Благовещенский финансово-экономический колледж – филиал федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ПЦК «Прикладная информатика»

**Теория вероятностей и математическая статистика**

Сборник опорных конспектов

Благовещенск 2016

Составитель: О. В. Ладоня

Цель: предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика», а также преподавателей данной дисциплины.

Рассмотрено и одобрено на заседании

ПЦК «Прикладная информатика»

«­­­\_\_\_» ­­­­­\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Протокол № \_\_\_\_

Зав. ПЦК Е.И.Шпакова \_\_\_\_\_\_\_\_

**Пояснительная записка**

В настоящее время теория вероятности входит в качестве обязательной дисциплины в учебные планы подготовки специалистов практически всех естественно-научных, технических и гуманитарных дисциплин в учебных заведениях. Элементы логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей становятся обязательным компонентом образования, усиливающим его прикладное и практическое значение. Этот материал необходим, прежде всего, для формирования функциональной грамотности – умений воспринимать и анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчеты. Изучение основ комбинаторики позволит учащемуся осуществлять рассмотрение случаев, перебор и подсчет числа вариантов, в том числе в простейших прикладных задачах. При изучении статистики и теории вероятностей обогащаются представления о современной картине мира и методах его исследования, формируется понимание роли статистики как источника социально значимой информации и закладываются основы вероятностного мышления.

**Содержание**

[Основные понятия теории вероятностей 6](#_Toc452637944)

[Классические теоремы теории вероятностей 8](#_Toc452637945)

[Повторные независимые испытания 10](#_Toc452637946)

[Случайные величины 12](#_Toc452637947)

[Дискретная случайная величина (ДСВ) 12](#_Toc452637948)

[Непрерывные случайные величины 16](#_Toc452637949)

[Нормальное распределение 18](#_Toc452637950)

[Статистическое распределение выборки 20](#_Toc452637951)

[Статистические оценки параметров распределения 22](#_Toc452637952)

[Проверка статистических гипотез 24](#_Toc452637953)

[Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности с помощью критерия Пирсона 25](#_Toc452637954)

[Корреляционный и регрессионный анализ 26](#_Toc452637955)

[Список использованной литературы 28](#_Toc452637956)

раздел математики, который изучает закономерности, имеющие место в однородных массовых испытаниях

Основные понятия теории вероятностей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Испытание** | Комплекс каких-либо условий, действий | Подбрасывается игральный кубик |
| **Исход испытания** | Возможный результат испытания | Выпало 1 очко.  Выпало 2 очка.  …  Выпало 6 очков. |
| **Событие** | Абстракция исхода, испытания | Выпало четное число очков.  Выпало число очков больше 3.  Выпало 1 очко. |

*Задача*: Из полной колоды в 36 карт извлекается одна. Какова вероятность, что это туз?

Испытание: из 36 карт извлекается 1. Событие А – появился туз.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вероятность** события А |  | - число благоприятных исходов: | 4 карты (Т♥; Т♠; Т♣; Т♦) |
| - число всех возможных исходов: | 36 карт |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Комбинаторика** | | |
| **Перестановки** | **Размещения** | **Сочетания** |
| Отличаются порядком расположения элементов | Отличаются порядком расположения или составом элементов | Отличаются составом элементов |
|  |  |  |
|  |  |  |
| *Правило суммы* | Если некоторый объект ***а*** можно выбрать из совокупности объектов ***r*** способами, а другой объект ***b*** может быть выбран ***s*** способами, то выбрать либо ***а***, либо ***b*** можно ***r+s*** способами. | |
| *Правило произведения* | Если некоторый объект ***а*** можно выбрать из совокупности объектов ***r*** способами и после каждого такого выбора объект ***b*** можно выбрать ***s*** способами, то пара объектов (***a, b***) в указанном порядке может быть выбрана ***r\*s*** способами. | |

Классические теоремы теории вероятностей

***Теоремы сложения***

Несовместные события: появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Противоположные события: два несовместных события и одно из них обязательно произойдет в испытании.

Полная группа событий: события единственно возможные и несовместные.

**Сумма** несовместных событий А и В: событие, которое состоит в наступлении события А или события В.

*Теорема*: Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

* Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна 1.
* Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

Совместные события: появление одного события не исключает появления других событий в одном и том же испытании.

**Сумма** совместных событий А и В: событие, которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий А или В.

*Теорема*: Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления.

***Теоремы произведения***

Зависимые события: при появлении одного из событий вероятность появления другого события меняется.

Условная вероятность : вероятность появления события. В при условии, что событие А произошло.

**Произведение** событий А и В: событие, которое предполагает совместное появление событий А и В.

*Теорема*: Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило.

Независимые события: при появлении одного из событий вероятность появления другого события не меняется.

*Теорема*: Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

*Теорема*: Вероятность появления хотя бы одного из событий независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий.

Если n событий имею одинаковую вероятность, равную *р*, то вероятность появления *хотя бы одного* из этих событий

**Формула полной вероятности**: событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез), образующих полную группу.

**Формула Байеса**: переоценка вероятностей гипотез, после того, как становится известен результат испытания.

Повторные независимые испытания

***Схема Бернулли***

1. Все n испытаний независимы друг от друга.

2. Каждое испытание имеет два исхода (событие А произошло или не произошло).

3. Вероятность наступления события А в каждом испытании постоянна , вероятность ненаступления события А в каждом испытании постоянна .

***Задача****: Найти вероятность того, что в n испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, событие А произойдет ровно m раз.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Формула Бернулли** |  | 1) событие А произойдет хотя бы один раз  2) событие А произойдет от m1 до m2 раз |
| **Локальная теорема Лапласа** |  | 1) событие А произойдет от m1 до m2 раз – интегральная теорема Лапласа |
| **Теорема Пуассона** |  | 1) событие А произойдет хотя бы один раз  2) событие А произойдет от m1 до m2 раз |

Случайные величины –

величины, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретные случайные величины (ДСВ) –

случайные величины, множество значений которых конечно или бесконечно, но **счетно**

**Закон распределения ДСВ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Табличный способ*   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Х | х1 | х2­ | … | xn | | Р | p1 | p2 | … | pn |   =1 | *Графический способ*  Многоугольник распределения | *Аналитический способ*  Формула |

Функция распределения **F(x)=P(X<x) –** функция F(x), определяющая вероятность того, что случайная величины Х в результате испытаний примет значение меньше *х*

|  |  |
| --- | --- |
| *Свойства F(x)*    2. F(x) - неубывающая функция => P(a<x<b)=F(b) – F(a) 3. F(x)=0 при ; F(x)=1 при b |  |

***Математические операции над СВ***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | х1 | х2 | … | xn |  | Y | y1 | y2 | … | ym |
| Px | p1x | p2x | … | pnx |  | Py | p1y | p2y | … | pmy |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Z = C\*X | zi = C\*xi | P(Z=zk)=P(X=xi) |
| Z=X+Y | zi = xi + yj | P(Z=zk)=ΣP(X=xi)\*P(Y=yj) |
| Z=X\*Y | zi = xi \* yj |

***Числовые характеристики ДСВ***

|  |  |
| --- | --- |
| Математическое ожидание – характеристика положения ДСВ | 1. М(С) = С, С=const 2. М(С\*Х) = С\*М(Х) 3. М(Х ± Y) = М(Х) ± M(Y) 4. M(X\*Y) = M(X)\*M(Y) 5. М(Х ± C) = М(Х) ± C |
| Дисперсия –  мера рассеивания ДСВ от ее М(Х)  Среднее квадратическое отклонение – оценка рассеяния возможных значений СВ вокруг ее среднего значения | 1. D(С) = 0, С=const 2. D(С\*Х) = С2 \*D(Х) 3. D(Х ± Y) = D(Х) + D(Y) 4. D(X\*Y) = D(X)\*D(Y) + M2 (X)\*D(Y) + M2 (Y)\*D(X) 5. D(Х ± C) = D(Х) |

**Основные законы распределения ДСВ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Равномерный** | ДСВ принимает свои возможные значения с постоянной вероятностью |  |  |
| **Биноминальный** | Х – число появлений события А при проведении испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли |  |  |
| **Закон распределения Пуассона** | Х – число появлений события А при проведении испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли и теореме Пуассона |  |  |
| **Геометрический** | Х – число проведения испытаний до первого появления события А, удовлетворяющих схеме Бернулли | 1;2;3;… |  |
| **Гипергеометрический** | Х – число элементов с фиксированным свойством, оказавшихся в выборке | n – общее число элементов  s - число элементов с фиксированным свойством  r – число отобранных элементов  m – число элементов с фиксированным свойством среди отобранных |  |

Непрерывные случайные величины

*Способы задания НСВ*

* Плотность распределения (плотность вероятности):
* Функция распределения:

|  |  |
| --- | --- |
| *Свойства плотности распределения f(x)* |  |

*Числовые характеристики НСВ*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | |  |
|  | | *Математическое ожидание* | |  |
|  | | *Дисперсия* | |  |
| *Основные законы распределения НСВ* | *Плотность вероятностей* | | *Функция распределения* | |
| **Равномерное** распределение на отрезке [a; b]: |  | |  | |
| **Показательное** распределение: |  | |  | |

Нормальное распределение

|  |  |
| --- | --- |
| Общее | Нормированное (стандартное) |
|  |  |
|  | |
|  |  |
|  | |

наука о принятии решения в условиях неопределенности

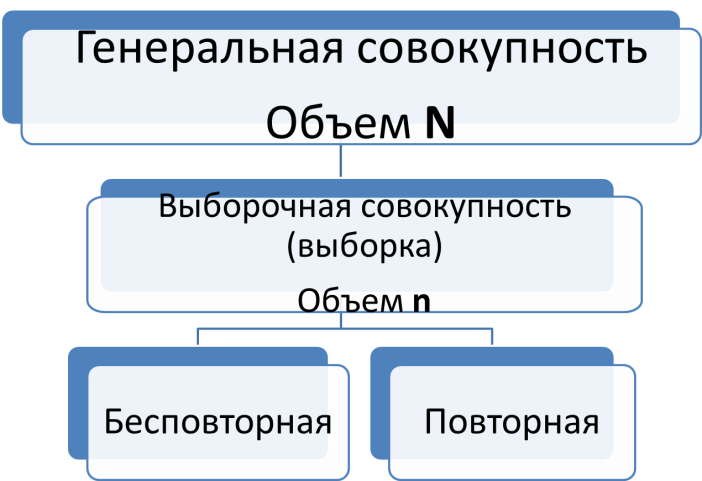
**ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА**:

создание методов сбора и обработки статистических

данных для получения

научных и практических

выводов

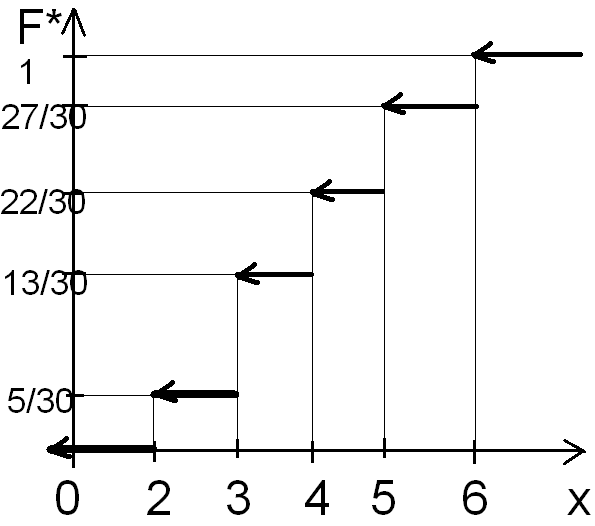
 

Статистическое распределение выборки

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ДИСКРЕТНОЕ | Объем выборки  Относительная частота | | ИНТЕРВАЛЬНОЕ |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Варианта |  |  | … |  | | Частота |  |  | … |  | |  | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Интервал |  |  | … |  | | Частота |  |  | … |  | |
|  | |
|  | |  | |

**Эмпирическая функция распределения**

* Значения принадлежат отрезку [0; 1]
* Неубывающая функция
* х1 –наименьшая варианта => при
* хk – наибольшая варианта => при



Статистические оценки параметров распределения

**Точечное оценивание**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Числовая характеристика | Генеральная совокупность | Выборка |
| Средняя |  |  |
| Дисперсия |  |  |
| Среднее квадратическое отклонение |  |  |

При большом значении вариант переходим к ложному нулю *С*

*Эмпирические моменты порядка s*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Обычный | Начальный | Центральный |
| C – мода или варианта из середины вариационного ряда | С=0 | С= |
|  |  |  |

*Метод произведений вычисления числовых характеристик*

|  |  |
| --- | --- |
| Условный момент порядка s  - условная варианта; *h* – шаг; С– ложный нуль |  |

*Оценка отклонения распределения от нормального распределения*

Ассиметрия

Эксцесс

**Интервальное оценивание с надежностью γ**

|  |  |
| --- | --- |
| Доверительный интервал для оценки **математического ожидания** нормального распределения при известном σ | таблица функции Лапласа Ф(х) |
| Доверительный интервал для оценки **математического ожидания** нормального распределения при неизвестном σ | «исправленное» СКО  таблица распределения Стьюдента |
| Доверительный интервал для оценки **среднего квадратического отклонения** нормального распределения | при  при  «исправленное» СКО  таблица значений |

Проверка статистических гипотез

***Алгоритм принятия статистических решений.***

1. **Сбор статистического материала** (выборка).
2. **Анализ полученных данных**: представление выборки в форме, приемлемой для выдвижения гипотезы.
3. **Выдвижение** нулевой (основной) **статистической гипотезы** (гипотезы о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений) Н0 и конкурирующей (альтернативной) гипотезы Н1: по эмпирическому распределению выборки выдвигаем предположение о теоретическом распределении генеральной совокупности или величине неизвестных параметров известного распределения.
4. **Проверка выдвинутой гипотезы** с помощью статистического критерия: можно ли считать расхождения между эмпирическим и теоретическим распределениями существенными или нет?

*Наблюдаемое значение* Кнабл вычисляется по выборке.

*Критическая область* – совокупность значений критерия, при которых отвергается Н0.

*Область принятия гипотезы* – совокупность значений критерия, при которых Н0 принимают.

*Критические точки* (границы) kкр – точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

*Уровень значимости α* – вероятность совершить ошибку первого рода (отвергнуть верную нулевую гипотезу).

*Риск два β* – вероятность совершить ошибку второго рода (принять неверную нулевую гипотезу).

*Мощность критерия* – вероятность отклонить нулевую гипотезу, когда верна конкурирующая гипотеза: .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Односторонние критические области | | Двусторонняя критическая область |
| Правосторонняя | Левосторонняя |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. **Принятие решения**.

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности   
с помощью критерия Пирсона

|  |  |
| --- | --- |
| *Дискретное распределение* | *Интервальное распределение* |
| Найти выборочную среднюю и выборочное СКО | Найти выборочную среднюю и выборочное СКО  при условии, что |
| Вычислить теоретические частоты :  . | Пронормировать Х: вычислить концы интервалов  Вычислить теоретические частоты : |
| Сравнить эмпирические () и теоретические () частоты: вычислить  По уровню значимости и числу степеней свободы ( – число групп выборки) найти критическую точку   * < – не отвергаем гипотезу о нормальном распределении * > – отвергаем гипотезу о нормальном распределении | |

Образец составления расчетной таблицы для нахождения теоретических частот

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i |  |  |  |  |  |  |  |  | i |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| Σ | – | n | Σ | Σ | – | – | n | Σ | – | – | – | n | Σ | Σ | – | – | – | – | 1 | n |

Образец составления расчетной таблицы для сравнения эмпирических и теоретических частот

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |
| … | … | … | … | … | … |
| Σ | n | n | – | – |  |

Корреляционный и регрессионный анализ

Независимый признак **X – фактор** Зависимый признак **Y – отклик**

|  |  |
| --- | --- |
| *Основные задачи* | |
| *корреляционного анализа* | *регрессионного анализа* |
| 1) выяснить, есть ли связь между двумя признаками;  2) измерить силу этой связи;  3) отобрать факторы, оказывающие наиболее сильное влияние на отклик | 1) описание формы зависимости;  2) нахождение коэффициентов уравнения, описывающего зависимость, и оценка их точности;  3) оценка качества полученной зависимости (адекватность модели) |

*Корреляционная зависимость* – стохастическая зависимость между случайными величинами, при которой наблюдается функциональная зависимость между значениями одной величины и средними значениями другой величины

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Парная корреляционная связь  (между двумя признаками) | | Теснота (сила) корреляционной связи | | Коэффициент корреляции | | Корреляционное поле |
| Линейная |  | Функциональная | | 1 | |  |
| Нелинейная (криволинейная) |  | Весьма высокая | | 0,9-0,99 | |  |
| Высокая | | 0,7-0,9 | |
| **Коэффициент корреляции Пирсона** измеряет тесноту линейной связи между переменными *X* и *Y* | | Заметная | | 0,5-0,7 | |  |
|  | | Умеренная | | 0,3-0,5 | |
| Исходные данные   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | i | 1 | … | n | Σ | | xi | x1 | … | xn | Σxi | | yi | y1 | … | yn | Σyn | | | Слабая | | 0,01-0,3 | |  |
|  | | Нулевая | | 0 | |  |
| **Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции** | | | | | | |
| При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента (Н0: rГ =0) корреляции нормальной двумерной случайной величины при конкурирующей гипотезе (Н1: rГ ≠0) | | | Наблюдаемое значение критерия | | Таблица критических точек распределения Стьюдента: уровень значимости α и число степеней свободы k = n – 2 => tкр(α; k)  |Tнабл| < tкр – нулевую гипотезу не отвергаем | |
| **Уравнения регрессии** | | |  | |  | |
|  | |  | |

Список использованной литературы

1. Бычков А.Г. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и методам оптимизации: учеб. пособие. - М.: ФОРУМ, 2011.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник.-11-е изд., стер.-М.: КНОРУС, 2010.
3. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник.-3-е изд., перераб.и доп.- М.:КНОРУС, 2009.
4. Кочетков Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - 2-e изд., испр. и перераб. - М.: Форум: ИНФРА-М, 2014.
5. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: учеб .-справ. пособие /Н. Ш. Кремер; под общ.ред. Н.Ш. Кремера.-4-е изд., перераб.и доп.- М.: Юрайт, 2014.
6. Фадеева Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие.- М.: Рид Групп, 2011.
7. Чашкин Ю.Р. Математическая статистика. Анализ и обработка данных: учеб. пособие.- Изд. 2-е, перераб. и доп.- Ростов н/Д: Феникс, 2010.