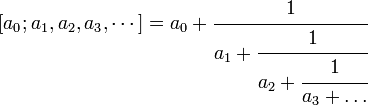
ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ

СЕВЕРНОЕ ОКРУЖНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

***Цепные дроби***

****

**РАБОТА**

УЧАЩЕЙСЯ 10 «А» КЛАССА ГБОУ ЛИЦЕЯ 1575 САО Г. МОСКВЫ **ЧЕРКАСОВОЙ ЕКАТЕРИНЫ**

РУКОВОДИТЕЛЬ РАБОТЫ

БИРЮКОВА МАРИНА АЛЕКСАНДРОВНА,

УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ

МОСКВА 2013

Паспорт работы

Образовательное учреждение: ГБОУ лицей № 1575  
  
Адрес: Москва, ул. Усиевича, д. 6  
  
Телефон: 8-(499) – 151-89-24  
  
E – mail: liceum1575@mail.ru  
  
Район: Аэропорт   
  
Автор работы: Черкасова Екатерина  
  
Название работы: Цепные дроби  
  
Основной предмет: Математика  
  
Предметный цикл: Математика  
  
Руководитель работы: Бирюкова Марина Александровна, учитель математики  
  
Способ представления работы:

стендовый доклад, защита со слайдовой презентацией  
  
Подпись руководителя \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  
  
Подпись исполнителя\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Аннотация

***Тема:*** «Цепные дроби»

***Автор работы:*** Черкасова Екатерина, учащаяся 10 «А» класса

***Научные руководители:*** Бирюкова Марина Александровна, учитель математики ГБОУ Лицея 1575

***Актуальность темы:*** В последнее время возрос интерес к цепным дробям в связи с их большим теоретическим и практическим значением. Несмотря на видимую громоздкость представления, процесс вычисления цепных дробей является цикличным и легко поддается программированию при использовании ЭВМ.

***Проблема:*** В школе математика является опорным предметом, обеспечивающим на современном уровне ряда других дисциплин. Но школа не в состоянии в полной мере удовлетворить потребности человека к образованию и самообразованию. Тема «Цепные дроби» не изучается в школьной программе, но имеет тесные связи с разделами, изучаемыми в вузах.

***Предмет исследования:*** Цепные дроби.

***Гипотеза:*** Я предполагаю, что данная тема заинтересует не только ребят, но и взрослых, так как она рассказывает о такой интересной области математики.

***Цель:*** Исследование цепных дробей.

***Методы исследования:*** поиск, анализ, синтез.

***Задачи:***

I Провести теоретические изыскания:

1. Познакомиться с историей изучения цепных дробей;
2. Узнать об использовании теории цепных дробей для практических расчетов;
3. Рассмотреть основные понятия соответствующего раздела математики.

***Краткое описание работы:*** В работе кратко изложены сведения об истории цепных дробей; в рассказе о цепных дробях особое место уделено понятиям НОД, подходящая дробь; рассмотрены закон составления подходящих дробей и некоторые теоремы раздела.

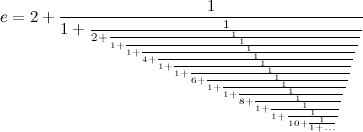
***Основные выводы и результаты:*** Изучение темы «Цепные дроби» доступно старшеклассникам и владение этим материалом может пригодиться им на первых курсах в ВУЗах.

***Библиография:***

1 Бухщтаб А.А. «Теория чисел»

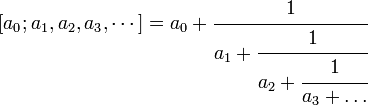
2 Виленкин Н.Я. «Алгебра и теория чисел»

3 Хинчин А.Я. «Цепные дроби»



**Введение**

***Цепная дробь (или непрерывная дробь)*** — это [математическое](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) выражение вида



где *a*0 есть целое число и все остальные *an* [натуральные числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE).

Любое [вещественное число](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D1%89%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно [рационально](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE).

В своей основе вопросы теории цепных дробей доступны учащимся основной школы. Её алгоритмы основаны на применении алгоритма Евклида, выделения целой части числа.

Цепные дроби были введены в 1572 году итальянским математиком Бомбелли. Современное обозначение непрерывных дробей встречается у итальянского математика Катальди в 1613 году. Величайший математик XVIII века Леонардо Эйлер первый изложил теорию цепных дробей, поставил вопрос об их использовании для решения дифференциальных уравнений, применил их к разложению функций, представлению бесконечных произведений, дал их обобщение.

Работы Эйлера по теории цепных дробей были продолжены М. Софроновым (1729-1760), академиком В.М. Висковатым (1779-1819), Д. Бернулли (1700-1782) и др. Многие важные результаты этой теории принадлежат французскому математику Лагранжу, который нашел метод приближенного решения с помощью цепных дробей дифференциальных уравнений.

***История появления и развития цепных дробей***

По некоторым сведениям цепные дроби применялись уже математиками Древней Греции.

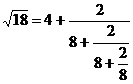
Например, алгоритм **Евклида** (III в. до н. э.) тесно связан с цепными дробями. Возможно, что при нахождении приближения к числу http://pandia.ru/text/78/002/images/image010_13.gifАрхимед (ок. 287-212 до н. э.) пользовался методом, близкому к разложению http://pandia.ru/text/78/002/images/image010_13.gifв цепную дробь.

В 1858 году был найден в курортном городке на Ниле древний папирус, его называют также Папирусом **Ахмеса** по имени писца, переписавшего его в 1650 году до н. э. Если Архимед жил в III веке до нашей эры, то папирус Ринда относится, как минимум, к XVII; ведь Ахмес был только переписчиком, а автор (или, скорее, авторы этого труда) неизвестен, но он жил еще раньше. В папирусе Ринда содержится удивительная формула для вычисления площади круга: http://pandia.ru/text/78/002/images/image011_12.gif, где S - площадь, а D – диаметр круга. Формула дана в виде рецепта: «Возьми диаметр круга и отбрось его девятую долю; на остающемся построй квадрат». Здесь используются наилучшие рациональные приближения. Трудно сказать, однако, как египтяне нашли этот коэффициент. Его могли найти и просто подбором – что абсолютно исключено в случае приближений http://pandia.ru/text/78/002/images/image010_13.gif, найденных Архимедом.

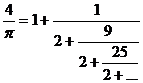
Известно, что китайский астроном **Цзу Чун-чжи** (V в. н. э.) показал, что π заключено между 3,1415926 и 3,1415927. он указал в качестве рационального приближения к π величину http://pandia.ru/text/78/002/images/image012_11.gif.

Из средневековых математиков близко подошёл к цепным дробям **Омар Хайям** (ок. 1048-1122). Он положил их в основу своей идеи реформы календаря. Продолжительность года по его приближениям составляла http://pandia.ru/text/78/002/images/image013_12.gifсуток и составляла погрешность всего 19 секунд в год.

Но впервые цепные дроби как таковые появляются в «Алгебре» итальянского математика **Рафаэль Бомбелли** (1526-1572), вышедший в 1572 г. в статье, написанной в то время, когда в Италии и Франции впервые появились алгебраические понятия и обозначения. Бомбелли пришёл к цепным дробям, изучая извлечение квадратного корня из чисел. Первым известным использованием непрерывной дроби является приближённое выражение для http://pandia.ru/text/78/002/images/image014_11.gifследующего вида http://pandia.ru/text/78/002/images/image015_10.gif. Это частный случай формулы http://pandia.ru/text/78/002/images/image016_10.gif.

Следующее по времени применение цепной дроби, причём опять-таки к извлечению квадратных корней принадлежит итальянскому математику **Пьетро Антонио Катальди** (1552-1626), им был предложен второй частный случай данной формулы: . В 1613 г. он ввёл при записи цепной дроби повторное применение дробной черты, т. е. уже настоящее обозначение цепной дроби, только вместо + он употреблял перлюэт (&), т. е. сокращённое обозначение латинского союза et (и). И его запись разложения http://pandia.ru/text/78/002/images/image018_8.gifвыглядела следующим образом: http://pandia.ru/text/78/002/images/image018_8.gif=4&http://pandia.ru/text/78/002/images/image019_8.gif&http://pandia.ru/text/78/002/images/image019_8.gif… Кроме разложения иррационального числа в ряд Катальди ещё и нашёл приближения этого числа: http://pandia.ru/text/78/002/images/image020_8.gifи http://pandia.ru/text/78/002/images/image021_8.gif, между которыми заключён http://pandia.ru/text/78/002/images/image018_8.gif(хотя он не знал способа последовательного вычисления подходящих дробей).

Катальди и Бомбелли пришли к цепным дробям, исходя из извлечения квадратного корня из чисел, а **Даниель Швентер** (1585-1636), немецкий математик, пришёл к цепным дробям путём приближённого представления обыкновенных дробей с большими числителями и знаменателями. Он нашёл рекуррентные соотношения для последовательного вычисления числителей и знаменателей подходящих дробей. Но при этом Швентер рассматривал только правильные дроби – дроби, числители которых все равны единице, а все знаменатели являются натуральными числами.

В середине XVII века английский математик **Джон Валлис** (1616-1703) первым по времени разложил трансцендентное число http://pandia.ru/text/78/002/images/image022_8.gifв бесконечное произведение: http://pandia.ru/text/78/002/images/image023_7.gif…, а У. Броункер (1620-1686), первый президент Королевского общества, около 1659 г. без доказательства опубликовал разложение его в цепную дробь: .

Следующий шаг в развитии теории цепных дробей был сделан **Христианом Гюйгенсом** (1629-1695). Он строил модель солнечной системы с помощью набора зубчатых колес. По расчетам оказалось, что отношение числа зубцов http://pandia.ru/text/78/002/images/image025_6.gifдвух каких-либо колёс должно быть равным отношению времён обращения двух планет вокруг Солнца. Это отношение выражается достаточно точно в виде (несократимой) дроби с большим числителем и большим знаменателем.

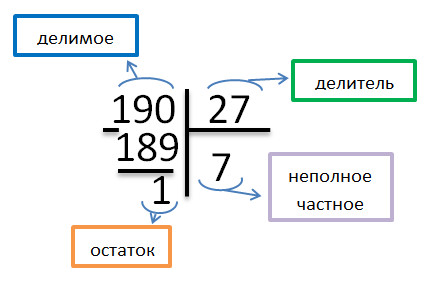
Можно сказать, что цепными дробями занимались от случая к случаю, и первым, кто систематизировал знания о цепных дробях и изложил полную их теорию, насколько это было возможно сделать в ту эпоху, был **Леонард Эйлер** (1707-1783). Он опубликовал свою первую работу в 1744 г., в которой рассматривал цепную дробь общего вида и впервые появляются соответствующие цепные дроби. Следует заметить, что сам термин «цепная дробь» появился лишь в XVIII веке, а до этого времени использовалось понятие «непрерывная дробь». Из его работ стало ясно, что непрерывные дроби могут применяться как в теории чисел, так и в анализе. Эйлеру также принадлежат и многие другие работы, связанные с изучением и применением цепных дробей.

***Основные понятия***

1. *Разделить целое число a\, на натуральное число* b (0 < b < a\, ) с остатком означает представить его в виде: a = b\,q + r,\quad 0 \leqslant r < b \quad (q \in \mathbb{Z},\,r \in \mathbb{Z}).

При этом q\, называется неполным частным, а r\, — остатком от деления a на b.

Пример: При делении с остатком положительного числа a = 78 на b = 33получаем неполное частное q = 2 и остаток r = 12. Проверка: 78 = 33 \cdot 2 + 12.



1. Наибольшим общим делителем (далее НОД) двух целых чисел a и b, одновременно не равных нулю, называется такое наибольшее целое число d, на которое a и b делятся без остатка. Этот факт обозначается так: d = НОД(a, b).Если оба числа равны нулю, то положим НОД(0, 0) = 0.

   Исходя из определения, имеют место следующие равенства:

   НОД(a, b) = НОД(b, a),

   НОД(a, b) = НОД(-a, b)

   НОД(a, 0) = |a|



1. *Алгоритм Евклида для целых чисел*

Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел  a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots >r_n определена тем, что каждое r_k — это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть

a = bq_0 + r_1

b = r_1q_1 + r_2

r_1 = r_2q_2 + r_3

\cdots

r_{k-2} = r_{k-1} q_{k-1} + r_k

\cdots

r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1}+ r_n

r_{n-1} = r_n q_n

Тогда НОД(*a*,*b*), наибольший общий делитель a и b, равен r_n, последнему ненулевому члену этой последовательности.

ПРИМЕР 1

Найдем НОД чисел *a* = 1071 и *b* = 462. Для начала, от 1071 отнимем кратное значение 462, пока не получим разность меньше чем 462. Мы должны дважды отнять 462, (я*q*0 = 2), оставаясь с остатком 147

1071 = 2 × 462 + 147.

Затем от 462 отнимем кратное значение 147, пока не получим знаменатель меньше чем 147. Мы должны трижды отнять 147 (*q*1 = 3), оставаясь с остатком 21.

462 = 3 × 147 + 21.

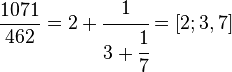
Затем от 147 отнимем кратное значение 21, пока не получим знаменатель меньше чем 21. Мы должны семь раз отнять 21 (*q*2 = 7), оставаясь без остатка.

147 = 7 × 21 + 0.

Таким образом последовательность a>b>R1>R2>R3>R4>…>Rn в данном конкретном случае будет выглядеть так:

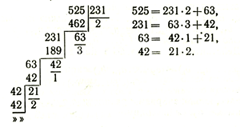
1071>462>147>21  
Так как последний остаток равен нулю, алгоритм заканчивается числом 21 и НОД(1071, 462)=21.

В приведённом примере, НОД(1071, 462) было посчитано и были найдены частные *qk* 2,3 и 7 соответственно. Поэтому, 1071/462 может быть записана как



ПРИМЕР 2

НОД(525,231)=21



******

1. *Величиной конечной цепной дроби* называют величину представляющего её алгебраического выражения.
2. Всякую конечную цепную дробь можно обратить в обыкновенную. Для этого достаточно произвести все действия, указанные в записи цепной дроби.

ПРИМЕР 3

******

******

******

******

******

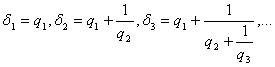
******

1. *Подходящая дробь* - число (или функция), возникающее при обрыве непрерывной дроби.



*n*-ой подходящей дробью для цепной дроби x=[a_0; a_1, a_2, a_3,\cdots], называется конечная цепная дробь [a_0; a_1, \cdots, a_n], значение которой равно некоторому рациональному числу \frac{p_n}{q_n}.

Задаче разложения обыкновенной дроби в непрерывную дробь противостоит обратная задача – обращения или свертывания цепной дроби http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image024.gif в простую дробь http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image002.gif.

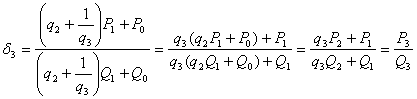
При этом основную роль играют дроби вида  или http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image050.gif которые называются подходящими дробями данной непрерывной дроби или соответствующего ей числа http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image002.gif.

Заметим, что http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image002.gif=http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image024.gif=http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image051.gif. Считается, что подходящая дробь http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image052.gif имеет порядок *k*.

Прежде чем приступить к вычислению подходящих дробей заметим, что http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image052.gif

переходит в http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image053.gif, если в первой заменить http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image052.gif выражением http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image054.gif.

Имеем http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image055.gif, http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image056.gif,



при этом принимается, что http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image058.gif, http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image059.gif, http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image060.gif, http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image061.gif, http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image062.gif, http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image063.gif и так далее.

Закономерность, которую мы замечаем в построении формулы для http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image064.gif (ее числителя http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image065.gif и знаменателя http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image066.gif), сохраняется при переходе к http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image067.gif и сохранится также при переходе от *k* к (*k*+1).

Поэтому, на основании принципа математической индукции, для любого *k*,

где http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image068.gif, имеем

http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image069.gif (1),

причем http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image070.gif (2)

http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image071.gif (3)

Далее, говоря о подходящих дробях http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image052.gif (в свернутом виде), мы будем иметь в виду их форму http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image072.gif.

Соотношения (1) являются рекуррентными формулами для вычисления подходящих дробей, а также их числителей и знаменателей. Из формул для числителя и знаменателя сразу видно, что при увеличении *k* они возрастают.

Подходящие дроби http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image087.gif(http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image088.gif) равны соответственно http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image089.gif; http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image090.gif; http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image091.gif; http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image092.gif; http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image093.gif; http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image094.gif; http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image095.gif; http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image096.gif.

Практически нахождение неполных частных и подходящих дробей удобно объединить в одну краткую схему, которую приведем для http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image097.gif =(2, 3, 1, 4, 2)

http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image077.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image098.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image099.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image100.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image101.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image102.gif

http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image052.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image089.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image091.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image103.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image104.gif http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image097.gif.

Теорема: (Закон составления подходящих дробей).

Числа Pк,, Qк ( k= -1, 0, 1, 2,. . .), определяемые из соотношении (3)где P0=a0, Q0=1, P-1=1, Q-1=0 (4) являются соответственно числителями и знаменателями подходящих дробей цепной дроби (1) .  
Теорема: Числитель и знаменатель любой подходящей дроби - взаимно простые числа, то есть всякая *k*–подходящая дробь несократима.

Теорема: Знаменатели подходящих дробей к цепной дроби, начиная с первого, образуют монотонно возрастающую последовательность, то есть 1=http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image127.gif.

Теорема: Расстояние между двумя соседними подходящими дробями http://works.tarefer.ru/50/100182/pics/image143.gif.

***Практическое применение цепных дробей***

**Христиан Гюйгенс**  строил модель солнечной системы с помощью набора зубчатых колес. По расчетам оказалось, что отношение числа зубцов http://pandia.ru/text/78/002/images/image025_6.gifдвух каких-либо колёс должно быть равным отношению времён обращения двух планет вокруг Солнца. Это отношение выражается достаточно точно в виде (несократимой) дроби с большим числителем и большим знаменателем. Изготовление же таких зубчатых колёс, практически очень сложно. Тогда Гюйгенс нашёл среди дробей с меньшим числителем и меньшим знаменателем подходящую дробь к числу http://pandia.ru/text/78/002/images/image026_6.gif. Как и Швентер, Гюйгенс решил эту задачу посредством разложения обыкновенной дроби в цепную дробь и поэтому ограничился рассмотрением правильных цепных дробей. Благодаря этому была найдена подходящая дробь http://pandia.ru/text/78/002/images/image027_6.gif, аппроксимирующая дробь с большими числителем и знаменателем, и имеющая погрешность, которая составляет лишь десятитысячную долю от единицы.



**Выводы**

В работе кратко изложены сведения об истории цепных дробей; в рассказе о цепных дробях особое место уделено понятиям НОД, подходящая дробь; рассмотрены закон составления подходящих дробей и некоторые теоремы раздела. Изучение темы «Цепные дроби» доступно старшеклассникам и владение этим материалом может пригодиться им на первых курсах в ВУЗах.

