. рисунок). Мы находимся в помещении,



а оно всегда проветривается, даже если окна закрыты. Скорость обмена воздуха в помещении принято характеризовать «кратностью обмена» n , т.е. тем, сколько раз сменяется воздух в помещении за некоторое время, обычно за час. В книжках пишут, что кратность обмена должна быть не менее двух раз в час, воздух должен сменяться не более чем за 30 минут, иначе люди начинают чувствовать себя плохо, и совершенно не из-за ртути! Мы будем пользоваться системой единиц СИ и полагать кратность обмена равной $n = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ соответственно. Итак,

наша задача – определить равновесную концентрацию ртути в зависимости от площади поверхности ртути, толщины слоя воды, кратности обмена воздуха в помещении.

Ситуация в воде такова. Уходящий с поверхности ртути в воду поток N определяется условием $N = \omega - uC$, где ω – скорость покидания атомами ртути поверхности ртути, uC – скорость возвращения атомов ртути из воды в ртуть, C – концентрация ртути в воде на границе с ртутью, u – тепловая скорость. С другой стороны, $N = CD/L$, где D – коэффициент диффузии, L – толщина слоя воды. Это выражение можно считать вариантом определения коэффициента диффузии. Но формула эта приближенная, она написана для случая, когда у наружной поверхности воды концентрация ртути много меньше, чем на границе со слоем ртути. Приравняв правые части выражений для N , получаем

$$C = \frac{\omega L}{D + uL}, \quad N = \frac{\omega D}{D + uL}.$$

Проверим полученные формулы на разумность, т.е. посмотрим на поведение ответа при варьировании всех величин. При $\omega = 0$ обнуляются C и N , что, очевидно, правильно. При $L = 0$ поток $N = \omega$, т.е. происходит свободное испарение, и $C = 0$. При $D = 0$ концентрация на границе $C = \omega/u$, как и должно быть, а поток $N = 0$. При $u = 0$ имеем уход с поверхности при запрете возвращения, тогда, естественно, поток $N = \omega$, а концентрация на границе получается $C = \omega L/D$. (Заметим, что при решении любых задач имеет смысл формулы проверять примерно так.) Можно начать немного иначе, сначала разделить два случая, когда $D \ll uL$ и $D \gg uL$, и рассматривать их по отдельности. В общем, метод понятен.

Перейдем к ситуации в помещении. За время t приход ртути в помещение равен NSt , где S – площадь поверхности, а уход равен $pVtn$, где p – концентрация в помещении, V – объем помещения, n – кратность обмена, которую будем полагать равной двум в час. Приравняв приход и уход, находим концентрацию:

$$p = \frac{NS}{Vn} = \frac{\omega DS}{Vn(D + uL)}.$$

Опять же полезно проверить поведение ответа при варьировании всех переменных (вы

уже понимаете, как это делается). Проведем численные оценки. При $D = 10^{-9} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $L = 10^{-2} \text{ м}$, $u = 150 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, т.е. при $D \ll uL$, получаем $p = \omega Ds / (VnuL)$. Поведение ответа по ω , D , S – правильное; по uL , стремящемся к нулю, натывается на D ; по Vn , стремящемся к нулю, натывается на ограничение $p \leq C$. Численная оценка при $\omega = 6 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ (20°C), $S = 10^{-3} \text{ м}^2$, $V = 50 \text{ м}^3$, $n = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ дает $p \approx 1,6 \cdot 10^{-15} \text{ кг/м}^3$ при предельно допустимой концентрации $3 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3$. Таким образом, даже более тонкий слой воды защищает надежно, если, конечно, $n \neq 0$, т.е. у нас помещение с каким-то, хоть плохоньким, но

воздухообменом, а не банка с глухой крышкой. Заметим, что без воды, при $L = 0$, концентрация $p \approx 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^3$, а это уже 10^4 предельной – недопустимая ситуация.

Ну и еще посмотрим, за какое время установится равновесие в системе вода-ртуть. Слой воды площадью S и толщиной L с концентрацией ртути на одной границе C , а на другой много меньшей содержит количество ртути $CSL/2$. Это количество поставляется в слой воды потоком NS за искомое время $t = CL/(2N)$. Подставляя выражения для C и N , приведенные выше, получаем $t = L^2/(2D)$. Эта формула позволяет быстро оценивать время диффузионных процессов. В данном случае $t \approx 14$ часов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Задача Произволова о сумме модулей

Е. БАКАЕВ

Разобьем числа от 1 до 10 на две группы по 5 чисел. Например, так:

6, 2, 3, 9, 7
1, 5, 4, 8, 10

Упорядочим числа в первой строке по возрастанию, во второй – по убыванию и выпишем разности чисел, стоящих в одном столбце:

2, 3, 6, 7, 9
10, 8, 5, 4, 1
разности – 8, 5, 1, 3, 8

Найдем сумму разностей: $8 + 5 + 1 + 3 + 8 = 25$.

Сделаем те же действия, но разобьем числа каким-нибудь другим способом (и снова упорядочим):

1, 5, 6, 8, 9
10, 7, 4, 3, 2
разности – 9, 2, 2, 5, 7

Снова найдем сумму разностей: $9 + 2 + 2 + 5 + 7 = 25$. Опять получилось 25, и это не

случайное совпадение – такой ответ будет получаться при любых разбиениях чисел на две группы.

Это утверждение (точнее, его обобщение для произвольного четного количества чисел) – задача Вячеслава Викторовича Произволова со Всесоюзной олимпиады школьников 1985 года. Мы разберем ее решение и попутно обсудим другие задачи, в том числе встречавшиеся на олимпиадах. Начнем с такой.

Задача 1 (А. Шаповалов, Всероссийская олимпиада, 1998). *На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик и так далее). Чему равна сумма 36 полученных чисел?*

Решение. Если порядок карт в колодах одинаковый, то между какой-то картой одной колоды и такой же картой другой колоды находится 35 карт, значит, сумма всех 36 чисел равна $35 \cdot 36 = 1260$. (Если карт в колодах не по 36, а по n , то аналогично получим ответ $(n-1)n$.) Докажем, что сумма будет такой при любом расположении карт.

Первый способ. Используем прием, который часто помогает, когда надо доказать, что

какое-то свойство выполняется для произвольной конфигурации. (В данном случае свойство – что сумма всегда равна 1260.) Докажем два утверждения:

1. Если поменять местами две любые карты одной колоды, то сумма не изменится.
2. Такими преобразованиями можно свести любую ситуацию к конкретному частному случаю – когда порядок карт в колодах одинаковый.

Тогда в любой конфигурации (т.е. при любом расположении карт в колодах) сумма будет такой же, как в частном случае, – и ее мы уже сосчитали.

Убедимся в верности утверждения 1. Пусть мы меняем местами карты *A* и *B* второй колоды (рис.1). Тогда из 36 сумм меняются

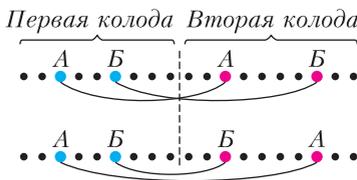


Рис. 1

только две – количества карт между картами *A* и между картами *B*. Несложно видеть, что сумма этих двух количеств не меняется.

Утверждение 2 также несложно доказать. Пронумеруем все карты колоды. Можно попарно менять карты местами так, чтобы карты шли в порядке возрастания. Сначала добьемся того, чтобы первая карта была на первом месте, затем последовательно – чтобы вторая на втором, третья – на третьем и т.д.

Итак, задача решена. В конце статьи мы приводим еще несколько задач, в которых помогает рассмотренный прием – элементарными перестановками сводим конфигурацию к частному случаю и показываем, что при этом некоторое свойство не меняется (является инвариантом). Отметим, что хоть мы и решили задачу, но нельзя сказать, что мы хорошо разобрались в устройстве этой конструкции.

Второй способ. Идея решения в следующем. Давайте при каждом подсчете количества карт между двумя одинаковыми картами обращать внимание на то, сколько из них лежит в первой колоде, а сколько – во второй.

Рассмотрим пример (рис.2). Обозначим одинаковые карты одинаковыми буквами. В

Г А Д В В В Г А Б Д

между А:	• • • • •	3 + 2
между В:	• • •	0 + 3
между В:	•	1 + 0
между Г:	• • • • •	4 + 1
между Д:	• • • • •	2 + 4

Рис. 2

примере получилось, что «синие части» (количества карт, лежащих в первой колоде) рассматриваемых сумм равны 0, 1, 2, 3, 4 и «красные части» (карты второй колоды) равны тем же числам. Так будет получаться и в других случаях: если карт в каждой колоде по *n*, от первой карты первой колоды до границы между колодами лежит *n* – 1 карт, от второй до этой границы *n* – 2 карты и т.д., от последней карты первой колоды до границы 0 карт. Таким образом, искомая сумма разбивается на две суммы чисел от 0 до *n* – 1. Поэтому ответ

$$(0 + 1 + \dots + (n - 1)) \cdot 2 = (n - 1)n.$$

Сформулируем теперь лемму, утверждение которой очень похоже на утверждение предыдущей задачи.

Лемма 1. *На прямой отмечено 2n точек, расстояние между соседними точками равно 1. Первые n точек пронумеровали числами от 1 до n в каком-то порядке. Последние n точек также пронумеровали числами от 1 до n в каком-то порядке. Точки с одинаковыми номерами соединили отрезками. Докажите, что сумма длин отрезков равна n².*

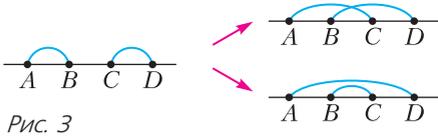
Доказательство этой леммы точно такое же, как решение предыдущей задачи. Ответ получается иным за счет того, что «расстояние» между двумя картами считалось как количество карт между ними, а расстояние между двумя точками на 1 больше количества точек между ними, поэтому и ответ получается на *n* больше.

Лемма 2. *На прямой отмечено 2n точек, расстояние между соседними точками равно 1. Точки разбили на n пар и в каждой паре две точки соединили отрезком. Тогда:*

- а) наибольшее возможное значение суммы их длин равно n^2 ;
- б) оно достигается только при таких разбиениях на пары, как в предыдущей задаче (т.е. когда в каждой паре точки находятся в разных половинах).

Доказательство леммы 2. Первый способ. Рассмотрим произвольную конфигурацию

(т.е. разбиение точек на пары) с наибольшей суммой; это можно сделать, потому что конфигураций конечное число. Заметим, что в такой конфигурации не может быть двух непересекающихся отрезков. Действительно, если отрезки AB и CD не пересекаются (рис.3), то если их заменить на отрезки AC



и BD или же на AD и BC , то сумма длин отрезков увеличится, чего произойти не может.

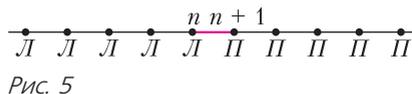
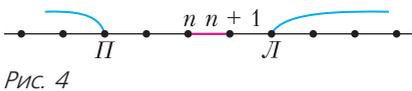
Таким образом, в конфигурации с наибольшей суммой любые два отрезка пересекаются. Покажем, что тогда все отрезки пересекаются. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 3. *На прямой дано несколько отрезков, любые два из которых пересекаются. Тогда все отрезки имеют общую точку.*

Это утверждение не такое очевидное, как может показаться, – в других ситуациях, похожих на эту, аналогичное утверждение бывает и неверным. Пример такой ситуации приведен в упражнении 2.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим *середину* – промежуток между точками с номерами n и $n + 1$ (точки по-прежнему пронумерованы по порядку числами от 1 до $2n$). Покажем, что она содержится во всех отрезках. Посмотрим, как расположены левые и правые концы отрезков. Если слева от середины не все концы являются левыми (рис.4), то слева есть правый конец какого-то отрезка, а справа есть левый конец какого-то отрезка. Тогда эти два отрезка не пересекаются. Значит, слева все концы левые, а справа все концы правые (рис.5).

Таким образом, все отрезки содержат середину, и лемма 3 доказана, а тем самым доказана и лемма 2.



Упражнения

1. Докажите, что если целиком слева от середины лежит k отрезков, то и целиком справа от середины лежит k отрезков.

2. На плоскости расположены прямоугольники так, что любые два прямоугольника имеют общую точку. а) Можно ли утверждать, что все прямоугольники имеют общую точку? б) А если добавить условие, что стороны прямоугольников параллельны осям координат?

Продолжение доказательства леммы 2.

Второй способ. Рассмотрим промежуток между первой и второй точками. Он входит только в один отрезок. Промежуток между второй и третьей точками входит не более чем в два отрезка, потому что слева от него только две точки. И так далее: рассмотрим промежуток между точками с номерами k и $k + 1$ (рис.6). Он входит не более чем в k отрезков, потому что только те точки, которые слева от него, могут быть левыми концами отрезков, содержащих этот промежуток.

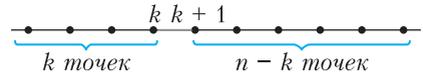


Рис. 6

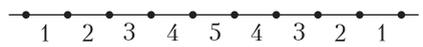


Рис. 7

Аналогично, рассматривая правые концы, можно сказать, что этот промежуток входит не более чем в $n - k$ отрезков. (Для примера на рисунке 7 написано, в какое наибольшее количество отрезков может входить каждый промежуток при $n = 5$.)

Суммируя оценки того, сколько раз может быть посчитан каждый из этих единичных отрезков, получим $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = n^2$.

Упражнение 3. Завершите доказательство, показав, что все складываемые здесь неравенства обращаются в равенства ровно в тех случаях, когда все отрезки содержат середину.

Третий способ. Пусть номера (координаты) концов i -го отрезка – это a_i и b_i , где $a_i > b_i$. Тогда его длина равна разности $a_i - b_i$. Сложим все длины отрезков: $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \dots + a_n - b_n$. В этой сумме присутствуют все числа $1, 2, \dots, 2n$ по одному разу, половина со знаком плюс, половина со знаком минус. Чтобы сумма была наибольшей, понятно, что с плюсом надо взять наиболь-

шие числа, а с минусом наименьшие! Таким образом, мы понимаем, что левыми концами должны быть n левых точек, а правыми концами – n правых точек.

В конце статьи приведены еще несколько задач про модули разностей и суммы расстояний на прямой, решить которые помогают схожие соображения.

* * *

Заметим, что лемму 2 можно обобщить следующим образом.

Лемма 4. *На прямой отмечено $2n$ точек (расстояние между соседними точками может быть различным!). Точки разбили на n пар и в каждой паре две точки соединили отрезком. Тогда наибольшее возможное значение суммы их длин достигается тогда и только тогда, когда все отрезки пересекают середину (промежуток между двумя средними по порядку точками).*

Убедитесь, что все те же три доказательства леммы 2 работают и для леммы 4!

Упражнение 4. Сколькими способами можно провести эти n отрезков так, чтобы все они пересекали середину?

Следующую задачу мы оставим для самостоятельного решения.

Задача 2 (И.Измestьев, Всероссийская олимпиада, 1996). *На прямой отмечены 1996 точек.¹ Петя раскрашивает половину из них в красный цвет, а остальные – в синий. Затем Вася разбивает их на пары красная–синяя так, чтобы сумма расстояний между точками в парах была максимальной. Докажите, что этот максимум не зависит от того, какую раскраску сделал Петя.*

* * *

Обсудим теперь задачу, где помогает доказанная нами лемма 2.

Задача 3 (А.Грибалко, Турнир математических боев имени А.П.Савина, 2018). *Ладья обошла все клетки шахматной доски по одному разу, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, и вернулась на исходную клетку. Какой наибольший по длине*

¹ На самой олимпиаде в условии задачи было добавлено, что точки отмечены через равные промежутки.

путь она могла при этом пройти? (Мы считаем, что если ладья делает ход, например, с поля a2 на поле a5, то она при этом не посещает клетки a3 и a4. Длиной такого прыжка считаем расстояние между центрами полей, в данном примере оно равно 3.)

Решение. Рассмотрим произвольный ряд (строчку или столбец). Прыжков, начало и конец которых лежат в этом ряду, было ровно четыре (рис.8). Таким образом, клет-

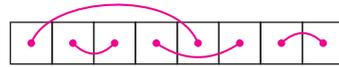


Рис. 8

ки этого ряда разбиваются на пары, между которыми проводился прыжок. По лемме 2, сумма длин таких прыжков не превышает $4^2 = 16$. Всего рядов 16 (8 строк и 8 столбцов), длина прыжков в каждом из них не больше 16, значит, суммарная длина прыжков не больше $16 \cdot 16 = 256$.

Осталось привести пример. В таком примере в каждом ряду должна достигаться максимальная сумма длин, а для этого каждый прыжок должен проходить через середину соответствующего ряда, т.е. через одну из средних линий доски (рис.9). Это сообра-

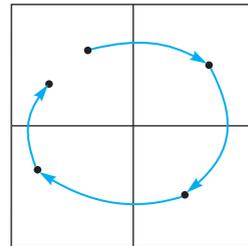


Рис. 9

жение помогает догадаться, как придумать пример. В каждую клетку записываем ее номер в порядке обхода доски ладьей. Можно сначала заполнить строки 1 и 5 (рис.10), после чего аналогичным образом заполняют-

1	5	9	13	2	6	10	14
16	4	8	12	3	7	11	15

Рис. 10

ся строки 2 и 6, потом 3 и 7, потом 4 и 8, и в итоге ладья возвращается на клетку, с которой начинала.

Наконец мы готовы решить задачу, о которой шла речь в самом начале.

Задача 4 (В.Произволов, Всесоюзная олимпиада школьников, 1985). *Первые $2n$ натуральных чисел разбиты на два множества по n чисел в каждом. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ – числа первого множества, расположенные в порядке возрастания, а $b_1 > b_2 > \dots > b_n$ – числа второго множества, расположенные в порядке убывания. Докажите равенство*

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = n^2.$$

Решение. Модуль разности $(a_i - b_i)$ – это длина отрезка между точками с координатами a_i и b_i . Рассмотрим точки с координатами $1, 2, \dots, 2n$ на прямой. Тогда, по лемме 2, равенство достигается тогда и только тогда, когда все такие отрезки пересекают середину. Иными словами, осталось доказать, что для каждого i точки с координатами a_i и b_i лежат по разные стороны от середины.

Посмотрим, как расположены точки типов a и b относительно середины. Если слева от середины находится k точек типа a , то слева от середины находится $n - k$ точек типа b , значит, справа от середины – оставшиеся k точек типа b . Таким образом, сколько точек типа a слева от середины, столько и точек типа b справа от середины! Тогда при $i \leq k$ точка a_i находится слева от середины, а b_i – справа; при $i > k$ – наоборот.

Задача решена.

Напоследок приведем одну сложную задачу В.Произволова про сумму модулей.

Задача 5. *Произвольные $t + k$ различных чисел разбили на две группы из t и k чисел и в каждой группе расположили их в порядке возрастания:*

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m, \quad b_1 < b_2 < \dots < b_k.$$

Затем те же $t + k$ чисел снова разбили на две группы из t и k чисел и в каждой группе опять расположили в порядке возрастания:

$$c_1 < c_2 < \dots < c_m, \quad d_1 < d_2 < \dots < d_k.$$

Докажите равенство

$$\begin{aligned} |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + \dots + |a_m - c_m| = \\ = |b_1 - d_1| + |b_2 - d_2| + \dots + |b_k - d_k|. \end{aligned}$$

Решение этой задачи, а также много других интересных задач можно найти в книге В.В.Произволова «Задачи на вырост». Очень рекомендуем ее к изучению. Скачать книгу можно в интернете:

<https://math.ru/lib/501> (издание 1995 года) и https://www.mathedu.ru/text/produvolov_zadachi_na_vyrost_2003/ (издание 2003 года).



В заключение предлагаем еще несколько задач для самостоятельного решения.

Сведение к частному случаю

Вот небольшая подборка задач, которые удобно решать способом, разобранным в первом решении задачи 1: сведением к частному случаю элементарными преобразованиями.

6. В ряд стоят t мальчиков и d девочек в каком-то порядке. Каждого ребенка спросили, сколько слева от него стоит детей другого пола. Чему равна сумма чисел, названных детьми?

Указание. Докажите два утверждения:

1. Если поменять местами мальчика и девочку, то сумма чисел не изменится.
2. Такими действиями можно привести ситуацию к простому частному случаю: когда сначала

стоят только девочки, а потом только мальчики. Для него посчитать сумму нетрудно.

7 (Г.Гальперин). В каждой вершине куба стоит число $+1$ или -1 . В центре каждой грани куба поставлено число, равное произведению чисел в вершинах этой грани. Может ли сумма получившихся 14 чисел оказаться равной 0?

Указание. Посмотрите, как изменится сумма, если поменять знак числа в вершине.

8 (Е.Бакаев, Турнир городов, 2013). Двадцать детей – десять мальчиков и десять девочек – встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка – сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.

9 (Е.Бакаев, Турнир городов, 2014). На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убрали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

10 (В.Произволов, М1181). На шахматной доске расставлены 8 ладей так, что они не бьют друг друга. Докажите, что на черных полях расположено четное число ладей.

Задачи про модули разностей и суммы расстояний на прямой

11. Вдоль прямой дороги стоят семь домов (не обязательно на равном расстоянии друг от друга). Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей?

(Решение этой задачи и еще много задач школьного типа на эту тему можно найти в статье А.Блинкова «Расстояния на прямой и не только» в «Кванте» №3 за 2012 год.)

12 (В.Произволов). Имеется 19 гирек массой 1 г, 2 г, 3 г, ..., 19 г. Девять из них – железные, девять – бронзовые и одна – золотая. Известно, что общая масса всех железных гирек на 90 г больше, чем общая масса бронзовых. Найдите массу золотой гирьки.

13. У Леша были записаны в тетрадь числа от 1 до 10. Леша решил зачеркивать числа по два, записывая вместо них разность (возможно, отрицательную) до тех пор, пока у него не останется

одно число – Результат. На какой наибольший Результат может рассчитывать Леша?

14 (В.Произволов). По кругу расставлены 10 железных гирек. Между каждыми соседними гирьками находится бронзовый шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек. Докажите, что шарики можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы уравновесились.

15 (В.Произволов). Скупая в отсутствие покупателя, продавец расположил набор из ста гирек массами 1, 2, 3, ..., 100 граммов в произвольном порядке: m_1, m_2, \dots, m_{100} . Покупатель заявил, что гирьки массами $|m_1 - 1|, |m_2 - 2|, \dots, |m_{100} - 100|$ можно расположить на двух чашах весов так, что они окажутся в равновесии. Он сумел это доказать, не прибегая к взвешиваниям. Докажите и вы.

16 (А.Шень, Турнир городов, 1995). Кресла для зрителей вдоль лыжной трассы занумерованы по порядку: 1, 2, 3, ..., 1000. Кассирша продала n билетов на все первые 100 мест, но n больше 100, так что на некоторые места она продала больше одного билета (при этом $n < 1000$). Зрители входят на трассу по одному. Каждый, подойдя к своему месту, занимает его, если оно свободно, если же занято, говорит «Ох!», идет в сторону роста номеров до первого свободного места и занимает его. Каждый раз, обнаружив очередное место занятым, он говорит «Ох!». Докажите, что все рассядутся и что число «охов» не зависит от того, в каком порядке зрители выходят на трассу.

Задача 17. Клетки шахматной доски произвольным образом пронумерованы числами от 1 до 64. На доске стоит 63 коня, номер каждого совпадает с номером клетки, на которой он стоит; клетка номер 64 пуста. Этими конями сделали несколько ходов, после чего клетка 64 вновь оказалась пустой. Обозначим через n_k номер клетки, на которой оказался конь под номером k . Докажите, что наибольшее возможное значение выражения $\sum_{k=1}^{63} |n_k - k|$ равно 1984.

Эта задача, задуманная как предложение от Румынии на олимпиаду IMO–1984, взята из книги «Mathematical miniatures» (Т.Andreescu, S.Savchev, 2003, глава которой «The “Arbitrary” Proizvolov» также посвящена задаче 4.)

Падение магнита в алюминиевой трубке

А.КНЯЗЕВ, А.КНЯЗЕВ (мл.)

ДЕМОНСТРАЦИЯ ПАДЕНИЯ МАГНИТНОГО столбика сквозь толстостенную медную или алюминиевую трубку очень проста, но всегда с восторгом и удивлением воспринимается зрителями. Вначале через такую вертикально расположенную трубку длиной около 1 м и внутренним диаметром 18 мм бросается без начальной скорости кусочек мела или металлический цилиндр. Очевидно, их движение занимает доли секунды. А после этого бросаем в ту же трубку магнитный столбик с длиной и диаметром 15 мм, т.е. примерно равными диаметру трубки. При толщине стенок трубы около 3–4 мм магнитик буквально зависает внутри трубы – движется (без перекоса!) очень медленно, слышен лишь легкий шорох его плавного движения. В нашей демонстрации время падения составляло более шести секунд! В другой демонстрации показывалось замедленное скольжение плоского неодимового магнита по наклонному желобу толстостенного дюралюминиевого уголка.

Физика этого явления довольно ясная, и можно привести наглядные примеры, где этот эффект применяется. Например, в школьных демонстрационных электроизмерительных приборах он используется в конструкции успокоителя стрелки. На конце, противоположном стрелке, укреплена медная пластинка (или плоская медная катушка), которая качается вблизи постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникает динамическое электрическое поле и вследствие этого появляются электрические токи (токи Фуко). Взаимодействие этих токов с магнитным полем и тормозит пластинку. Другой, даже более близкий нынешним учащимся пример: магнитный тормоз в винчестере компьютера.

Эффект торможения падающего магнитного столбика хорошо понятен школьникам и описывается в ряде простых задач. Однако никогда не оценивается численно на практических примерах. В данной статье мы показываем, как можно производить численные оценки, когда известных величин немного и добывать необходимые данные приходится самостоятельно.¹ Для удобства расчетов будем использовать пример с падением маг-

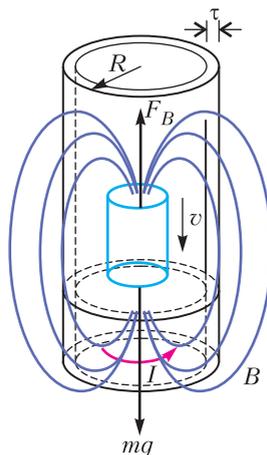


Рис. 1

нита в круглой трубке (рис.1). Движущийся магнит наводит в теле трубки кольцевые индукционные токи. Ток элементарного кольца взаимодействует с магнитом и тормозит его. При этом в момент достижения постоянной скорости сила тяжести магнита уравновешивается магнитной силой.

Сложность численной оценки результатов эксперимента состоит в том, как описать магнитное поле столбика постоянного магнита и как оценить величину наводимых токов. Ясно, что при инженерном конструировании необходимо использовать достаточно сложные формулы, в которых не обойтись без разбиения пространства, занятого проводником и трубкой, на бесконечно малые элементы и дальнейшего интегрирования по ним. Этому учат в университетах и технических вузах. Однако в сложных случаях физики обычно, прежде чем делать расчеты,

¹ Работа поставлена в Лицей №15 города Саратова учащейся 11 класса У.Маховой. Экспериментальное определение параметров магнита проведено в Физико-техническом лицее №1 города Саратова.

набрасывают их эскиз – приблизительно, но с неплохой точностью получают предварительные результаты, исходя из очень простых соображений. Эти эскизы называются оценками. Физические оценки основаны на понимании сути происходящих процессов, на выделении главных моментов явления. Пожалуй, эти знания прежде всего и необходимы школьникам.

В современной школе иногда решают задачи на расчет электрических полей зарядов и на расчет магнитного поля токов определенной конфигурации (кольцевой ток, ток прямолинейного провода или соленоида), однако совсем нет задач о том, как рассчитывать поля постоянных магнитов. Здесь мы поступим иначе – получим некоторые данные из известной литературы, а остальное необходимое определим экспериментально.

Так, в статьях А.Стасенко из журнала «Квант»² говорится следующее: «...можно попытаться выяснить и характер зависимости силы ... от расстояния. Прежде всего, поймем, как изменяется индукция магнитного поля с удалением от магнита. Будь это точечный электрический заряд, напряженность поля падала бы с квадратом расстояния. Но магнитных зарядов одного знака пока что никто не видел, магнит скорее похож на диполь – два заряда, смещенных относительно друг друга... Можно показать, что оно [электрическое поле] обратно пропорционально кубу расстояния. По аналогии для магнитного поля можно записать $B \sim \frac{1}{R^3} \dots$ »

И в самом деле, подобную формулу для электрического диполя получить совсем нетрудно. При условии, что расстояние между диполями меньше, чем расстояние данной точки от диполя, действительно получим обратную кубическую зависимость. При сравнимых расстояниях формула математически имеет более сложный вид, однако для численной оценки эффекта по порядку величины этого вполне достаточно.

Итак, запишем необходимую зависимость в виде $B \sim \frac{1}{R^3}$, где коэффициент A для

² Это статьи «Любовь и ненависть в мире молекул» («Квант», 1994, №2) и «Как при помощи магнитного поля не дать себя в обиду» («Квант», 1994, №3).



Рис. 2

нашего магнита подлежит экспериментальному определению. Для его измерения мы воспользовались простой установкой, ее фотография представлена на рисунке 2, а схема приведена на рисунке 3. Установка состоит из аккумулятора (6 В), амперметра и реостата (12 Ом), которые подключены к

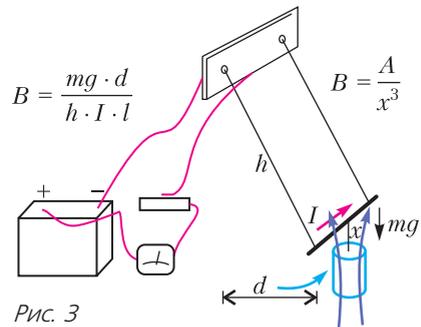


Рис. 3

повешенному с помощью штатива на тонких проволочках ($h = 500$ мм) к отрезку медной проволоки ($l = 14$ мм, $m = 2,7$ г). Кратковременно включая постоянный ток через проволоку, мы подносим снизу магнит на расстояние x от 1 до 8 мм (в разных опытах) и сопровождаем его за отклоняющейся проволокой до уравнивания в отклоненном положении, координату отклонения которой обозначим d . В результате проведения эксперимента мы получили следующие значения для модуля индукции магнитного поля: $B = 0,2$ Тл на расстоянии $x = 12$ мм от оси цилиндрического магнита и для коэффициента: $A = 34 \cdot 10^{-8}$ Тл · м³.

Для дальнейших расчетов мы воспользовались стандартными формулами, употребляемыми в подобных задачах. Здесь величина магнитной индукции B есть средняя величина продольной составляющей поля магнита в области, охватываемой проводником. Для нашей геометрии считаем ее примерно равной величине поперечной составляющей. Приведем алгоритм наших расчетов:

• ЭДС индукции \mathcal{E} , наводимая в кольцевом участке трубки, равна

$$\mathcal{E} = -\Phi' = B'(x) \cdot \pi a^2 = -\frac{3A}{x^4} \cdot v \cdot \pi a^2,$$

где a – средний радиус кольцевого участка трубы.

• Ток в кольцевом элементе равен $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$,

где $r = \rho \cdot \frac{2\pi a}{\Delta l \cdot \tau}$ – сопротивление кольцевого участка трубы, ρ – удельное электрическое сопротивление материала трубки, τ – толщина трубы, Δl – эффективная длина кольцевого участка трубы (в котором возникает основная часть индукционного тока), расположенная в области сильного поля вблизи торцевой части магнита.

• Магнитное поле диполя равно $B = \frac{A}{R^3}$.

• Сила, действующая на элемент тока со стороны магнита, равна $F = 2IB \cdot 2\pi a$. Здесь учтено, что одинаковая магнитная сила дей-

ствует на верхнем и на нижнем концах цилиндра.

• Условие равномерного движения имеет вид $mg = F$.

Отсюда искомую установившуюся скорость можно оценить так:

$$v^* = \frac{mg(\rho \cdot 2\pi R)}{2\pi^2 B^2 R^2 s} = \frac{m g \rho \cdot 2\pi R^5}{2\pi^2 A^2 s} \sim C \frac{m g \rho R^4}{\tau},$$

где s – сечение области протекания тока, τ – толщина трубки, C – общий геометрический коэффициент пропорциональности, полученный при оценке. В этот коэффициент вошли такие величины, как геометрический размер области с главным кольцевым током (вносящий основной вклад в тормозящую силу), его высота, а также радиус площадки, пронизываемой магнитным потоком. Для численной оценки мы их приняли примерно равными по порядку величин, в противном случае вид формулы стал бы неоправданно громоздким для анализа результата численной оценки. Небольшие различия в численных значениях величин x , Δl , a , d мало будут сказываться на результате, если эти величины имеют численные значения порядка размера магнита d , что вполне соответствует условиям нашего эксперимента.

Примерно по такому же алгоритму можно оценить и эксперимент со скольжением магнита по плоскости, однако выделение геометрического размера главного тока и оценка магнитного поля станут неоправданно сложнее.

В результате мы составили модель явления падения магнитного цилиндра в толстостенной немагнитной (алюминиевой) трубке. Полученная модель позволила оценить скорость падения, которая с удовлетворительной точностью подтвердилась в эксперименте. Видно, что установившаяся скорость действительно пропорциональна массе магнита, обратно пропорциональна толщине трубы и очень сильно зависит от близости магнита к поверхности трубы.

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

Физика

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» проводится ИД «Московский Комсомолец» и Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова начиная с 2005 года. Она ориентирована на



поиск талантливых школьников во всех регионах России. В 2019/20 учебном году олимпиада по физике проводилась для двух категорий школьников: «младшие» (7, 8 и 9 классы) и «старшие» (10 и 11 классы). Отборочный этап олимпиады проходил дистанционно: каждому участнику после получения заданий давалась неделя (168 часов) на выполнение задания. Из-за карантинных ограничений, финальный этап проводился и в очной, и в дистанционной форме, на образовательной платформе МГУ.

Наиболее сложные и интересные задачи присутствуют в творческой части отборочного этапа. У некоторых из них не бывает «единственно правильного» решения, так как участник может использовать различные модели рассматриваемых явлений, а оценка его решения зависит и от адекватности и уровня точности используемой модели и от корректности решения в рамках выбранной модели (как в задаче «Квинтэссенция»). Часто задачи носят «псевдоэкспериментальный» характер (задача «Переправа»). По традиции, одна из задач тематически связана с Нобелевской премией теку-

щего года по физике (задача «Квинтэссенция»).

Ниже приводятся задания обоих этапов олимпиады для «старших» школьников.

Отборочный этап

Задание отборочного этапа состояло из тестовой части I (проверялись только ответы) и творческой части II (проверялись решения).

Часть I (тестовое задание)

1 (7 баллов). Два небольших по размерам груза с массами 3,6 кг и 3,4 кг соединены легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок. Сначала грузы удерживают так, что нити натянуты, их части, не лежащие на блоке, вертикальны, а грузы находятся на одной горизонтали. Затем систему приводят в движение, отправляя более легкий груз вниз со скоростью 28 см/с. Грузы движутся только вертикально, нить по блоку не скользит, блок вращается без трения. Найдите величину перемещения более тяжелого груза за 2 с после начала движения. Ответ запишите в см, с точностью до целого, без единиц измерения. Ускорение свободного падения считать равным $9,8 \text{ м/с}^2$, сопротивление воздуха не учитывать.

2 (8 баллов). Рабочим телом тепловой машины является постоянное количество одноатомного идеального газа. Его цикл состоит из изобары, адиабаты и изотермы. При изобарном расширении газ совершает работу 400 Дж, а в процессе изотермического сжатия над газом совершают работу 630 Дж. Чему равен КПД цикла? Ответ запишите в процентах, с точностью до целого значения, без указания единиц.

3 (10 баллов). В схеме, показанной на рисунке 1, ключ K длительное время был разомкнут. Какое количество теплоты вы-

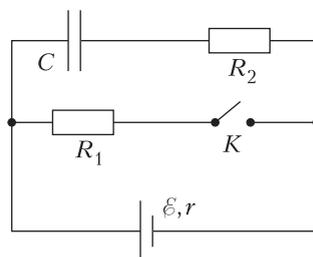


Рис. 1

делится в резисторе сопротивлением R_2 после замыкания ключа? Известно, что $\xi = 20$ В, $C = 1$ мкФ, а $R_1/r = 4$. Ответ запишите в мкДж, с точностью до целого значения, без указания единиц. Считать, что сопротивление R_2 намного больше всех остальных сопротивлений в этой схеме.

Часть II (творческое задание)

Тайные разработки Криstopаля Хозевича Хунты

1. Квинтэссенция

Еще в средние века, используя невероятные для того времени методы, Криstopаль Хозевич установил, что наша Вселенная расширяется. Это увлекло его, и он несколько столетий следил за расширением Вселенной. К середине XIX века он сделал вероятное открытие: расширение Вселенной не тормозится, а ускоряется! Для объяснения этого факта Криstopаль Хозевич разработал собственную модель устройства Вселенной – модель КХХ. В его модели наряду с обычным веществом, которое подчиняется закону всемирного тяготения Ньютона, существует еще один, весьма необычный вид материи, которому он дал, следуя Аристотелю, название «квинтэссенция». Квинтэссенция, смешиваясь с обычным веществом, дает *отрицательный* вклад в его гравитационную массу, но при этом создает еще и давление, «расталкивающее» частицы обычного вещества. Давление квинтэссенции в модели КХХ равно объемной плотности ее внутренней энергии и определяется ее плотностью массы: $p_q = A \cdot (-\rho_q)^{5/3}$, где $A = \text{const}$. Отметим, что $\rho_q = \frac{M_q}{V_q} < 0$, причем M_q – это и есть отрицательный вклад квинтэссенции в массу Вселенной. Полные массы обычного вещества $M_s > 0$ и квинтэссенции $M_q < 0$, а также полная энергия Вселенной E остаются неизменными, причем $M_s + M_q > 0$. Кроме того, в этой модели считается, что в любой момент времени Вселенная – это шар переменного радиуса $R(t)$, заполненный однородно распределенными по объему обычным веществом и квинтэссенцией. Пользуясь моделью КХХ, ответьте на следующие вопросы:

1) В каких пределах может изменяться радиус Вселенной при заданных M_s , M_q , E и A ?

2) Может ли Вселенная КХХ быть статичной (т.е. иметь постоянный радиус)?

3) Пусть полная энергия Вселенной $E = 0$ и расширение Вселенной начинается с нулевой скоростью от минимального возможного радиуса. Далее в любой момент времени распределение скоростей обычного вещества подчиняется закону Хаббла: скорость на расстоянии $r \leq R$ от центра Вселенной равна $v(r, t) = \frac{r}{R(t)} v(R, t)$. Квинтэссенция не дает вклада в кинетическую энергию Вселенной (убыль ее энергии при расширении переходит в кинетическую энергию обычного вещества). В течение какого времени после старта Вселенная будет расширяться с положительным ускорением?

При получении ответов вы должны (как это делал и автор модели в XIX веке) использовать для описания движения Вселенной законы ньютоновской механики, а не более современных теорий.

Указание. Энергия электростатического взаимодействия зарядов однородного шара с радиусом R и полным зарядом Q равна $W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$.

2. Золотой астероид

Один из самых масштабных экспериментов доктора самых неожиданных наук К.Х.Хунты – запуск на орбиту вокруг Солнца искусственного астероида, имеющего форму правильного тетраэдра с ребром длиной в несколько километров и изготовленного из практически чистого золота с плотностью $19,3$ г/см³. К одной из вершин тетраэдра прикрепили легким коротким тросом маленький передатчик (рис.2). Вращение астероида вокруг оси, проходящей через его

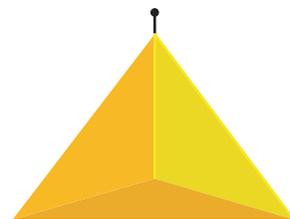


Рис. 2

центр масс, было подобрано так, что величина силы натяжения троса оказалась в 7 раз меньше величины силы притяжения передатчика к астероиду, а сам передатчик оставался неподвижным относительно астероида на линии, проходящей через ближайшую к нему вершину и центр масс астероида. Деформациями троса можно пренебречь. Радиус орбиты золотого астероида в несколько раз превышал радиус орбиты Земли. Найдите период вращения этого астероида в системе «неподвижных звезд».

В решении вам могут пригодиться некоторые сведения: объем тетраэдра равен $V = \frac{L^3}{6\sqrt{2}}$, где L – длина его ребра; высота тетраэдра $H = \sqrt{\frac{2}{3}}L$; радиус описанной вокруг тетраэдра сферы $R = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}L$; величина телесного угла измеряется отношением площади части сферы с центром в вершине угла, вырезаемой этим телесным углом, к квадрату радиуса этой сферы, поэтому телесный угол, под которым видна плоская фигура очень малой площади ΔS из точки, направление на которую составляет угол α с нормалью (перпендикуляром) к поверхности, равен $\Delta\Omega = \frac{\Delta S \cos \alpha}{r^2}$, где r – расстояние от фигуры до этой точки; телесный угол при вершине тетраэдра $\Omega = \arccos \frac{23}{27} \approx 0,551$ стерадиан.

3. Светлая полоса

В кабинете Кристобая Хозевича в НИИЧАВО стоял стол с оригинальной окантовкой: над краем стола возвышался бортик, в который была вставлена четверть стеклянного цилиндра, и при освещении стола сбоку вдоль края на поверхности стола появлялась светлая полоса. Найдите ширину этой полосы при освещении бортика пучком лучей, параллельных поверхности стола (рис.3). Известно, что радиус цилиндрической поверхности $R = 3,9$ см, а показатель преломления стекла, из которого изготовлена вставка, $n = 2,4$.

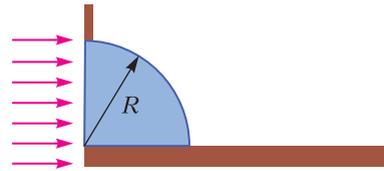


Рис. 3

4. Переправа

Однажды, еще в бытность Великим Инквизитором, Кристобал Хунта соорудил «пускую установку», которая с заданной скоростью запускала плот массой $m = 100$ кг в прямолинейный канал с довольно быстрым течением (скорость воды в канале была практически постоянна и равна $u = 5$ м/с) в направлении, перпендикулярном берегу. Далее плот плыл по инерции и при достаточной скорости запуска достигал другого берега. Ширина канала составляла $D = 10$ м. При каждом запуске фиксировались величина начальной скорости, время достижения противоположного берега и величина сноса плота вдоль течения за время переправы. Все собранные данные отражены в таблице.

Таблица

v_0 , м/с $\pm 0,05$ м/с	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
T , с $\pm 0,01$ с	5,49	3,46	2,55	2,03	1,69	1,45
L , м $\pm 0,01$ м	10,80	4,83	2,77	1,81	1,27	0,95

Кристобал Хозевич решил проверить, с какой точностью выполняется предположение, что сила сопротивления воды, действующая на плот, прямо пропорциональна скорости плота относительно воды: $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$. Выясните это и вы. Для этого получите соотношение между измеренными величинами, следующее из этого предположения, и проверьте его выполнение. Кроме того, найдите величину коэффициента пропорциональности α и в рамках этого предположения определите максимальную величину стартовой скорости плота, при которой плот не достигает противоположного берега.

Заключительный этап

Избранные задачи из разных разделов физики

1 (механика). Маленький массивный шарик прикреплен двумя одинаковыми легкими жесткими стержнями к шарнирам на

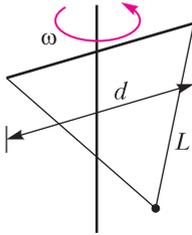


Рис. 4

концах горизонтальной штанги длиной $d = 24$ см, симметрично закрепленной на вертикальной оси (рис.4). Ось вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 7 \text{ с}^{-1}$, длина каждого из стержней $L = 37$ см. При этом сила натяжения каждого стержня равна $T_1 = 49$ Н. Какой станет сила натяжения, если уменьшить скорость вращения до величин $\omega_2 = 6 \text{ с}^{-1}$ или $\omega_3 = 5 \text{ с}^{-1}$? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения в задаче принять равным $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

2 (молекулярная физика). Рабочее тело тепловой машины – постоянное количество гелия. На диаграмме в координатах «внутренняя энергия – количество теплоты, с которым гелий обменялся с окружающими телами» показан один цикл рабочего тела (рис.5). Здесь E_0 – некоторая энергия, а

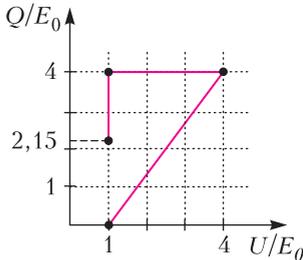


Рис. 5

конечное значение $\frac{Q_k}{E_0} = \frac{4}{3}(3 - \ln 4) \approx 2,15$.

Найдите КПД цикла. Во сколько раз максимальное давление в цикле больше минимального? Уравнение адиабаты для одноатомного идеального газа: $pV^{5/3} = \text{const}$.

3 (электричество и магнетизм). В схеме, изображенной на рисунке 6, ключ долгое

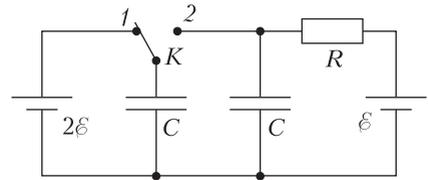


Рис. 6

время находился в положении 1. Какое количество теплоты выделится в резисторе после перевода ключа в положение 2? Известно, что $\xi = 12$ В, $C = 10$ мкФ, внутренние сопротивления аккумуляторов одинаковы и в $n = 3$ раза меньше сопротивления резистора. Сопротивление проводов, а также индуктивность контура с конденсаторами пренебрежимо малы.

4 (оптика). На основание прозрачной равнобедренной призмы падает нормально узкий пучок параллельных световых лучей (рис.7). Угол при основании призмы $\alpha = 65^\circ$,

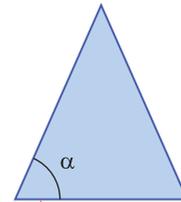


Рис. 7

показатель преломления ее материала $n = 2$. Под каким углом к первоначальному направлению выйдут из призмы два наиболее ярких пучка? Учтите, что при нормальном падении изнутри на любую грань призмы наблюдается и прошедший, и отраженный лучи.

5 (оптика). На экране с помощью тонкой линзы получено резкое изображение небольшого предмета с поперечным увеличением $|\Gamma_1| = 2$. Предмет передвинули на $s = 3$ см, не сдвигая линзу. Для того чтобы вновь получить резкое изображение, пришлось передвинуть экран. При этом поперечное увеличение оказалось равным $|\Gamma_2| = 5$. На какое расстояние s' пришлось передвинуть экран?

Публикацию подготовил К.Парфенов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №10 за 2020 г.)

5. Да.

Выберем 6 простых чисел, например 2, 3, 5, 7, 11 и 13. Все степени каждого из них покрасим в свой цвет: 2, 4, 8, 16, ... будут первого цвета; 3, 9, 27, ... – второго; ...; 13, 169, ... – шестого. Остальные числа покрасим в 7-й цвет. Проверьте, что такая раскраска подходит.

6. Да.

Второй может действовать так: он разбивает всю плоскость на двухклеточные доминошки и на каждый ход первого в какую-то доминошку ставит нолик в ту же доминошку. Любой пятиклеточный крест обязательно накрывает какую-то доминошку целиком, так что его не удастся весь заполнить крестиками.

7. $(n+1) \cdot 2^{n-2}$.

Первое решение. Докажем, что после каждого шага числа будут образовывать арифметическую прогрессию. Предположим, что если на очередном шаге все числа образуют арифметическую прогрессию, то и на следующем шаге это свойство сохраняется (таким образом, мы проводим доказательство по индукции). Если 3 подряд идущих числа являются фрагментом арифметической прогрессии с разностью x , то их можно записать в виде $a-x$, a , $a+x$. Тогда на следующем шаге между ними будут написаны числа $2a-x$, $2a+x$, значит, получится арифметическая прогрессия с разностью $2x$.

Теперь докажем по индукции, что сумма двух крайних чисел с каждым шагом увеличивается в 2 раза. Пусть на каком-то шаге первые два числа это a и $a+x$, а последние два это $b-x$ и b . Тогда сумма крайних равна $a+b$. На следующем шаге сумма крайних чисел будет $(2a+x) + (2b-x) = 2(a+b)$. Итак, с каждым шагом сумма двух крайних чисел увеличивается в 2 раза. Сначала она равна $(n+1)$, а через $n-1$ шаг, когда останется одно число S , сумма двух крайних (т.е. $2S$) удвоится $(n-1)$ раз и станет равна $(n+1) \cdot 2^{n-1}$. Значит, искомое число S равно $(n+1) \cdot 2^{n-2}$.

Второе решение. Расположим данные числа на диагонали квадрата $n \times n$. На следующем шаге заполним соседнюю диагональ, потом следующую и т.д. Пример заполнения таблицы для $n=6$ показан на рисунке 1.

Посмотрим, какой вклад дает каждое из начальных чисел в итоговое (искомое) число. Для примера заполним такую же таблицу, но для на-

					6
				5	11
			4	9	20
		3	7	16	36
	2	5	12	28	64
1	3	8	20	48	112

Рис. 1

бора, в котором одно число равно a (в зеленой клетке), а остальные – нули (рис.2). В примере исходное число a оказалось учтено в итоговой сумме (записанной в красной клетке) 10 раз. Число 10 возникло как

					0
				0	0
			0	0	0
		a	a	a	a
	0	a	$2a$	$3a$	$4a$
0	0	a	$3a$	$6a$	$10a$

Рис. 2

количество путей между зеленой и красной клетками – это «пути, по которым число a дает вклад в сумму». Все такие пути состоят из 5 шагов, из которых 2 должны быть сделаны вниз и 3 вправо.

Следовательно, количество таких путей

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Поэтому для нахождения искомой суммы требуется сложить все исходные числа, умножив каждое из них на количество путей от него до правого нижнего угла, – для числа k это количество путей равняется C_{n-1}^{k-1} . Значит, искомая сумма равна

$$1 \cdot C_{n-1}^0 + 2 \cdot C_{n-1}^1 + 3 \cdot C_{n-1}^2 + \dots + n \cdot C_{n-1}^{n-1}.$$

Упростим ее. Прибавим к искомой сумме ее же, но с коэффициентами, замененными по правилу $C_{n-1}^i = C_{n-1}^{n-1-i}$:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot C_{n-1}^0 + 2 \cdot C_{n-1}^1 + 3 \cdot C_{n-1}^2 + \dots + n \cdot C_{n-1}^{n-1} + \\ & + 1 \cdot C_{n-1}^{n-1} + 2 \cdot C_{n-1}^{n-2} + 3 \cdot C_{n-1}^{n-3} + \dots + n \cdot C_{n-1}^0 = \\ & = (n+1) \cdot C_{n-1}^0 + (n+1) \cdot C_{n-1}^1 + (n+1) \cdot C_{n-1}^2 + \dots \\ & \dots + (n+1) \cdot C_{n-1}^{n-1} = (n+1) \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Поскольку это удвоенная искомая сумма, то сама искомая сумма равна $(n+1) \cdot 2^{n-2}$.

8. а), б) Да, существует.

а) Рассмотрим правильную треугольную пирамиду $SABC$. В ее основании расположен правильный треугольник ABC , а боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Понятно, что можно выбрать точку S достаточно близко к грани, чтобы угол ASB был тупым (если поместить точку S в центр грани ABC , то угол ASB будет равен 120° , поэтому если поместить ее достаточно близко к центру грани, то угол будет достаточно близок к 120°).

Теперь возьмем еще одну такую же пирамиду и соединим их по граням, являющимся равнобедренными треугольниками. Получим искомый шестигранник.

б) Введем декартовы координаты и рассмотрим две перпендикулярные плоскости: Oxy (проходящую через оси Ox и Oy) и Oyz . Отметим точки

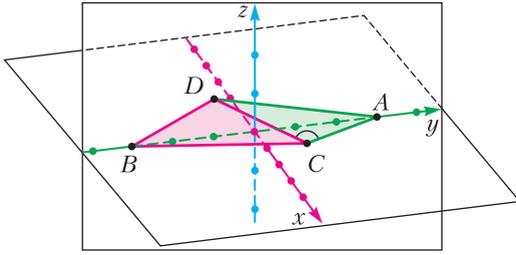


Рис. 3

с координатами $A(0; h; 0)$ и $B(0; -h; 0)$ – они лежат на оси Oy , по которой пересекаются две рассматриваемые плоскости (рис.3; подвижная версия этого чертежа есть на сайте <https://www.geogebra.org/m/c7nzrgbt>). Теперь отметим на этих плоскостях точки $C(1; d; 0)$ и $D(0; -d; 1)$. Несложно показать, что треугольники ACD и BDC равны – например, по трем сторонам, которые можно найти по теореме Пифагора (можно также объяснить, что они симметричны относительно прямой). Их сторона CD общая, а остальные лежат на рассматриваемых плоскостях Oxy и Oyz . Отразим их относительно одной из этих плоскостей, а затем все 4 грани отразим относительно другой грани. Получим восьмигранник, у которого все грани – равные треугольники. Заметим, что этот многогранник «устроен», как октаэдр, и при $d = 0$ и должном выборе параметра h получится правильный октаэдр. Осталось показать, что можно выбрать d и h так, чтобы грани были тупоугольными. Пусть $d = 1$. Теперь при стремлении h к бесконечности направление луча CA будет стремиться к оси Oy . Отсюда ясно, что можно выбрать h так, чтобы угол ACD был тупым. Можно объяснить и прозаичнее: взять конкретное значение h (подойдет любое $h > 1,5$; при $h = 1,5$ угол будет прямым) и найти стороны треугольника ACD по теореме Пифагора. Затем по теореме косинусов для треугольника ACD найти знак косинуса угла ACD и убедиться, что он отрицательный, а значит, угол тупой.

Калейдоскоп «Кванта»

1. Из равенства треугольников ABN и AFN следует, что $x = y$. При этом $y = z$, поскольку ΔNFC – прямоугольный и равнобедренный.
2. Проведя серединный перпендикуляр к AF , получим точку B . Засечка радиусом, равным AB , из F как из центра дает точку C .
3. Ни при каких невозможно. В противном случае получаем два прямых угла в треугольнике TAK .
4. Покажите, что ΔAFN является равнобедренным с углами $120^\circ; 30^\circ; 30^\circ$.
5. Покажите, что $OF = OK = ON$. Тогда если от равных отрезков отнять равные, то останутся равные.

6. Отрезки BW и CW равны как хорды, стягивающие равные дуги. А в треугольнике IWC каждый из углов ICW и CIW равен $\frac{A+C}{2}$.
7. Покажите, что в $\Delta O_1O_2O_3$ общие касательные являются радиусами вписанной в этот треугольник окружности. А точка их пересечения – центр этой окружности.
8. Дважды воспользуйтесь леммой о трапеции: точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.
9. Очевидно, что в этой конструкции $x = z$. Соединим общий центр O с точками A, B, C . Тогда $OA = R_s$ и $OB = OC = R_\omega$. Задача сводится к построению ΔOAC по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
10. Воспользуйтесь леммой Архимеда о центре окружности: если центр окружности ω лежит на окружности ω_1 , то $TK = TB$. (Для этого достаточно установить равенство треугольников O_1KT и O_1BT .) Аналогично для окружностей s и ω_1 .
11. Соедините A и B . Продолжите линию за точку A и за точку B на отрезок, равный AB . Полученные точки соедините с центром O . В пересечении с окружностью ω получим искомые точки T и Q (гомотетия).
12. Отложим на AC от точки C (произвольно) отрезок CF_1 , затем на стороне AB – отрезок AD_1 (рис. 4). Через D_1 проведем прямую l параллельно

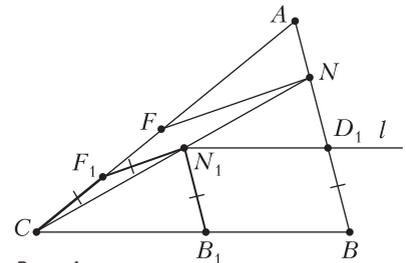


Рис. 4

но BC . Из F_1 сделаем засечку радиусом, равным CF_1 , на l получаем точку N_1 . Через N_1 проводим луч параллельно AB . Он пересекает BC в точке B_1 . Далее выполним гомотетию с центром в точке C , при которой N_1 перейдет в N , а F_1 – в F ($NF \parallel N_1F_1$). Поскольку $CF_1 = F_1N_1 = N_1B_1$, то и $CF = FN = NB$.

Задача Произволова о сумме модулей

Упражнения

1. Пусть есть m отрезков, пересекающих середину. Рассмотрим точки, которые не являются концами этих отрезков, лежащие слева от середины, – их всего $n - m$. Это концы отрезков, лежащих целиком слева от середины, поэтому таких отрезков $\frac{n - m}{2}$. Аналогично доказывается, что

отрезков, лежащих справа от середины, столько же.

2. а) Нет. Контрпример показан на рисунке 5.

б) Да. Спроецируем прямоугольники на оси координат Ox и Oy . На каждой из осей каждые два отрезка (проекции прямоугольников) имеют общую точку, и тогда по лемме З на каждой из осей все отрезки имеют общую точку. Пусть это точка X на оси Ox и точка Y на оси Oy . Рассмотрим точку A , для которой X и Y являются проекциями на оси. Если стороны прямоугольника параллельны осям и точки X и Y находятся внутри проекций его сторон на оси, то точка A находится внутри прямоугольника. Раз это верно для всех прямоугольников, то точка A находится в их пересечении.

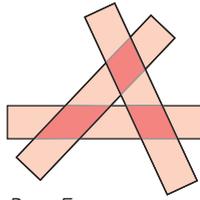


Рис. 5

4. $n!$.

Выберем, с какой точкой соединяется точка номер 1 (n вариантов точек справа от середины), затем – с кем соединяется точка с номером 2 (осталось $n - 1$ вариантов), и т.д. Получим, что количество вариантов равно $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$.

Задачи

2. *Указание.* Докажите, что Вася сможет разбить точки на пары красная–синяя и соединить их отрезками так, чтобы все отрезки пересекали середину. Тогда можно будет применить лемму 4.

6. md .

Указания к решению даны в статье. Другое решение заключается в том, чтобы заметить, что каждая пара мальчик–девочка посчитана ровно 1 раз.

7. Нет.

Изменив знак одного числа в вершине, мы изменим знаки чисел, стоящих в центрах трех граней. Итак, из 14 слагаемых изменились 4. Число меняется с $(+1)$ на (-1) или наоборот, т.е. вклад его в сумму меняется на 2. Раз каждое из 4 чисел изменило свой вклад (в ту или иную сторону) на 2, то сумма всех чисел изменится на 0, 4 или 8, т.е. на число, кратное 4. Последовательно изменим знаки всех чисел в вершинах на плюсы. Тогда в центре каждой грани стоит 1, и сумма всех чисел равна 14. Таким образом, при любых изменениях знаков чисел в вершинах сумма всех чисел не будет делиться на 4, в частности, она не может быть равна нулю.

8. *Первое решение.* Поменяем местами соседних мальчика и девочку. При этом указанные суммы одновременно либо увеличатся на 1, либо уменьшатся на 1. Действуя таким образом, мы можем получить любую расстановку детей. А в каждой расстановке, где мальчики стоят симметрично девочкам относительно центра, равенство указанных сумм очевидно.

Второе решение. Мальчик, стоящий на k -м месте слева, назовет число $20 - k$, поэтому сумма чисел, названных мальчиками, равна $200 - S_m$, где S_m – сумма их мест. Девочка, стоящая на n -м месте слева, назовет число $n - 1$, поэтому сумма чисел, названных девочками, равна $S_d - 10$, где S_d – сумма мест девочек. Осталось проверить, что $200 - S_m = S_d - 10$. Но это действительно так, поскольку $S_m + S_d = 1 + 2 + \dots + 20 = 210$.

9. *Указание к первому решению.* Докажите, что если поменять местами два соседних действия (добавление золотой монеты и убирание серебряной), суммы чисел на листках изменятся одинаковым образом (увеличатся/уменьшатся на одно и то же число).

Второе решение. Пусть в начале было n серебряных монет, а в конце стало m золотых. Будем изображать ситуацию в каждый момент точкой $(k; l)$ на координатной плоскости (k – число золотых монет на столе, l – число серебряных). Каждое действие – сдвиг на единицу вправо или вниз – будем изображать соответствующим отрезком. В результате получится ступенчатая ломаная, соединяющая точки $(0; n)$ и $(m; 0)$ (рис.6).

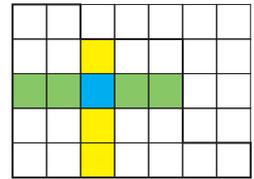


Рис. 6

При сдвиге вправо на первом листке записывается число, равное площади столбца, расположенного под проведенным отрезком, при сдвиге вниз на втором листке записывается число, равное площади планки, расположенной левее проведенного отрезка. Поэтому в конце сумма чисел на каждом листке будет равна площади, ограниченной проведенной ломаной и осями координат.

Об этой и других задачах, в решении которых помогает подобный подход, рассказывается в статье Е.Бакаева «Мальчики, девочки, таблицы, графы...» в «Кванте» №3 за 2015 год.

10. *Первое решение.* Рассмотрим 4 клетки, стоящие на пересечении двух строк и двух столбцов (рис.7). Нетрудно убедиться (например, перебором случаев), что среди клеток A и D по четности столько же черных, сколько среди клеток B и C . Значит, если две ладьи одновременно перейдут с клеток A и D на клетки B и C , четность количества черных клеток, на которых расположены ладьи, не изменится.

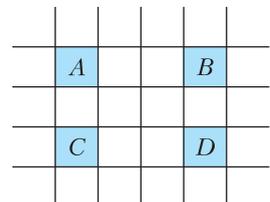


Рис. 7

Покажем теперь, как такими действиями свести расположение ладей к такому, где все ладьи стоят на главной диагонали. Можно воспринимать производимые нами дей-

ствия как перестановку местами двух столбцов (вместе с ладьями). Первым действием поставим на первое место столбец, в котором ладья на верхней клетке. Затем поставим на второе место столбец, в котором ладья на второй сверху клетке, и так далее. Когда все ладьи стоят на одной диагонали, они занимают клетки одного цвета, а значит, на черных полях расположено четное количество ладей.

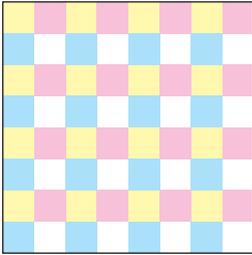


Рис. 8

Второе решение. Раскрасим поля доски, как показано на рисунке 8. Поскольку на каждой горизонтали стоит ровно одна фигура, на красных и желтых полях вместе стоят 4 фигуры. Аналогично, на синих и желтых полях вместе тоже стоят 4 фигуры.

Поэтому фигур на красных полях столько же, сколько на синих, а общее их число четно. Но красные и синие поля – это и есть черные поля исходной шахматной доски.

12. 10 г.

Разность между общей массой девяти самых тяжелых гирь и общей массой девяти самых легких равна $(19 + 18 + \dots + 11) - (9 + 8 + \dots + 1) = 90$ г. Поэтому железные гири – самые тяжелые, а бронзовые – самые легкие (иначе разность между общей массой железных гирь и общей массой бронзовых была бы меньше). Значит, золотая гирька имеет массу 10 г.

13. 53.

Пусть Леша не вычисляет разности, а оставляет их в непреобразованном виде, например $(1 - 4)$ или $2 - (1 - 4)$. Тогда Результат будет равен выражению, состоящему из разностей, в которых фигурируют все числа от 1 до 10 по одному разу. Раскроем все скобки. Получим выражение, где перед каждым числом от 1 до 10 стоит знак плюс или минус. Все знаки плюсами быть не могут (подумайте, почему). Но можно добиться того, чтобы перед всеми числами, кроме одного, был знак плюс. Сумма будет наибольшей, если минус стоит перед самым маленьким числом, т.е. единицей:

$$10 - (1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9) = \\ = -1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 53.$$

14. Обозначим массы гирек через m_i , а массы шариков – через x_i . Массы шариков равны

$$|m_1 - m_2|, |m_2 - m_3|, \dots, |m_9 - m_{10}|, |m_{10} - m_1|.$$

Сумма подмодульных выражений равна нулю:

$$(m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + \dots + (m_9 - m_{10}) + (m_{10} - m_1) = 0.$$

Значит, это равенство можно переписать так:

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_9 \pm x_{10} = 0,$$

где перед каждым x_i стоит знак плюс или минус. Положим все шарики x_i , перед которыми стоят знаки плюс, на левую чашу весов, а остальные – на правую. Тогда весы будут в равновесии.

15. Поскольку

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 2) + (m_3 - 3) + \dots + (m_{100} - 100) = 0,$$

сумма положительных чисел набора

$$m_1 - 1, m_2 - 2, m_3 - 3, \dots, m_{100} - 100$$

равна сумме модулей отрицательных чисел. Положим гирьки, соответствующие положительным числам набора, на одну чашу, а соответствующие отрицательным – на другую.

16. Первое решение. Пусть j -му человеку продали билет на место a_j , а сел он на место b_j . Тогда он охнул $b_j - a_j$ раз. Сложим эти выражения для всех людей. Сумма $(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ – это сумма номеров занятых мест, т.е. $1 + 2 + \dots + n$ (подумайте, почему люди рассядутся на первые n мест). А сумма $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ – это сумма номеров билетов. Отсюда видно, что количество охов, т.е. разность

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

не зависит от порядка, в котором люди выходили на трассу.

Второе решение. Для каждого i от 1 до n обозначим через k_i количество билетов, проданных на места от 1-го до i -го. После того как все рассядутся, первые n мест будут заняты. При этом для каждого i от 1 до n при переходе от i -го места к $(i + 1)$ -му раздастся ровно $k_i - i$ охов: ведь именно такого количества мест не хватит обладателям билетов с номерами от 1-го до i -го. Таким образом, от порядка, в котором зрители выходят на трассу, не зависит не только общее число произнесенных охов, но даже их количество, произнесенное при переходе от i -го места к $(i + 1)$ -му для каждого i .

17. Раскроем все модули. Получим сумму, в которой 126 слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{63} |n_k - k| = \pm 63 \pm 63 \pm 62 \pm 62 \pm \dots \pm 2 \pm 2 \pm 1 \pm 1,$$

из них 63 слагаемых со знаком плюс и 63 – со знаком минус. Чтобы сумма была наибольшей, со знаком плюс должны быть наибольшие слагаемые:

$$(63 + 63 + 62 + 62 + \dots + 33 + 33 + 32) - \\ - (32 + 31 + 31 + 30 + 30 + \dots + 1 + 1) = 32 \cdot 62 = 1984.$$

Итак, оценка доказана. Равенство достигается, например, при

$$n_1 = 32, n_2 = 33, \dots, n_{32} = 63,$$

$$n_{33} = 1, n_{34} = 2, \dots, n_{63} = 31.$$

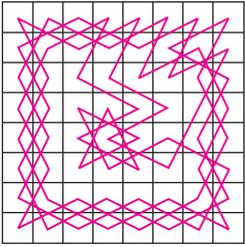


Рис. 9

Покажем, что такие значения возможны. Конь может обойти все клетки шахматной доски по одному разу и вернуться на начальную клетку (один из возможных примеров показан на рисунке 9).

Пронумеруем клетки от 1 до 64 в порядке обхода этого цикла. В нашем алгоритме кони будут скакать только по его ребрам. Изобразим этот цикл в виде отрезка (рис.10); вершины соответ-

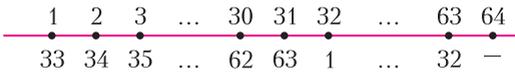


Рис. 10

ствуют клеткам доски и над ними написаны их номера (клетки 1 и 64 также соседние в цикле). Под вершинами написано, коней с какими номерами мы хотим поставить на эти клетки.

Сначала кони стоят так, что их номера совпадают с номерами клеток (на рисунке 11 под вершина-

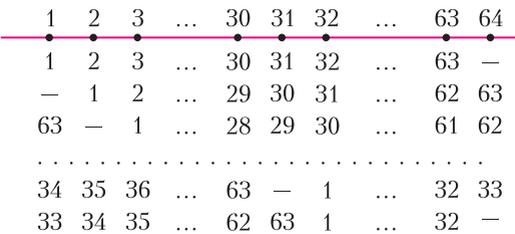


Рис. 11

ми в строках изображены этапы алгоритма; в первой строке – начальное положение коней). Пусть конь 63 пойдет на клетку 64, конь 62 – на клетку 63 и т.д. Все кони сместятся на шаг вправо (см. вторую строку), клетка 1 опустеет. Сделаем аналогичное действие со всеми конями еще раз – все кони сдвинутся далее по циклу на один шаг и опустеет клетка 2 (см. третью строку). Повторяя это действие, приходим к тому, что опустеет клетка 31. Далее пусть на один шаг сдвинутся кони с номерами 63, 62, ..., 33, клетка 64 опустеет. Таким образом, мы переставили коней так, что рассматриваемая сумма равна 1984.

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

Физика

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Часть I

- 1. 0.
- 2. 37.
- 3. 8.

Часть II

1. 1) При $E \geq 0$ радиус Вселенной изменяется от

$$R_{\min} = \sqrt{\frac{C}{E} + \frac{B^2}{4E^2}} - \frac{B}{2E} \text{ до бесконечности; при } -\frac{B^2}{4C} < E < 0 \text{ радиус изменяется от } R_{\min} = \frac{B}{-2E} - \sqrt{\frac{B^2}{4E^2} - \frac{C}{-E}} \text{ до } R_{\max} = \frac{B}{-2E} + \sqrt{\frac{B^2}{4E^2} - \frac{C}{-E}};$$

при $E = -\frac{B^2}{4C}$ радиус принимает единственное возможное значение $R = \frac{2C}{B}$. Здесь

$$B = \frac{3}{5} G (M_s + M_q)^2 \text{ и } C = A \left(\frac{9(-M_q)^5}{16\pi^2} \right)^{1/3}.$$

2) Вселенная может быть статична, если $E = -\frac{B^2}{4C}$.

В этом случае ее радиус постоянен и равен

$$R_{st} = \frac{2C}{B}.$$

$$3) t_a = \frac{4C}{B^2} \sqrt{\frac{2CM_s}{15}}.$$

Подсчитаем полную энергию Вселенной в рамках модели KXX: она складывается из кинетической энергии обычного вещества, потенциальной энергии гравитационного взаимодействия и внутренней энергии квинтэссенции. Текущее значение плотности обычного вещества при радиусе Вселенной $R(t)$ равно $\rho(t) = \frac{3M_s}{4\pi R^3}$. Скорость вещества на расстоянии r от центра Вселенной

$$v(r, t) = \frac{r}{R(t)} v(R, t) = H(t)r. \text{ Отметим, что и в современной космологии используется обозначение}$$

$$H(t) = \frac{v(R, t)}{R(t)} \text{ для коэффициента пропорциональности между } v(r, t) \text{ и } r. \text{ Кинетическая энергия слоя вещества радиусом } r \text{ и толщиной } \Delta r \text{ равна}$$

$$\frac{1}{2} \rho \cdot 4\pi r^2 \Delta r (Hr)^2. \text{ Следовательно, кинетическая энергия всего шара}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^R dr \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot H^2 r^2 = \frac{2\pi \rho H^2 R^5}{5},$$

или

$$E_k = \frac{3}{10} M_s H^2(t) R^2(t) = \frac{3}{10} M_s v^2(R, t).$$

Если ввести обозначение $v(R, t) = \frac{dR}{dt} = V(t)$, то

$$E_k = \frac{3}{10} M_s V^2.$$

Для подсчета потенциальной энергии гравитационного взаимодействия можно использовать аналогию между электростатикой и гравитацией:

закон всемирного тяготения отличается от закона Кулона только заменами $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ на G и зарядов на массы, а также тем, что силы тяготения всегда действуют как притяжение (энергия взаимодействия отрицательна, если за ноль принято ее значение при бесконечном удалении масс друг от друга). Значит, энергия взаимодействия для шара радиусом $R(t)$ с гравитационной массой $M_s + M_q$ равна

$$W = -\frac{3G(M_s + M_q)^2}{5R} = -\frac{B}{R}.$$

Внутренняя энергия квинтэссенции, согласно условию, равна

$$U = p \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = A \left(-\frac{M_q}{4\pi R^3/3} \right)^{5/3} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = A \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \frac{(-M_q)^{5/3}}{R^2} = +\frac{C}{R^2}.$$

Итак, полная энергия Вселенной, остающаяся неизменной при ее расширении, равна

$$E = \frac{3}{10} M_s V^2 - \frac{B}{R} + \frac{C}{R^2},$$

где

$$B = \frac{3}{5} G (M_s + M_q)^2 \text{ и } C = A \left(\frac{9(-M_q)^5}{16\pi^2} \right)^{1/3}$$

– положительные постоянные, выражающиеся через M_s , M_q и A .

Для определения пределов изменения радиуса Вселенной в модели КХХ заметим, что кинетическая энергия вещества неотрицательна: $\frac{3}{10} M_s V^2 = E + \frac{B}{R} - \frac{C}{R^2} \geq 0$. Для анализа ситуации построим график функции $F(R) = -\frac{B}{R} + \frac{C}{R^2}$ (рис.12).

Отсюда сразу видно, как может изменяться радиус Вселенной.

Как следует из проверенного анализа, Вселенная в модели КХХ может быть статична: это происходит, если $E = -\frac{B^2}{4C}$. В этом случае ее радиус постоянен и равен $R_{st} = \frac{2C}{B}$.

Если $E = 0$, то кинетическая энергия $\frac{3}{10} M_s V^2 =$

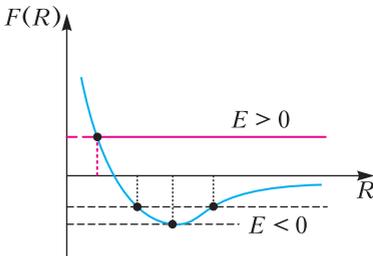


Рис. 12

$= +\frac{B}{R} - \frac{C}{R^2}$. Тогда минимальный радиус $R_0 = \frac{C}{B}$, и при расширении от этого радиуса скорость расширения $V = \frac{dR}{dt} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{10B}{3M_s}} (R - R_0)$. Ясно, что

скорость растет на том же участке значения радиуса, на котором убывает $F(R)$, т.е. вплоть до $R = 2R_0$. Перепишем предыдущее уравнение в виде $\frac{RdR}{\sqrt{R - R_0}} = \sqrt{\frac{10B}{3M_s}} \cdot dt$. Тогда ясно, что время, в течение которого Вселенная расширяется ускоренно, составляет

$$t_a = \sqrt{\frac{3M_s}{10B}} \int_{R_0}^{2R_0} \frac{RdR}{\sqrt{R - R_0}} = \left(z = \sqrt{\frac{R}{R_0} - 1} \right) = 2\sqrt{\frac{3M_s R_0^3}{10B}} \int_0^1 dz (1 + z^2) = \frac{4C}{B^2} \sqrt{\frac{2CM_s}{15}}.$$

$$2. T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{21}{2\arccos(23/27)}} \frac{1}{G\rho} \approx 101 \text{ мин.}$$

$$3. D = \frac{nR}{n-1} - \frac{nR}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}{(n-1)\sqrt{n+1}} R \approx 2,4 \text{ см.}$$

4. Для всего исследованного диапазона скоростей предположение выполняется с ошибкой не более 4% при $\alpha = (20, 2 \pm 0, 8)$ кг/с, но для скоростей, не превышающих 6 м/с, ошибки составляют около 1% при $\alpha = (20, 0 \pm 0, 2)$ кг/с. Максимальная стартовая скорость, при которой плот не достигает противоположного берега, чуть менее $(2, 00 \pm 0, 02)$ м/с.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

$$1. T_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 T_1 = 36 \text{ Н, } T_3 = \frac{2g}{\omega_1^2 \sqrt{4L^2 - d^2}} T_1 = 28 \text{ Н.}$$



$$m\omega^2 L \cos \frac{\beta}{2} \sin \alpha = 2T \cos \frac{\beta}{2} \sin \alpha$$

позволяет найти величину сил натяжения:

$$T = \frac{1}{2} m\omega^2 L.$$

Условие баланса вертикальных компонент сил

$$mg = 2T \cos \frac{\beta}{2} \cos \alpha$$

приводит к уравнению для угла отклонения:

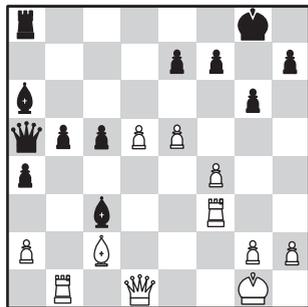
$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 L \cos(\beta/2)} = \frac{2g}{\omega^2 \sqrt{4L^2 - d^2}}.$$

РадостныЕ ШАХМАТЫ

Сегодня мы расскажем о, пожалуй, наиболее ярком из современных гроссмейстеров – москвиче Данииле Дубове, демонстрирующем творческий подход к игре, радуя любителей шахмат красивыми жертвами и эффектными комбинациями. Первая из представленных здесь партия была сыграна Даниилом на недавнем чемпионате России – в ней он нанес поражение будущему чемпиону Яну Непомнящему, а вторая и третья – в турнире по быстрым шахматам в интернете, в котором Даниил сенсационно обыграл в четвертьфинале действующего чемпиона мира Магнуса Карлсена.

Д.Дубов – Я.Непомнящий Москва, 2020

1. d4 ♘f6 2. c4 g6 3. ♘c3 d5 4. cd ♘d5 5. e4 ♘c3 6. bc ♘g7 7. ♘b5+ c6 8. ♘a4 b5 9. ♘b3 a5 (сразу 9...c5 не годится из-за 10. ♘d5!), поэтому сначала нужно прогнать слона) 10. ♘f3 0-0 11. 0-0 a4 12. ♘c2 c5 13. ♔b1 ♘c6 14. d5 ♘e5 15. ♘e5 ♘e5 16. ♘h6 ♘a6 17. ♘f8 ♘f8 18. f4 ♘c3 19. ♔f3 ♘a5?! Черные недооценивают опасность, нависающую над королем. Аккуратнее 19...♘d4+ 20. ♔h1 ♘g8, сохраняя возможность защищать королевский фланг ферзем. 20. e5 ♘g8?! Буквально два неудачных хода, и черные попадают под каток – типичная ситуация для защиты Грюнфельда.

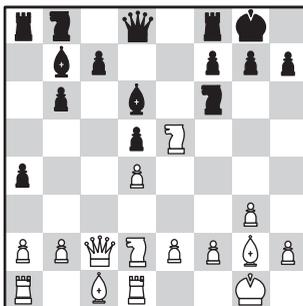


21. ♔h1! Ход гроссмейстера экстра-класса. Белые проводят профилактику перед решающим

штурмом. 21...♘d8 22. e6 fe 23. ♘g6! hg 24. ♘c2. В этом вся соль комбинации – черные не успевают защитить пешку на g6, так как висит слон. 24...♘g7 25. ♔g3 g5 26. ♘g6 ♘d2 27. ♔g5 ♘c3 28. ♘e6+ ♘f8 29. ♔e1! Решающий ход – черные вынуждены отдать ферзя, последнее – дело техники. 29...♘e1+ (29...♘f6 30. ♘g8×; 29...♘f6 30. ♔f5; 29...♘e8 30. d6) 30. ♘e1 ♘f6 31. ♘h4 ♘d6 32. ♘h7 ♘e8 33. ♘g8+ ♘d7 34. ♘a8 ♘g5 35. fg c4 36. h4 b4 37. ♘a7+ ♘e8 38. ♘b8+ ♘f7 39. ♘b4 ♘d5 40. ♘a4, и, потеряв пешки, черные сдались.

Д.Дубов – М.Карлсен Internet, 2020

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. g3 ♘b4+ 5. ♘bd2 0-0 6. ♘g2 b6 7. 0-0 ♘b7 8. ♘e5 a5 9. ♘c2 a4 10. ♔d1 ♘d6 11. cd ed

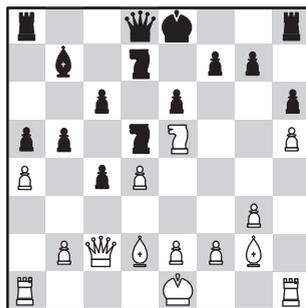


12. ♘dc4! Типичная для каталонского начала идея – пользуясь связкой, конь атакует слона и может при случае быть переведен через e3 на a5. 12...h6 13. ♘f4 ♘e8 14. ♔ac1 ♘a6 15. a3 ♘f8 16. ♘e3 c5 17. ♘f5 cd 18. ♘c6 ♘d7 19. ♘h3 ♘h8? Необходимо было решиться на размен ферзя на три легкие фигуры: 19...♘c6 20. ♘h6+ gh 21. ♘d7 ♘d7 с равными шансами. 20. ♘e5 ♘e5 (черные вынуждены отдать качество, поскольку 20...♘e6 ведет к мату после 21. ♘h6 ♘h3 22. ♘ef7×) 21. ♘e5 ♘e4 22. ♘d4 ♘c8 23. ♘d3 ♘ac5 24. ♘e3 ♘h7 25. ♘c5 ♘c5 26. ♘f3 d4 27. ♔d4 ♘e8 28. ♘e3 ♘c6 29. f3 ♘e8 30. ♘f2 g6 31. ♘e3 ♘f6 32. ♘g4 ♘g7 33. ♘cd1 h5 34. ♘e3 ♘b3 35. ♘d3 ♘b2 36. ♔d7 ♘c5 37. ♔f7+ ♘h6 38. ♔dd7 ♘a1+? (спасало пара-

доксальное 38...♘h8!, защищая поле h7) 39. ♘g2 ♘e3 40. ♔h7+ ♘g5 41. ♔b7 ♘f8. Красивый финал! После взятия ферзя последует мат пешкой с поля f4. 42. ♘e3+! Черные сдались.

Д.Дубов – М.Карлсен Internet, 2020

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. g3 ♘b4+ 5. ♘bd2 dc 6. ♘g2 a5 7. a3 ♘d2+ 8. ♘d2 b5 9. a4 c6 10. ♘c2 ♘b7 11. h4 ♘bd7 12. h5 h6 13. ♘e5 ♘d5.



14. ♔h4! Решение в стиле AlphaZero – белые используют «лифт», поднимая ладью по линии h, в то время как король самостоятельно перейдет на g1. 14...♘7f6 15. ♘f1 ♘c7 16. ♘g1 ♘b4 17. ♘c1 ♘d8 18. ab cb 19. ♘b4 ab 20. ♔a7 ♘d5 21. ♔g4 ♘g8 22. ♘c2 c3 23. bc bc 24. ♔a3 ♘c8 25. ♘d3 ♘f6 26. ♘b7 ♘b7 27. ♘e5? Грубый зевок, ведущий к потере коня, лучше 27. ♘f4 b4 28. ♔b3 ♘c4 со сложной игрой. 27...♘c5 28. dc ♘g4 29. c6 ♘c6?! Точнее 29...♘b6 30. e3 ♘e7, так как сделанный в партии ход позволил белым захватить линию c. 30. ♘c3 ♘b6 31. e3 ♘e7 32. ♘c6 ♘d8 33. ♘c5+ ♘f6 34. ♔d6 ♘e7?? От зевка в сложной позиции в цейтноте не застрахован даже чемпион мира. Черные успешно отражали атаку после 34...♘a8 35. ♘d4+ ♘e5 36. ♘f4+ ♘e7 37. ♘e5 ♘b8!. 35. ♘d4+ ♘g5 36. f3! Черным грозит не только потеря коня, но и мат с нескольких полей: вероятно, это ускользнуло от внимания Магнуса. 36...f5 37. fg ♘c8 (37...fg 38. ♘e5×; 37...g6 38. gf) 38. ♘f4+ ♘f6 39. ♘f5×. Белые выиграли.

А. Русанов

Как взлетает самолет

Прочухки с физикой

Оказывается, самолету легче взлетать против ветра. Не странно ли?

ISSN 0130-2221 21001



9 770130 222214

(Подробнее — на с. 39 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)