Журкина Мария Ивановна
учитель математики (учитель-практикант)
МАОУ ЛМИ г. Саратова,
Саратов, 2018 год

План-конспект урока изучения нового материала по алгебре и началам математического анализа в 10 классе по теме Введение вспомогательного угла

Учитель: Журкина Мария Ивановна
Предмет: Алгебра и начала математического анализа
Авторы учебника: Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. – 8-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 430 с.
Тема урока: Введение вспомогательного угла
Тип урока: урок изучения нового материала

Цель урока: развить у учащихся умения решать тригонометрические уравнения, неравенства при помощи введения вспомогательного угла.
Задачи урока:

1. **Образовательные:** изучить теоретический материал по данной теме, разработать общий способ введения вспомогательного угла.
2. **Развивающие:** развивать и совершенствовать умения применять имеющиеся у учащихся знания в измененной ситуации, развивать аналитическое и логическое мышление, математическую речь, выделять главное, делать выводы и обобщения.
3. **Воспитательные:** воспитывать у учащихся стремление к самосовершенствованию, удовлетворению познавательных способностей, воспитание коммуникативной культуры и культуры устной и письменной речи.

Саратов 2018

Ход урока

I. Организационный этап

Приветствие: Подготовка к уроку учащихся и классной комнаты.

II. Этап актуализации знаний (7 минут)

Выполните предложенные задания. Сравните.

Задание 1.

Вычислите: а) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{20}+\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{20}$;

б) $\sin 74^0\cos 16^0+\cos 74^0\sin 16^0$

Задание 2.

Решите уравнение:

$\cos 6x\cos 5x+\sin 6x\sin 5x=-1$.

Какие тригонометрические формулы вы использовали при выполнении данных заданий?

III. Изучение нового материала (17 минут)

Рассмотрим уравнение вида: $A\sin x+B\cos x=C$, где A, B и C – данные числа и $AB\neq 0$. Так как $A^2+B^2>0$, то, разделив обе части данного уравнения на число $\sqrt{(A^2+B^2)}\neq 0$, перепишем данное уравнение в виде $a\sin x+b\cos x=c$, где $a=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, b=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, c=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Так как $a^2+b^2=1$, то можно подобрать такой угол α, что $a=\sin\alpha$ и $b=\cos\alpha$. Предыдущее уравнение можно записать в виде $\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha=c$ или в виде $\cos(x-\alpha)=c$. Если подобрать такой угол β, что $a=\cos\beta$ и $b=\sin\beta$, то предыдущее уравнение можно записать в виде $\sin(x+\beta)=c$. Таким образом, решение первого уравнения сводится к решению $\cos(x-\alpha)=c$ или $\sin(x+\beta)=c$.

Рассмотрим следующий пример:

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}. \qquad (4)$$

Разделив обе части уравнения (4) на $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, перепишем его в виде

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=1.$$

Так как $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$, то уравнение (4) можно записать в виде

$$\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=1,$$

или в виде

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1. \qquad (5)$$

Все решения уравнения (5), а значит и уравнения (4), задаются формулой

$$x_k-\frac{\pi}{4}=2\pi k,\ k\in Z,$$

следовательно, уравнение (4) имеет одну серию решений

$$x_k=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Теперь рассмотрим неравенства вида $A\sin x+B\cos x>C$, где A, B и C – данные числа и $AB\neq 0$. Введение вспомогательного угла позволяет свести решение таких неравенств к решению простейших неравенств.

Рассмотрим пример:

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x<-1. \qquad (8)$$

Разделив обе части неравенства (8) на число $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x<-\frac{1}{2}. \qquad (9)$$

Так как $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, то неравенство (9) перепишется в виде

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}. \qquad (10)$$

Все решения неравенства (10) задаются условиями

$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n<x-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Отсюда получаем, что все решения неравенства (8) есть серия интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$$

Введение вспомогательного угла позволяет решать уравнения вида $A\sin^2 x+B\sin x\cos x=C$ и неравенства вида $A\sin^2 x+B\sin x\cos x>C$, где A, B и C – данные числа и $AB\neq 0$. Для этого необходимо сначала применить формулы двойного угла, а затем ввести вспомогательный угол.

Рассмотрим пример:

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$2\sqrt{3}\sin^2 x-2\sin x\cos x=\sqrt{3}+1. \qquad (14)$$

Применив формулы двойного угла, перепишем уравнение (14) в виде

$$\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=-1. \qquad (15)$$

Разделив обе части уравнения (15) на $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=-\frac{1}{2}. \qquad (16)$$

Так как $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, то уравнение (16) перепишется в виде

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}. \qquad (17)$$

Все решения уравнения (17) задаются формулами

$$2x_k+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\ \text{и}\ 2x_n+\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z},$$

откуда получим, что уравнение (14) имеет две серии решений:

$$x_k=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\ \text{и}\ x_n=-\frac{7\pi}{6}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$$

IV. Первичное закрепление материала (18 минут)

Выполнение номеров из учебника: № 11.49 (а, б) – Ангелина, Иван; № 11.50 (а, б) – Ирина, Сергей; № 11.52 (а, б) – Денис, Павел; № 11.54 (б) – тремя способами – Адельбий, Никита, Игорь. Данные номера выполняются у доски с комментариями.

V. Подведение итогов урока

1. Сколькими способами можно решать однородные тригонометрические уравнения первой и второй степени? (1) введением вспомогательного угла и 2) сведением к равносильному уравнению относительно тангенса (п. 11.4 учебника). Причем оба способа одинаково трудоемки. В то же время однородные тригонометрического неравенства первой и второй степени предпочтительнее решать введением вспомогательного угла, так как сводить их к неравенствам относительно тангенса очень трудоемкая задача.

2. Выставление оценок в журнал

3. **Домашнее задание:** Параграф 11, п. 11.8., выучить теорию, подготовиться к самостоятельной работе, № 11.49. (в), № 11.50 (в), № 11.52 (в, г)