ДОРОГОЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ты продолжаешь знакомиться с миром чисел и приступаешь к изучению учебной книги «Рациональные числа» вместе с героями русских народных сказок. В жизни человек часто оказывается в совершенно новой для него ситуации. Вот и Иван-царевич оказался в новом царстве — царстве Елены Прекрасной, в котором свои обычаи, свои особые способы измерения и счета.

Поначалу Иван-царевич пришел в полное замешательство. Но потом стал разбираться, почему в царстве Елены Прекрасной используют новые, неизвестные ему числа. Интересно! И сказал сам себе Иван-царевич: пока во всем не разберусь — ни за что не отступлюсь!

Действуя вместе с Иваном-царевичем и другими сказочными персонажами, ты научишься исследовать необычную ситуацию, опираясь и на свою смекалку, и на прошлый опыт работы с числами.

Чтобы лучше понять, как Иван-царевич исследовал в новом для него царстве новые числа, загляни в «Психологический комментарий» на с.108 Там ты познакомишься с некоторыми правилами работы исследователя.

Практикум поможет тебе закрепить и развить полученные знания и умения.

Он состоит из большого количества разнообразных заданий. Среди них встречаются лабораторные работы, которые помогут в усвоении трудных понятий.

Задания распределены по двум ступеням. Выполняя действия с числами, ты сможешь научиться анализировать, сравнивать, формулировать выводы, находить причины возможных ошибок, работать со справочником, контролировать себя и так далее

В разделе «Проверьте себя» можно выбрать один из трех вариантов заданий для самоконтроля или выполнить все три варианта. В первом варианте содержатся задания, позволяющие проверить знание материала, во втором варианте — необычные задания, в третьем — творческие задания, выполнив которые, можно продемонстрировать свои знания математического материала, написав рассказ, сделав рисунок или выполнив какую-либо другую творческую работу.

Желаем удачи!

ПРО ИВАНА-ЦАРЕВИЧА, ЕЛЕНУ ПРЕКРАСНУЮ И ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

ГЛАВА 1
КАК ВОЗНИКАЮТ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

В тридесятом царстве, в тридесятом государстве жил да был царь, и был у него сын Иван. Прослышал царь, что за тридевять земель, в некотором царстве, есть какие-то **дроби обыкновенные.**

Позвал царь Ивана и сказал:

— Съездил бы ты, Иван-царевич, в некоторое царство да привёз бы тех дробей обыкновенных хоть дюжину. Вот бы я, старый, под конец жизни порадовался.

Стал Иван в дорогу собираться да раздумывать, что это за диковина такая — «дробь обыкновенная». Не то, чтобы слово «дробь» было ему вовсе не знакомое — он давно знал **десятичные дроби** и очень даже споро с ними управлялся. Но вот про **обыкновенные дроби** в своём тридесятом царстве до того не слыхивал.

— Ну, да ничего, раздобуду дюжину, потешу батюшку, — решил Иван-царевич, вскочил на коня да и отправился в путь-дорожку.

Ехал он долго ли, коротко ли да вдруг увидел избушку. А в избушке Баба-Яга сидит.

Доложился ей Иван-царевич о своём житье-бытье, о заботушке, как положено. Баба-Яга его обхождением довольна осталась и сказала:

— Ну, добрый молодец, до некоторого царства ты уже добрался. Моя избушка своим окошком как раз на него смотрит. А секреты обыкновенных дробей у моей дочери, Елены Прекрасной, в тереме все и сохраняются. Не знаю, не знаю, разведаешь ли ты те секреты... Только без того тебе дробей наших нипочём не раздобыть.

Показала Баба-Яга Ивану-царевичу портрет своей дочери, на полотенце вышитый. И взыграло у молодца сердце. Тем полотенцем он утираться не стал — все любовался. А потом и говорит:

— Ты, бабушка, направь меня на ум-разум да сведи к своей дочери, ненаглядной Елене Прекрасной. Очень дроби обыкновенные мне надобны, а пуще того хочу Елену в жены взять, потому как полюбил я её больше жизни.

— Ну, перво-наперво ты спать ложись, а поутру ступай в некоторое царство, гостинец мне принеси. Возвратишься, глядишь чего и придумаем.

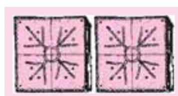
Встал Иван-царевич поутру да отправился прямёхонько в сладкую лавку со всякими товарами заморскими. Достал кошель с золотыми монетами, стал Бабе-Яге гостинец выбирать. Смотрит — пирогов сладких разложено видимо-невидимо.

			
$\frac{3}{4}$ пирога стоит $\frac{9}{2}$ деньги	$\frac{2}{4}$ пирога стоит $\frac{23}{5}$ деньги	$\frac{4}{4}$ пирога стоит $\frac{24}{10}$ деньги	$\frac{1}{4}$ пирога стоит $\frac{3}{4}$ деньги

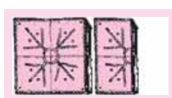
Покупателей тоже много, да речи все ведут диковинные.

Первый, по виду — писарь, просит одну четверть пирога. Ему подают:

Другой мужик просит восемь четвёртых пирога. Ему выкладывают:



Третий требует шесть четвёртых пирога и получает:



— Эх, попробую и я! — решился Иван-царевич. — Пожалуйте мне целый пирог!

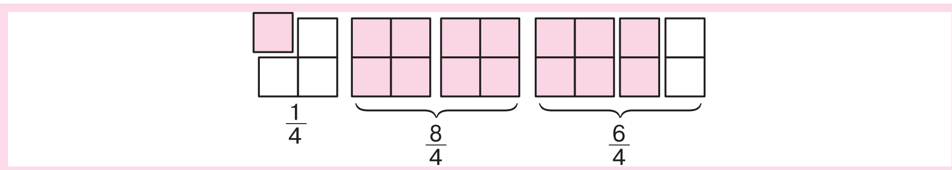
А лавочник-то не понимает! Написал тогда Иван-царевич в грамотке цифру 1. Один пирог, значит. А лавочник опять не понимает. Осерчал Иван-царевич, схватил пирог сам. Вот, мол, что мне требуется. Понял лавочник, разулыбался.

— Четыре четвёртых пирога, — говорит и пишет: $\frac{4}{4}$.

Уложил Иван-царевич пирог в коробку изукрашенную, бечёвкой перевязал. Взял тот гостинец, вышел на белый свет и думает:

— Что за странность такая? Покупатели и лавочник всё два числа называют да их одно над другим пишут!

Очень любил Иван-царевич всякие забавы с числами, вот и решил он с места не сойти, а в этой странности разобраться. Поначалу он вспомнил, какие покупки при нем делались.



Вспомнил да говорит:

— Почему это у них один пирог называется четыре четвёртых? И в грамотке как $\frac{4}{4}$ пишется? Да и везде, под каждой покупкой пара чисел значится — одно под другим, черта посерёдке, а под чертой — четвёрка?

$$\frac{1}{4}$$

1 ← Одна

4 ← Четвёртая

Стоит Иван-царевич, не шелохнётся, думу думает, что это значит. И придумал ведь!

Каждый пирог на 4 равные части, или 4 доли, разделён, и покупают тех долей-частей четвёртых сколько кому любо. Четвёртых долей, четвертинок, значит.

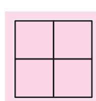
$$\frac{1}{4}$$

1 ← Про то говорит, сколько равных частей взято

Про то говорит, на сколько равных частей пирог разделён → 4

Эту самую четвёрку они под чертой и пишут. А число над чертой про то говорит, сколько тех четвертинок в лавке куплено.

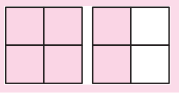
— Я-то $\frac{4}{4}$ купил, вот сколько:



А словами это сказывают так: четыре четвёртых!

Вот выдумали! То ли дело по-нашему сказать — один пирог и вся недолга́!

Или вот такую покупку взять:



Про неё пишется: $\frac{6}{4}$, а говорится: шесть четвёртых.

У нас любой мужичишка завалящий сообразил бы сказать, что это один пирог и ещё половина!

Почесал Иван-царевич макушку и пошёл было назад к Бабе-Яге, да по дороге поворотил в другую лавку, мануфактурную. Решил он для Елены Прекрасной пояс в подарок выбрать. У него на такой случай верёвочка была припасена. (Баба-Яга дала и сказала, что верёвочка эта, недлинненькая такая верёвочка, как раз вокруг пояса Елены Прекрасной оборачивается.) Да только лавочник ему попался привередливый, верёвочку и смотреть не стал, даром что из царевичевых рук! Велел к мерной выставке подойти, там размер поясу и определить.

Иван-царевич перечить не стал, понимал, что законы чужестранные уважать надо.

Подошёл к мерной выставке да стал её разглядывать. Много линеек на той выставке было понаделано, каждая длиной с аршин.[1]

Одна такая мера-линеечка на две равные части поделена была да метка посередине поставлена. Другая — на три равные части. Ну и так далее. Только первая линейка без меток была. А последняя на десять равных частей (долей) поделена.

Смотрит Иван — возле метки каждой что-то написано: опять **пара чисел, — одно над чертой, другое под чертой** помещается. **То число, что под чертой,** — как раз и показывает, **на сколько долей мера поделена. То число, что над чертой,** говорит о том, **сколько таких долей** имеется, если их от левого края по самую метку считать.

Ещё на правый край выставки загляделся:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{2}{2},\quad \ldots,\quad \frac{10}{10}.$$

[1] Аршин — старинная мера длины, примерно равная 0,711 м.

— Вот, — говорит, — одна и та же длина у линейки, а по-разному ту длину записывают. Чудно́!

Нагляделся вдосталь, за верёвочку взялся. Один конец её к метке $\frac{0}{1}$ приложил и верёвочку вдоль линейки потянул. Коротка верёвочка оказалась, меньше аршина, до метки $\frac{1}{1}$ не дотянулась. Приложил начало верёвочки к $\frac{0}{2}$ на соседней линейке — опять неудача, проскочил конец верёвочный метку $\frac{1}{2}$. Приложил третий раз, к метке $\frac{0}{3}$ — проскочила верёвочка две метки, а ни с одной из них конец верёвочки не совпал!

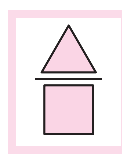
Так-то упражнялся, пока до линейки с меткой $\frac{0}{7}$ не добрался. Только тут в точку попал — совпал конец верёвочный с меткой $\frac{5}{7}$.

— Вон что, — говорит Иван-царевич, — пояс Еленин меньше их целой мерки оказался. А пишут про его длину: $\frac{5}{7}$.

Пять седьмых аршина — вот какова Елена в поясе. Тонка! Рукой обхватить можно. $\frac{5}{7}$ — пять маленьких мерок в поясе, а каждая маленькая мерка от целого аршина — одна седьмая часть и есть.

Так ведь что выходит? У них $\frac{1}{7}$ аршина — просто **новая мерка**. А не глупы тут жители! У нас вот тоже делают — не подходит 1 метр, великоват, к примеру, тогда меряют чего надобно дециметрами. Дециметр-то — одна десятая часть метра... Если кому дециметр великоват, берут сантиметры.

Написал Иван-царевич лавочнику: $\frac{5}{7}$. Тут лавочник его понял, пояс, золотом шитый, подал — Иван-царевич размер проверил, верёвочку к поясу приложил. Точь-в-точь вышло. Подарок за пазуху упрятал до времени и опять задумался:



— Выходит, в этом некотором царстве всё на равные части — на доли — делят. У нас-то делят только на 10, да на 100, да на 1000 долей... А у них, знать, на сколько хотят! Чудно! И пишут необычно — одно число под чертой, другое над чертой... И не заметил Иван, что давно уж вслух рассуждает. А лавочник прислушивается, усмехается:

— Что, — говорит, — наши числитель и знаменатель по нраву пришлись?

— Знаменатель, говоришь? Это что такое?

— Так это то число, которое под чертой пишется да показывает, на сколько равных частей вот хоть пирог, хоть что другое целое поделено.

— А числитель, выходит, число, что над чертой пишется да показывает, сколько этих равных частей взять?

— Вот-вот, в самую точку попал, человек прохожий!

— А ведь так-то ладно получается!

Вот и один пирог на четыре доли так же делили. Делили да записывали:

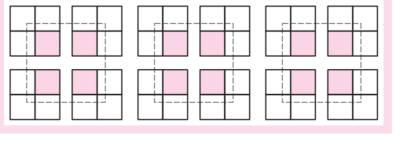
$$1 : 4 = \frac{1}{4}.$$

Вон что... Ну, а если 12 пирогов на 4 поделить, тогда как? Мы-то так пишем:

$$12 : 4 = 3.$$

А у них $\frac{12}{4}$ пишется. Разве это то же самое? Соединятся ли двенадцать четвертинок в три пирога?

Начал Иван картинки рисовать, чтоб ещё раз убедиться, что $12 : 4 = \frac{12}{4}$, и убедился! Помогли ему картинки!



Тут в лавку мужик зашёл осанистый. Купил 5 аршин ленты дочкам в косы. Просит лавочника покупку на всех своих дочерей поровну разделить. Дочери снаружи на телеге сидели, отца с обновкой дожидались. Пересчитал Иван дочерей, семеро их было — хороши были девушки, да с Еленой не сравнить. Пересчитал да думает: как же это лавочник 5 аршин поровну на семерых-то разделит?

— Можно, — думает, — все пять аршин размотать да в семь слоёв равных сложить. Один слой и станет той седьмой частью от всей покупки. Можно-то можно, да больно хлопотно и ленту, чего доброго, испачкаешь. Нет, — говорит, — проще сначала на листочке, по-нашему поделить.

Опять беда — делишь, делишь, а цифрам в частном нет конца. Одна радость, что они повторяться начали... Да только что с того?

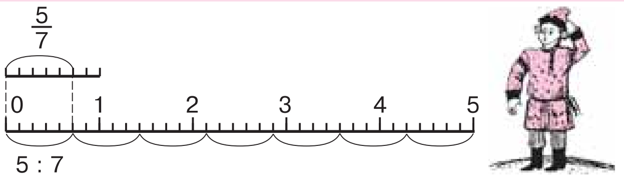
Можно, конечно, сказать, что если 5 разделить на 7, то примерно получится 0,7. Или, точнее, 0,71. Ещё точнее, 0,714. Точнее-то оно точнее, да все-таки не точно!

Выходит, какой-то одной дочке больше других достанется. Обиды не оберёшься.

Пока Иван так-то прикидывал, взял лавочник ленту, подошёл к мерной выставке, ленту между $\frac{0}{7}$ и $\frac{5}{7}$ натянул да отрезал. И так-то делал, пока лента не кончилась. Пять аршин ровнёхонько на 7 частей поделились!

То-то удивился Иван, даже на мерной выставке метку пальцем потрогал.

```
 5   |7
-49  |0,7142857...
 ---
  10
 - 7
  ---
   30
  -28
   ---
    20
   -14
    ---
     60
    -56
     ---
      40
     -35
      ---
       50
      -49
       ---
       ...
```



— Надо же, — говорит, — вместо того, чтобы пять аршин на семь частей делить, можно взять одну седьмую аршина пять раз. Ленты всякий раз одной длины будут.

Тут какой-то мальчонка мимо прошмыгнул, приостановился да крикнул:

— Хо! Человек-то подорожный на дробь дивится!

— Вон что... Дробь... Ну да, у них ведь всякую вещь зримо иль незримо на доли дробят — дробь и выходит. Ох, ты! Неужто это та самая **обыкновенная дробь**, за которой я столько вёрст отмахал?

А паренёк все ещё тут рядом стоит и поддакивает:

— Какая же ещё? Понятное дело, обыкновенная!

Радуется Иван! Как же — дроби обыкновенные нашёл.

Как тут не радоваться, даже вприсядку пустился! На шум лавочник обернулся.

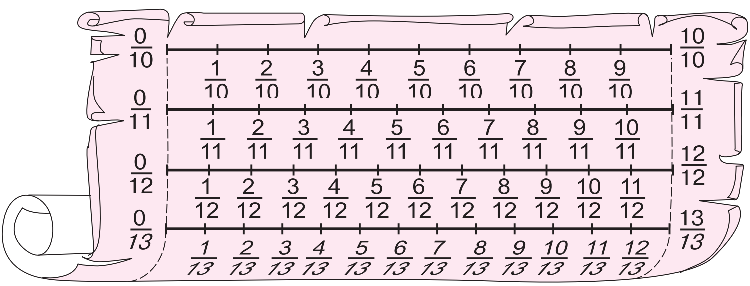
— Ну и царство-государство у вас, — говорит ему Иван-царевич, — все норовят кусочками купить — пироги ли, ленты ли.

Ну, я-то не промах, целый пирог купил, резать не стал. Да и $\frac{12}{4}$ пирога тоже не кусочками брал бы, взял бы целиком три пирога, и вся недолга. А коли мне $\frac{6}{4}$ пирога понадобятся, так я целый пирог возьму да к нему ещё половину. А ты-то, господин хороший, как 1 аршин отмеришь, или 1 аршин да ещё половину, или 3 аршина с семью десятыми? Если кусочками резать начнёшь, так товар испортишь! А?

— Не волнуйся, человек подорожный! Не испорчу я своего товара. 1 аршин — это моя целая мерка. Приложу ткань к аршину, что на мерной выставке, к первой линейке да и отрежу ровнёхонько. Если один аршин с половиною потребуется, так я снова ткань вдоль целого аршина натяну, но резать не буду, не-ет! По второй линейке с мерной выставки $\frac{1}{2}$ добавлю. После уж отрежу. Ну, а три аршина с семью десятыми? Что ж, три раза вдоль первой линейки ткань поприкладываю, после ещё отмерю — семь делений на последней линейке возьму.

— А если тебе кусок в $\frac{11}{12}$ аршин али в $\frac{5}{13}$ потребуется?

— Так у меня и другие мерные линейки имеются, смотри вот:



— Что ж, выходит, у тебя для любой длины мерка найдётся?

— Этого не знаю, хвастать не стану. Однако пока что с любой длиной справлялся.

Тут Иван-царевич решил к Бабе-Яге воротиться. Дело-то было сделано. Перво-наперво надо было ей гостинец обещанный доставить, а второе дело — больно Ивана-царевича Елена Прекрасная за сердце зацепила.

Вот пришёл он к Бабе-Яге. Так, мол, и так, говорит. А у той уж и самовар готов! Чаю с пирогом попили. Баба-Яга очень довольная осталась. И добр молодец, и обходителен, и разумен! Сам дроби добыл. Такого и дочке показать можно.

А Иван-царевич опять призадумался. Про свои натуральные числа вспомнил — он ещё в лавке сообразить успел, что их можно записывать с помощью обыкновенных дробей. Вот так, к примеру: $1 = \frac{4}{4}$; $3 = \frac{12}{4}$.

— Только к чему эта морока? — спрашивает. — То ли дело 1 или 3. Это куда проще!

— Простота, дитятко, не самое главное в жизни, — Баба-Яга отвечает, — наши дробные числа большую пользу приносят. Придёт время, ты и сам это поймёшь.

Тут посерьёзнела, посуровела Баба-Яга, ставни прикрыла, заслонку на печи задвинула да Ивану-царевичу на ухо шепнула:

— Числа, которыми в нашем царстве пользуются, называются **рациональными**. Это слово диковинное Елена откуда-то прознала. Рациональные — это значит разумные числа. На языке на каком-то, латинском что ли, так придумано: «рацио» — разум, дескать. Ты только, дитятко, не сказывай Елене Прекрасной до поры до времени, что я тебе этот секрет выболтала. А то кабы чего не вышло.

Иван Бабу-Ягу поблагодарил, поклонился ей трижды в пояс да сел писать памятную грамотку для своего царя-батюшки. Пишет, пишет, а как устанет — об Елене Прекрасной размечтается...

Обыкновенные дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{12}{4}$

a — **Числитель** показывает, сколько долей взяли

b — **Знаменатель** показывает, на сколько долей делили

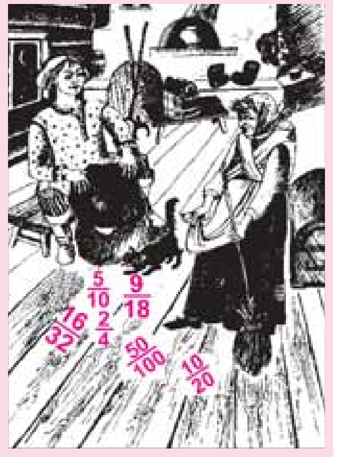
a и b — натуральные числа

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

(*Ты, читатель, грамотку рассмотри да рассуди, ладно ли её Иван-царевич составил. Всё ли главное, о чем разузнал, в неё записал, да ясными ли словами. Такие грамотки после каждой главы составлять полезно. Так уж ты, читатель, делай это, коли Иван позабудет.*)

ГЛАВА 2

ПРО ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ



Закончил Иван грамотку составлять, а после задумался. Дума его про родное тридесятое царство была. Про тамошние числа, они-то рациональные ли? Потом и про Елену Прекрасную вспомнил и собрался было к ней ехать. Но Баба-Яга его в ночное время со двора не пустила.

Делать нечего, улёгся Иван-царевич в постель, да не спится ему. Дай, думает, сложу в котомку дроби обыкновенные для царя-батюшки. Чтоб после на сборы времени не терять.

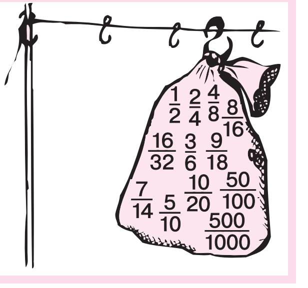
Встал, смотрит — в углу мешки лежат, дробями обыкновенными набитые, подле них верёвка натянута, а на верёвке крючки привязаны. Баба-Яга давно собиралась те мешки по крючкам развесить, да все недосу́г было.

Подхватил Иван мешок какой-то, глядь, а в нем дробей полным-полно. Ну, думает, это-то мне и надобно. Повесил мешок на верёвку к себе поближе, снова в постель улёгся. Заснул было.

Вдруг по избе треск да гром пошёл, да будто заплакал кто тоненьким голосом.

Вскочил Иван-царевич. Баба-Яга тоже проснулась, свечу засветила, на гостя цыкнула.

— Эх, — говорит, — дитятко ты малое да неразумное. Ты почто, — говорит, — мешок не на место повесил?



Сказала так и мешок Ивана-царевича на другой крюк перевесила. Вмиг все смолкло, и Иван-царевич, хоть и не понял ничего, а заснул крепким сном.

Утром проснулся он ранёшенько, умылся белёшенько. Баба-Яга его накормила-напоила и говорит:

— Приготовил ли ты дюжину дробей для батюшки?

— Приготовил, вон мешок на крючке висит.

— А почему дроби-то равные взял? Возьми уж разные! Дробей-то у меня не перечесть, не жалко!

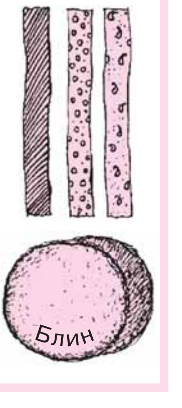
— Что ты, бабушка! Я разные дроби взял, сама погляди!

— По виду-то разные, да одну и ту же величину означают.

Дроби, которые обозначают одну и ту же величину, считаются равными.

— Как так?

— Так и быть, подсоблю я тебе, Иван-царевич. Люб ты мне, уж и не знаю почему. Подсоблю, а то как бы моя дочь Елена Прекрасная тебе от ворот поворот не дала. Бестолковых она, касатка моя, не любит. Научу тебя равные дроби распознавать.



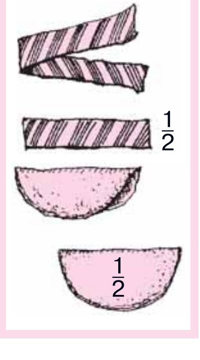
Дала Баба-Яга несколько лоскутков Ивану-царевичу, ровненьких, длины одинаковой. Да напекла блинов ему круглых, но есть не велела.

Начал Иван-царевич дроби из своего мешка доставать, проверять — и вправду равные ли они?

Достал $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{16}$. Баба-Яга ему помогала да приговаривала:

— Полоска лоскутная — это целое, это 1. Теперь, касатик, на знаменатель глянь. Знаменатель-то 2 что означает?

— Что лоскут на две доли разделить надобно. А числитель 1 подсказывает, что потом одну только долю взять.



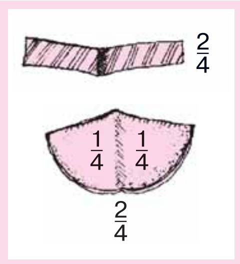
— Так что ты пень-пнем стоишь? Сгибай полоску-то! Чай, не зря я тебе пособие наглядное изготовила.

Перегнул Иван-царевич лоскут пополам, да и блин тоже... Половинки получил.

— Ай, да молодец! Справился! Теперь бери $\frac{2}{4}$. Что это означает, смекаешь?

— Весь лоскут или блин на 4 доли поделить надо, а взять из них только две.

— А сможешь ли блин да лоскут на 4 доли разделить?



— Чего ж тут не смочь? На две-то доли они уже разделены. Согну каждую половину ещё пополам. Вот и вся недолга.

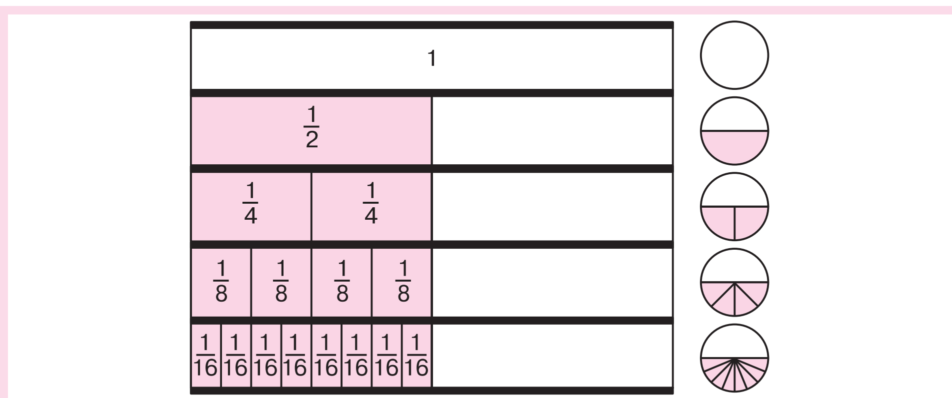
И начал Иван-царевич дальше лоскутки да блины сворачивать.

Как ни крутил — и так, и эдак... чем только половину лоскута да блина ни мерил, ни пересчитывал — вторыми долями, четвёртыми, восьмыми иль ещё меньшими.

Чем на меньшие доли делил, тем больше их получал. Смекнул тут Иван-царевич, что

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}.$$

И что заметил! Знаменатели у этих дробей всё растут. Так ведь и числители тоже на месте не стоят. Увеличился знаменатель в два раза, глядь, — и числитель точнёхонько в два раза увеличился. Поэтому дроби эти хоть по-разному и записаны, а все половинку лоскута или блина означают.



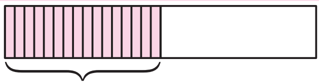
Баба-Яга слушает да улыбается. Довольная, значит. Да углядела вдруг, что дробь из мешка выкатилась. Знаменатель у неё 32 был, а числитель не разобрать — стёрся. В тесноте-то чего не бывает!

— Ну-ка, Иван-царевич, надпиши числитель заново!

Ивану-царевичу надоело лоскуты сворачивать-разворачивать да доли пересчитывать. И вправду — сколько можно! Не всю же жизнь так. Стал он затылок чесать, думу думать: $\frac{8}{16} = \frac{?}{32}$.

Перво-наперво, сообразил он, что $32 = 16 \cdot 2$.

А дальше уж легко пошло:



$\frac{16}{32}$

$$\frac{8}{16} = \frac{8 \cdot 2}{16 \cdot 2} = \frac{16}{32}$$

Так оно и правильно было!

Стала Баба-Яга совсем довольная. А Иван-царевич тут её и спрашивает:

— Что ж выходит, бабушка: $\frac{1}{2} = \frac{16}{32}$? $\frac{1}{2} = \frac{32}{64}$?

Как до этого без блинов и лоскутов дойти можно, как такое получишь? Так, что ли: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 32}{2 \cdot 32} = \frac{32}{64}$?

(*Видишь, читатель, Иван знаменатель в 32 раза увеличил, да и про числитель не забыл.*)

Запустил Иван-царевич руку в мешок, ещё тройку дробей вытащил: $\frac{9}{18}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{14}$.

Вытащил, да так рассудил:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

— Тройка-то, на которую числитель и знаменатель умножаются, то и означает, что половину лоскута на три доли дополнительно разделили, а после тех шестых долей три взяли.

Тут уж Иван и другие дроби быстро уравнял:

$$\overset{\cdot 9}{\underset{\cdot 9}{\frac{1}{2} = \frac{9}{18}}}; \qquad \overset{\cdot 7}{\underset{\cdot 7}{\frac{1}{2} = \frac{7}{14}}}.$$

(*Ты, читатель, с другими дробями из мешка то же самое проделай.*)

Баба-Яга Ивана похваливает:

— Ай, разумник! Ай, соколик! Ай, зятёк любимый!

А Иван-царевич рад-радехонек, старается пуще прежнего:

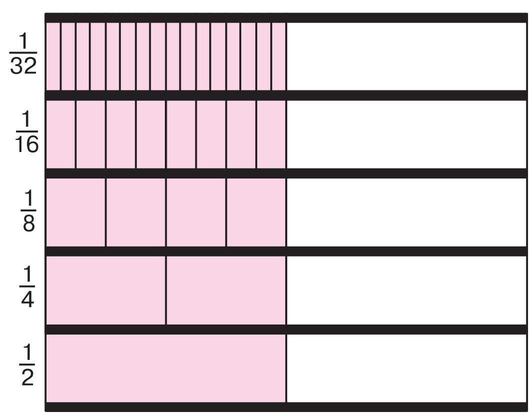
$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}=\frac{16}{32}.$$

— Что, — говорит, — будет, бабушка, коли запись мою справа налево прочитать?

Сказал, посмотрел, да вот что увидел:

$$\frac{16}{32}=\frac{8}{16}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Пока он делением занимался, числители и знаменатели на 2 делил, доли на грамотке, как волшебные, по две склеивались, укрупнялись, значит. Это Баба-Яга чуть подколдовывала.



А Иван в это время так вот написал:

$$16:32=8:16=4:8=2:4=1:2.$$

Потому так написал, что хорошо связь между дробью и делением понял, да к месту вспомнил:

При делении можно делимое и делитель в одно и то же число раз увеличить (уменьшить). От этого результат деления не изменится.

Погодя ещё и грамотку составил:

$$\frac{2}{4} \underset{\cdot 4}{\overset{\cdot 4}{=}} \frac{8}{16}; \qquad \frac{8}{16} \underset{:4}{\overset{:4}{=}} \frac{2}{4}.$$

Баба-Яга довольнёхонька.

Ну, ещё бы! Иван-царевич сам додумался до *основного свойства дроби*, которое в их царстве золотым называют:

Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной;

если числитель и знаменатель обыкновенной дроби разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

Баба-Яга давай Ивана опять нахваливать:

— Ай, молодец, ай, разумник! Верно, вы с Еленой Прекрасной поладите, если ты все её задания мудрёные выполнишь.

Иван-царевич речь про задания мудрёные на ус намотал.

— Не зря, знать, у меня ноги не идут. Пока все как есть не разберу, нечего к Елене Прекрасной и на глаза казаться.

Так, значит... Чтобы из дроби $\frac{1}{2}$ получить равную ей дробь $\frac{8}{16}$, числитель и знаменатель умножаем на 8. Да и наоборот можно: если числитель и знаменатель дроби $\frac{8}{16}$ разделить на 8, получим равную ей дробь $\frac{1}{2}$.

Делим мы числитель да знаменатель каждой дроби на одно и то же число. Когда это делим-то? Тогда, когда есть у числителя да знаменателя общий делитель. Тому делителю числитель да знаменатель кратные! Вот и выходит:

Деление числителя и знаменателя обыкновенной дроби на одно и то же натуральное число называют сокращением дроби.

$$\frac{8}{16} \overset{:8}{\underset{:8}{=}} \frac{1}{2}; \quad \frac{7}{14} \overset{:7}{\underset{:7}{=}} \frac{1}{2}; \quad \frac{50}{100} \overset{:50}{\underset{:50}{=}} \frac{1}{2}.$$

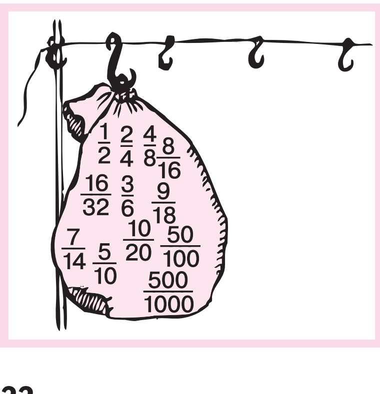
А уж $\frac{1}{2}$ — **дробь несократимая.** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{7}$ — тоже несократимые дроби, числитель и знаменатель у них — числа взаимно простые.

(*А ты, читатель, придумай, как объяснить, что такое сократимая дробь. Рассмотри дроби, что в этой книге встретил, и скажи, какие из них сократимые, а какие несократимые.*)

Разобрался с несократимой дробью Иван, да говорит сам себе:

— Вот ведь только сейчас и понял, с какой-такой стати вчера стон в избе стоял. Как Баба-Яга мешок-то мой перевесила, так все и стихло. Перевесила-то она мешок как раз на своё место.

Потому, знать, что **все дроби из этого мешка одну величину изображают:** половину блина, половину лоскута или ещё чего половину. Все дроби из этого мешка одно число представляют.



Место мешку на верёвке можно найти по любой дроби из мешка. Сподручнее всего для этого дробь $\frac{1}{2}$ и взять!

Знаменатель 2 — наименьший из всех знаменателей тех дробей, что в мешке есть. Надвое дробить всего проще! Вон что выходит — одну вторую можно из мешка вынуть и у крючка, на котором мешок висит, приладить. Остальные-то пусть в мешке полежат. Если какая потребуется, мы её в миг вытащим. А если каких в мешке нет, так и добавить недолго. Вот возьму и ещё пару дробей в мешок положу, войдут, поди.

Сказал так и сунул в мешок две дроби:

$$\frac{\ldots}{12} \quad \text{и} \quad \frac{35}{\ldots}.$$

(*Ты, читатель, допиши дроби Ивановы да подумай ещё, найдётся ли в том мешке местечко для дробей* $\frac{\ldots}{13}$ *и* $\frac{0}{\ldots}$.)

Решил Иван-царевич тем временем дюжину дробей для батюшки собрать, но уже таких, чтоб неравные были.

Перво-наперво $\frac{1}{2}$ в котомку бросил. Запустил руку в другой мешок да вытянул оттуда дробь $\frac{1092}{1001}$.

— Ох, ты, — говорит, — надо бы попроще чего, как бы батюшка не испугался.

Решил было эту дробь равной заменить, такой, чтоб не так страшна была. Да как? Числитель и знаменатель у дроби $\frac{1092}{1001}$ ни на 2, ни на 3, ни на 5 не делятся.

— Похоже, дробь-то эта несократимая! Ну и куда ж её теперь? Нешто назад, в мешок, положить, а мешок на крюк повесить, чтоб не мешался? Не хочу, — говорит, — из этого мешка дробь для батюшки брать.

Решил было так и сделать, да место, куда крючок для того мешка прицепить, найти не может. Сложно ему показалось единицу на 1001 долю делить да 1092 доли отсчитывать.

Смотрела Баба-Яга на это, смотрела, да не вытерпела и говорит:

— Ты, чай, науку о делимости чисел проходил? Что делать, коли не можешь с ходу **общие делители числителя и знаменателя** с помощью признаков делимости отыскать?

— Знаю, — отвечает Иван, — на простые множители сперва разложу, потом общие множители найду да на них числитель и знаменатель дроби разделю:

$$\frac{1092}{1001} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{13}}{\cancel{7} \cdot 11 \cdot \cancel{13}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{11} = \frac{12}{11}.$$

— А одним-то махом мог бы эту дробь в несократимую превратить? Чай, слыхал про наибольший общий делитель?

— Это про НОД что ли? Как не слыхать — слыхал:

$$\text{НОД}(1092, 1001) = 7 \cdot 13 = 91; \qquad \frac{1092}{1001} \overset{:\,91}{\underset{:\,91}{=}} \frac{12}{11}.$$

Хотел было Иван $\frac{12}{11}$ в котомку для батюшки сложить, да передумал. Решил сначала ещё сколько-то мешков по крюкам развесить.

Перво-наперво нашёл место, где крючок $\frac{12}{11}$ для дроби крепить, хоть и нелегко было. Мешок на крюк навешивает, а сам думает: «На что ж эта верёвка, Бабой-Ягой натянутая, похожа? Знакомая штука вроде, а вспомнить не могу!»

Взялся было за другой мешок, глядь, а под ногами дроби лежат, знать, из мешков высыпались: $\frac{12}{33}$, $\frac{28}{77}$, $\frac{36}{99}$, $\frac{44}{91}$.

— Непорядок, — говорит, — надо их по мешкам разложить.

А Баба-Яга поддакивает:

— Только сперва, соколик, распознай, из одного ль мешка те дроби высыпались или из разных?

Начал Иван дроби крутить-вертеть:

$$\frac{12}{33} \overset{\cdot\,?}{\underset{\cdot\,?}{=}} \frac{28}{77}; \qquad \frac{12}{33} \overset{:\,3}{\underset{:\,3}{=}} \frac{4}{11} \overset{\cdot\,7}{\underset{\cdot\,7}{=}} \frac{28}{77}.$$

— Вот, — говорит, — дробь $\frac{4}{11}$ несократимая, помогла мне определить, что дроби $\frac{12}{33}$ и $\frac{28}{77}$ из одного мешка выпали — значит, равны они меж собой.

Нашёл Иван-царевич мешок для тех дробей равных, на нужное место повесил.

За дроби $\frac{36}{99}$ да $\frac{44}{91}$ взялся. Разобрался с ними и положил, куда следует.

(*Ты уж сам, читатель, сообрази, в какой мешок.*)

Все остальные мешки по крючкам пристроил, взял из разных мешков по одной дроби. Несократимые, понятное дело, выбрал, сложил в котомку для царя-батюшки. После с Бабой-Ягой прощаться стал, припозднился, мол, ехать пора. Но грамотку памятную оставить не позабыл.

Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби разделить на одно и то же натуральное число (общий делитель числителя и знаменателя), то получится дробь, равная данной.

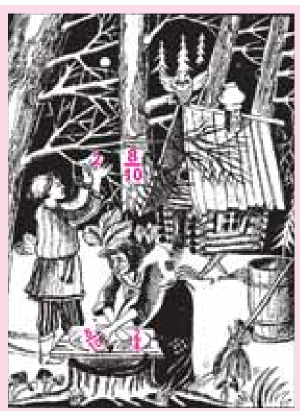
ГЛАВА 3

КАК ПРОВЕРИТЬ, ЯВЛЯЮТСЯ ЛИ ДВЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ РАВНЫМИ

А Бабе-Яге и прощаться недосуг — у неё полное корыто дробей нестиранных накопилось. Что тут будешь делать? Помог Иван бабушке. Она стирала, а он воду таскал, дроби по деревьям развешивал, чтоб просохли.

Да ненароком свою грамотку про равенство дробей замочил. Ну и повесил её вместе с дробями сохнуть.

— Как все дроби высохнут, так их прибрать надо будет, — думает, — по мешкам равные дроби разложить, чтоб в избе полный порядок был.



А дробей-то целая куча. Маета одна!

Задумался Иван.

— Нет ли, — говорит, — какого другого правила, чтоб равные дроби распознать?

Тут и грамотка его подсохла. Стал он её в котомку укладывать, да прежде посмотрел на запись внимательно. И вот что высмотрел:

$$\frac{2}{4} \qquad \frac{8}{16}$$

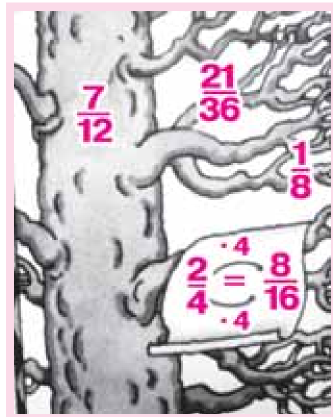
$$8 \cdot 4 = 32, \qquad 2 \cdot 16 = 32.$$

Глазам своим не поверил, стрелки рукой потрогал. Но не исчезли они. Знать, неспроста появились и не зря крест-накрест показывали. А произведения чисел, на которые стрелки показывали, равны оказались. Разве ж это случайно?

— Неужто, — говорит, — у равных дробей перекрёстные произведения равные?

Проверил Иван догадку эту на известных ему парах равных дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{9}{18}$; $\frac{12}{33}$ и $\frac{28}{77}$ и в догадке своей ещё больше укрепился.

(А ты, читатель, согласен с догадкой Ивана? Может, перекрёстные произведения не только у равных дробей равны?)



Взял Иван из корыта две дроби, первые попавшиеся, произведения крест-на-крест соорудил:

$$\frac{35}{49} \qquad \frac{20}{28}$$

$$20 \cdot 49 = 980, \qquad 35 \cdot 28 = 980.$$

— Вот, — говорит, — перекрестные произведения равны, стало быть, равны и дроби:

$$\frac{35}{49} = \frac{20}{28}.$$

Ещё пару дробей вытащил.

$$\frac{7}{9} \qquad \frac{4}{5}$$

$$4 \cdot 9 = 36, \qquad 7 \cdot 5 = 35.$$

Перекрестные произведения оказались не равны, стало быть, не равны и дроби:

$$\frac{7}{9} \neq \frac{4}{5}.$$

После для верности пары $\frac{35}{49}$ и $\frac{20}{28}$; $\frac{7}{9}$ и $\frac{4}{5}$ по-старому проверил:

$$\frac{35}{49} \overset{:7}{=} \frac{5}{7} \overset{\cdot 4}{=} \frac{20}{28}.$$

Значит, вправду $\frac{35}{49} = \frac{20}{28}$.

С первой парой разобрался, потом за вторую взялся:

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{35}{45}; \quad \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{36}{45}; \quad \frac{35}{45} \neq \frac{36}{45};$$

значит, $\frac{7}{9} \neq \frac{4}{5}$.

— Вот хорошо, — думает Иван, — теперь я с помощью перекрёстных произведений про любые две дроби сказать могу, равны они или нет. Сказал так и памятную грамотку составил.

Глава 3. Как проверить равенство двух дробей

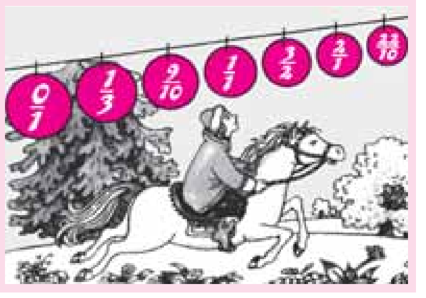
(*Честно сказать, читатель, Иван тут вывод сделать поторопился. Только примеров маловато, чтоб грамотку писать. Однако вывод у Ивана верный.*)

Две обыкновенные дроби равны тогда и только тогда, когда произведение числителя первой дроби на знаменатель второй равно произведению числителя второй дроби на знаменатель первой, то есть когда равны их перекрёстные произведения.

Тут отпустила Баба-Яга Ивана, сказала, что и без него дроби приберёт, — памятная грамотка ей поможет. А напоследок строго-настрого наказала, чтобы он по дороге разок назад оглянулся.

ГЛАВА 4

КАК ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ ПРЕВРАТИТЬ В ОБЫКНОВЕННЫЕ, А ОБЫКНОВЕННЫЕ — В ДЕСЯТИЧНЫЕ



Скачет конь по лесам, по полям, по перелесочкам. Вспомнил Иван, что оглянуться надо. Оглянулся — видит, никакой избы нет, одна верёвка от неё и осталась, крючков на ней появилась тьма-тьмущая, возле крючков дроби прямо огнём горят.

— Ох, ты! — Иван говорит. — Верёвка-то — чисто числовой луч!

Только числа на этом луче дробью записаны. Мы на числовом луче натуральные числа отмечали, да десятичные дроби, да нуль. А у них точки на луче обыкновенными дробями отмечены. Вот и вся разница!

А если подумать, то вон они у них, наши натуральные числа-то:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \ldots$$

И для нуля крючочек есть: $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \ldots$ Вот только меток, которые десятичным дробям соответствуют, вроде как нет.

Пригляделся ещё.

— Как нет, — обрадовался, — вот же они: $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ...

0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{0}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$

Ведь и $\frac{1}{10}$ и 0,1 означают, что единичный отрезок на луче на десять равных долей поделили да одну долю взяли. $\frac{2}{10}$ и 0,2 то значат, что тех десятых долей две взято. Глянь-ка, и вон какой крючок имеется: $\frac{3}{100} = 0{,}03$.

Пришпорил Иван коня, поскакали дальше. Конь скачет, а Иван думу думает. Сперва об Елене все, а после уж и о том, что всякую дробь из его родного тридесятого царства можно по-елениному записать да часто и не одним способом:

$$0{,}7 = \frac{7}{10}; \quad 0{,}5 = \frac{1}{2}; \quad 0{,}032 = \frac{32}{1000} = \frac{16}{500} = \frac{8}{250}.$$

А как до этого додумался, так и другая мысль в голову пришла: **любую ли обыкновенную дробь можно в виде десятичной дроби представить?**

— Пока ответ не найду, пока все до тонкостей не разберу, — думает, — Елене на глаза и показаться не покажусь.

Соскочил с коня Иван, проверкой занялся, да при этом одни только несократимые дроби выбрал.

(*Подумай, читатель, почему, да рассмотри Ивановы записи и, если нужно, свои добавь. Подумай, какие десятичные дроби у Ивана получились?*)

$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5;$

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}3333\ldots;$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \underline{-0} & \overline{0{,}3\ldots} \\ 10 & \\ \underline{-9} & \\ 10 & \\ \underline{-9} & \\ \ldots & \end{array}$$

$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}6666\ldots;$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \underline{-0} & \overline{0{,}6\ldots} \\ 20 & \\ \underline{-18} & \\ 20 & \\ \underline{-18} & \\ \ldots & \end{array}$$

$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25;$ $\quad \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75;$

$\frac{1}{5} = 1 : 5 = 0{,}2;$ $\quad \frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4;$ $\quad \frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6;$ $\quad \frac{4}{5} = 4 : 5 = 0{,}8;$

$\frac{1}{6} = 1 : 6 = 0{,}16666\ldots$

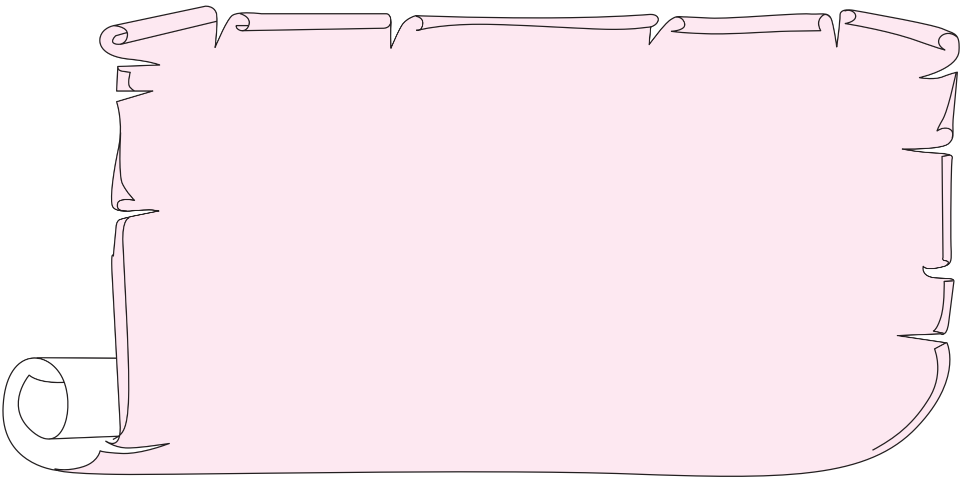
$$\begin{array}{r|l} 1 & 6 \\ \underline{-0} & \overline{0{,}16\ldots} \\ 10 & \\ \underline{-6} & \\ 40 & \\ \underline{-36} & \\ 40 & \\ \ldots & \end{array}$$

$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}83333\ldots$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 6 \\ \underline{-0} & \overline{0{,}83\ldots} \\ 50 & \\ \underline{-48} & \\ 20 & \\ \underline{-18} & \\ 20 & \\ \ldots & \end{array}$$

$\frac{1}{7} = \ldots;$ $\quad \frac{2}{7} = \ldots;$ $\quad \frac{3}{7} = \ldots;$ $\quad \frac{4}{7} = \ldots;$ $\quad \frac{5}{7} = \ldots.$

(*Всегда ли обыкновенную дробь можно превратить в десятичную? Можно ли по одному только виду дроби, например, $\frac{14}{3}$, сказать, в какую десятичную дробь она превратится — в конечную или в бесконечную периодическую? Выводы свои не забудь в грамотку записать.*)



Что, друг-читатель, произошло с нашим Иваном-царевичем? Оказался Иван в новой обстановке (ещё бы — другое царство со своими обычаями, со своим языком особым), да и цель перед ним стояла очень уж неопределённая (привезти Царю-батюшке какие-то обыкновенные дроби). И, главное, от собственных прошлых знаний вроде бы никакой пользы: знает Иван-царевич про десятичные дроби, однако понять поведение других людей — как они в своих лавках считают да меряют — не может.

Понятно, обескуражен был поначалу Иван-царевич. Можно было бы, конечно, сразу повернуть назад (жили, мол, раньше без всяких там обыкновенных дробей — и дальше проживём). Можно было бы с полдороги домой отправиться (удалось же собрать полную котомку обыкновенных дробей; ему ведь сказали: «Принеси!» — так он бы и принёс, как велено).

Ан нет, Иван-царевич по-другому поступил. Стал он разбираться, почему в царстве Елены Прекрасной без обыкновенных дробей — шагу не ступить. Да и сами обыкновенные дроби — хитрая, видно, штука. Действительно, как это так получилось? Собрал в котомку, казалось бы, много обыкновенных дробей, а на деле оказались они разными только по виду. Это что ж такое делается: в упор смотришь, да то, что нужно, не сразу видишь. Интересно! И задумался Иван-царевич.

Дальше — больше. Сообразил вроде бы Иван-царевич, как все равные дроби к одной дроби привести. Да тут случайно вытащил из мешка дробь с такими большими числителем и знаменателем, что прямо оторопь берет. Как с ней справиться? Будет ли она равна предыдущим? И опять задумался Иван.

Наконец, уж совсем стало ясно Иван-царевичу, как равные дроби распознавать. Так нет! И тут его сомнение взяло: может, и другой какой способ для этого имеется? Любопытно же! Оказалось, что и другим способом можно проверить равенство двух дробей.

Да, видно, Иван-царевич не промах. Вот и мы, действуя вместе с ним в этой книге, кое-чему можем научиться. Изучать да исследовать — значит совсем по-другому ко всему относиться, в том числе и к задачам. Если старым способом задача не решается, то нужно подумать, почему старый способ не годится, и новый способ подыскать. Если сам себе вопросы задавать начнёшь, то и задачу совсем в ином свете увидишь. Если чего-то не знаешь, то можно и догадку (по-научному сказать — гипотезу) выдвинуть, а потом её со всех сторон обсудить. Если задача слишком строптивая, то можно к ней приёмы-ключики (их эвристиками называют) подобрать.

ГЛАВА 5

КАКИЕ ДРОБИ НАЗЫВАЮТ ПРАВИЛЬНЫМИ, КАКИЕ — НЕПРАВИЛЬНЫМИ

Вскочил на коня Иван, и пошёл конь по горам, по долам рысью. Конь скачет, а Иван ему все, что про Елену узнал, рассказывает, и про дроби обыкновенные, конечно.

— Теперь, — говорит, — я, должно, все секреты дробей разведал, все до конца узнал!

Встал от таких речей конь как вкопанный, да и говорит человеческим голосом:

— Не по нраву мне речи твои, Иван-царевич. Или ты не знаешь, что все до конца узнать невозможно?

А что дробей обыкновенных касается, так я тебе вот что скажу: я тоже не даром время в стойле тратил, тоже дробями интересовался, тоже кое-что разузнал.

— Так скажи, сделай милость.

— Узнал я, что есть **дроби правильные**, а есть и такие, которые **неправильными дробями** называют.

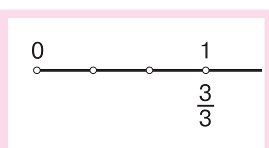
— Как так?

— Ты возьми, к примеру, дробь $\frac{14}{3}$ да попробуй ей на числовом луче место найти. Без этого мои слова не поймёшь.

— Где ж я тебе числовой луч возьму? Неужто к Бабе-Яге возвращаться?

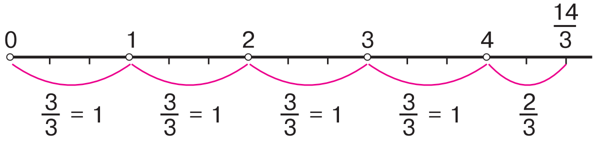
— Зачем? Вон солнечный лучик через листву пробивается.

— А что, сгодится!



Поймал Иван-царевич лучик, отметил на нем единицу да раздробил её на три доли.

Отложил на луче 14 таких третьих долей. Оказалось, что $\frac{14}{3}$ — это четыре целых единицы и две третьих доли.



И заметил он, что 4 и $\frac{2}{3}$ сподручнее в работе, чем $\frac{14}{3}$: ведь 4 и $\frac{2}{3}$ легче было бы на луче откладывать.

А конь говорит:

— Ну, видишь, $\frac{14}{3}$ — число, большее единицы.

— Я такие дроби уж встречал: $\frac{6}{4}$, к примеру, или $\frac{12}{4}$.

— Во-от! А ещё бывают дроби, которые единице равны, к примеру $\frac{4}{4}$.

Неправильной обыкновенной дробью называется дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему.

Неправильная обыкновенная дробь обозначает число, которое больше или равно 1.

Сказал так конь, да ещё добавил:

— И всегда неправильную обыкновенную дробь записать по-другому можно:

$$\frac{12}{3} = 4; \quad \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}.$$

Но только договорились здешние жители делать такую запись:

$$\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

— Ну и число! И не целое, и не дробь, смешанное какое-то...

— Как ты догадался? Здешние жители про него так и говорят: $4\frac{2}{3}$ — **смешанное число**. 4 целой частью называется, а $\frac{2}{3}$ — дробной. А читают запись так: «четыре целых и две третьих» или «четыре целых две третьих».

К слову сказать, если Елена попросит смешанное число $2\frac{5}{6}$ в дробь обернуть, ты как — сумеешь?

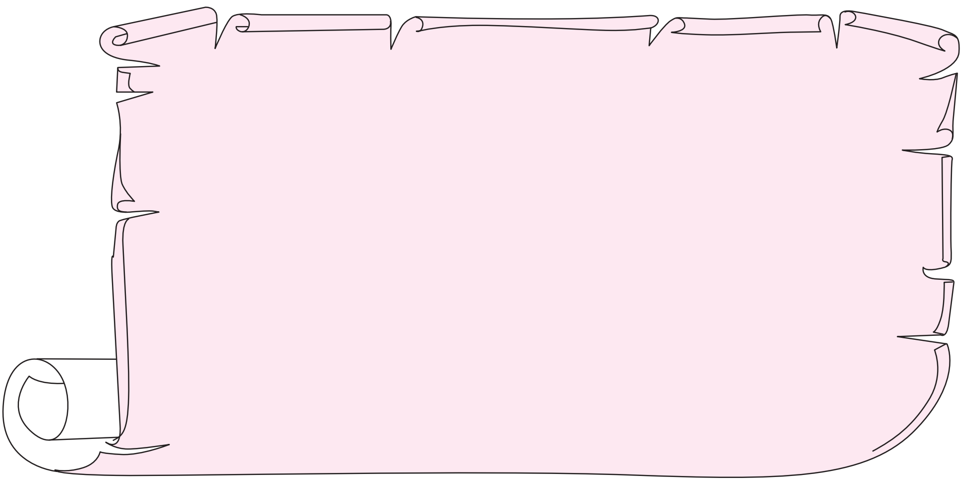
— Попробовать надо... $2\frac{5}{6}$, говоришь? Шестыми долями тут мерено, значит, в двух целых тех шестых долей вот сколько: $2 \cdot 6 = 12$ долей. Да ещё 5 шестых долей в дробной части. Всего-то в числе $2\frac{5}{6}$ содержится $2 \cdot 6 + 5$, то есть 17 шестых долей:

$$2\frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{17}{6}.$$

Вот и обернулось смешанное число неправильной дробью!

Конь дальше скакать собрался, а Иван-царевич просит:

— Погоди чуток, я грамотку памятную составлю о том, что в дороге узнал.



ГЛАВА 6
СРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Скоро сказка сказывается, да не скоро дело делается. Вышла Ивану-царевичу задержка в пути. Углядел он на дороге лесной под большой елью воронёночка. Того воронёнка коршун-злодей из гнезда выкрал, да и обронил. Подобрал Иван-царевич птенца, покормил хлебушком.

— Чего с бедолагой делать-то, — думает, — где его гнездо искать?

Смотрит, у птенца к лапке тряпица привязана, а на ней дроби написаны: $\frac{9}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{27}{32}$, $\frac{1}{2}$.

— Сказывала мне матушка, — говорит воронёнок, — какая дробь что значит...

Матушка-то сказывала, да воронёнок все позабыл. Чего с него и взять-то — махонький! Одно только помнил — какая-то из дробей расстояние от самой большой ели до гнезда означает.

— Уж не под этой ли самой большой елью я тебя подобрал?

Тут, откуда ни возьмись, шишка еловая — прямо в лоб Ивану! Поднял тот голову, а на ели белка сидит, хохочет-заливается. Ну, Иван на пересмешницу сердиться не стал, про гнездо спросил.

Белка ещё шишку кинула:

— Ель, — говорит, — самая большая и есть! Отметь, — говорит, — шишками $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$ вдоль дороги, между ними гнездо и сыщется.

— Слышь, белка, $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$ от чего? От аршина, саже́ни или от чего другого? — Иван спрашивает.

— Да от версты. А ну-ка, лови клубок, в нем верёвочки ровно на версту.

Кинула ему белка бечёвки клубок. Иван клубок поймал, да удивился:

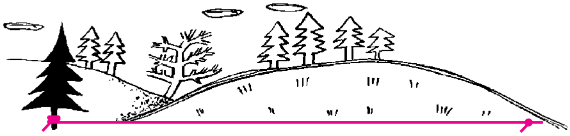
— Неужто тут на целую версту хватит? Не может быть!

Белка хохочет:

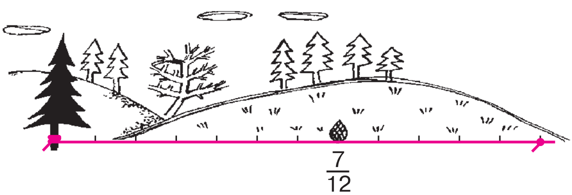
— Да ты попробуй. Клубочек-то волшебный!

Взял Иван бечёвку, конец к ели привязал. И тут клубок сам покатился по дороге, растянул верёвочку ровно на версту.

Думать стал Иван, в которых местах белкины шишки на дорогу положить, числа $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$ пометить.



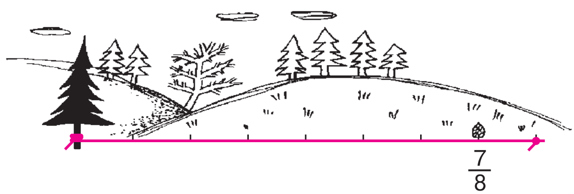
Сперва-то показалось ему, что $\frac{7}{12}$ больше, чем $\frac{7}{8}$, будет. А потом решил, что нечего горячку пороть, начал все по правилам делать. Стал Иван думать, как сложить бечёвку. Глядь, а на ней узелки сами завязались, да так, что 12 частей получилось.



Отсчитал семь отметинок, шишку положил.

— Вот, — говорит, — $\frac{7}{12}$ версты и есть!

Потом место для $\frac{7}{8}$ нашёл.

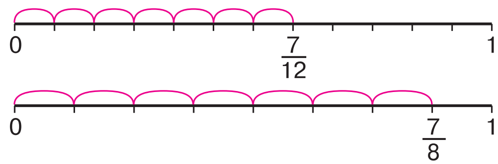


— Ох, ты, — говорит, — $\frac{7}{12}$ меньше, чем $\frac{7}{8}$ оказались!

Раздосадовался Иван — душа к Елене зовёт, воронёнка в гнездо доставить надобно, а тут невесть что делается.

После подумал маленько, да и говорит:

— Нечего досадовать! Всё как есть у меня правильно. Брал я всякий раз по 7 долей, ан доли-то разные! Сперва доли в одну двенадцатую отмерял, а уж потом восьмушки. А восьмушка-то поболе двенадцатой доли будет! Стало быть, $\frac{7}{12} < \frac{7}{8}$. Успокоился Иван, да на земле картину нарисовал для верности:



А белка на ели хохочет:

— Эх ты, рисовальщик, картинку сладил, а толку что?

— Как это что? Я вот что понял:

Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше.

Или правило моё неладное?

— А хоть и ладное — толку-то нет. Гнезда не видно!

— Кабы у всех воронихиных дробей семёрки в числителях были, так я по тому правилу гнездо вмиг бы нашёл. А так что ж — ещё искать придётся. Искать, которой из дробей $\frac{9}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{27}{32}$, $\frac{1}{2}$ между шишек, то есть между числами $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$, место.

А белка заливается:

— Ты, поди, думаешь, что тебя Елена Прекрасная век дожидаться станет?

— Так и воронёночка махонького не бросишь!

— Вон ты какой... — белка говорит.

— Уж каков уродился.

Посмотрел Иван вокруг — лес стоит густющий, кроны на деревьях большущие. Если каждое дерево осматривать — жизни не хватит.

— Эх, — говорит, — как ни крути, видно, дроби воронихины перебирать надо, да с $\frac{7}{8}$ и $\frac{7}{12}$ сравнивать. Начну с первой. Дробь $\frac{9}{8}$ с дробью $\frac{7}{8}$ сравнивать легко: $\frac{9}{8} > \frac{7}{8}$. Доли восьмые в обеих дробях значатся, да у воронихиной дроби те восьмые доли 9 раз взяты, а у дроби, что при дальней шишке, 7 раз. Эй, белка, я ещё вот о чём догадался:

Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой больше числитель.

Вот дробь-то $\frac{9}{8}$ дальше шишки с дробью $\frac{7}{8}$ и очутилась!

— Да не только дальше шишки, а и дальше узла, что ты завязал.

— И то верно! Можно было сразу рассудить:

Всякая неправильная дробь больше всякой правильной!

За другую дробь Иван-царевич взялся, за $\frac{1}{2}$. Да не случайно, а подумавши. Эту дробь отметить на бечёвке легко было — посередине между елью и узлом.

— Чую, — говорит, — не попадёт между белкиными шишками. Да и точно! У меня ведь середина уж угольком помечена. Вот они, отметки: $\frac{4}{8}$ и $\frac{6}{12}$. Так ведь $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$.

А $\frac{6}{12}$ с той дробью, которая ближней шишкой обозначена, с дробью $\frac{7}{12}$ то есть, чего и не сравнить! Ясно, что $\frac{6}{12} < \frac{7}{12}$. Значит, и $\frac{1}{2} < \frac{7}{12}$. И хоть удобно дроби с $\frac{1}{2}$ сравнивать, да не $\frac{1}{2}$ гнезду адрес. Глянул Иван на оставшиеся дроби $\frac{1}{6}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{27}{32}$, да и говорит:

— Я $\frac{1}{2}$ только что отбросил. А с $\frac{1}{6}$ вот что получается: $\frac{1}{6} < \frac{1}{2} < \frac{7}{2}$. Выходит, и $\frac{1}{6}$ нам без надобности:

$$\frac{1}{6} < \frac{7}{12}.$$

Ничего не попишешь, дальше искать надо!

Взялся Иван-царевич за $\frac{15}{16}$, стал эту дробь с $\frac{7}{8}$ сравнивать.

— Дроби, — говорит, — эти похожие. У той и другой числитель на единицу меньше знаменателя. Обе они к узлу моему, к единице, близёхонько находятся. Да чего зря говорить, $\frac{15}{16} > \frac{7}{8}$. И все тут!

Белка хихикать перестала, по-серьезному спрашивает:

— Это ты по какому правилу определил?

— Смекнул я, что из этих двух дробей $\frac{15}{16}$ **ближе к единице будет, чем** $\frac{7}{8}$. Она ведь всего-то на $\frac{1}{16}$ версты до узла не дотянула.

— Хорошо смекнул, ничего не скажешь. А гнездо где?

— Теперь-то ясно, где. Одна дробь осталась: $\frac{27}{32}$. Последняя! Где ей место, там гнездо и есть!

Отмерил Иван $\frac{27}{32}$ версты от ели, да руками развёл. Гнезда-то там и в помине не было! Ну, дела-а...

— Неужто я ошибся в чем?

Проверять кинулся. Все приёмы да способы сравнения дробей, какие применял, вспомнил:

- сравнение знаменателей при равных числителях;
- сравнение числителей при равных знаменателях;
- сравнение правильной дроби с неправильной;
- сравнение дробей с $\frac{1}{2}$;
- сравнение дробей с единицей;
- сравнение дополнений дробей до единицы.

(*Ты, читатель, тоже те приёмы вспомни и проверь, попадает между шишками дробь* $\frac{27}{32}$ *или нет? Проверь, а потом с Ивановыми рассуждениями сравни.*)

Иван-то вон как рассудил. Он привёл все дроби к одному знаменателю:

$$\frac{7}{12},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{27}{32};$$

$$\text{НОК}(12, 8, 32) = 96;$$

$$\frac{7^{\backslash 8}}{12} = \frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{56}{96};\quad \frac{7^{\backslash 12}}{8} = \frac{7 \cdot 12}{8 \cdot 12} = \frac{84}{96};\quad \frac{27^{\backslash 3}}{32} = \frac{27 \cdot 3}{32 \cdot 3} = \frac{81}{96};$$

$$\frac{56}{96} < \frac{81}{96} < \frac{84}{96};\qquad \frac{7}{12} < \frac{27}{32} < \frac{7}{8}.$$

(*А ты, читатель, по Иванову способу дроби сравнивал или нет? Может быть, ты свой собственный способ сравнения ворониxиных дробей придумал?*)

Иван-то, подумав, ещё и так свою работу проверил:

$$\frac{7}{8} = 7 : 8 = 0{,}875;$$

$$\frac{7}{12} = 7 : 12 \approx 0{,}583;$$

$$\frac{27}{32} = 27 : 32 \approx 0{,}844.$$

(*Как думаешь, читатель, всегда ли этот способ удобно применять?*)

Закручинился Иван, сил нет. Ну, как же — душа к Елене зовёт, да и воронёнка бросить нельзя — вон он, совсем пригорюнился.

— Вот незадача-то! Ведь точно же расстояние в $\frac{27}{32}$ версты больше $\frac{7}{12}$, но меньше версты.

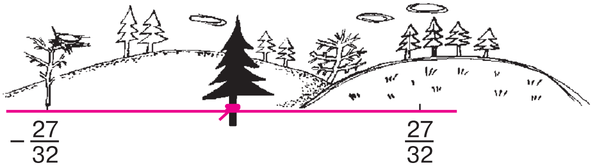
А белка-то на Ивана внимательно смотрит. Думай, мол...

— Как это я сразу не сообразил! — Иван говорит. — Расстояние от гнезда до ели, конечно, $\frac{27}{32}$ версты будет, да отложить то расстояние и в противоположном направлении можно. Выходит, не за елью гнездо воронье, а перед нею.

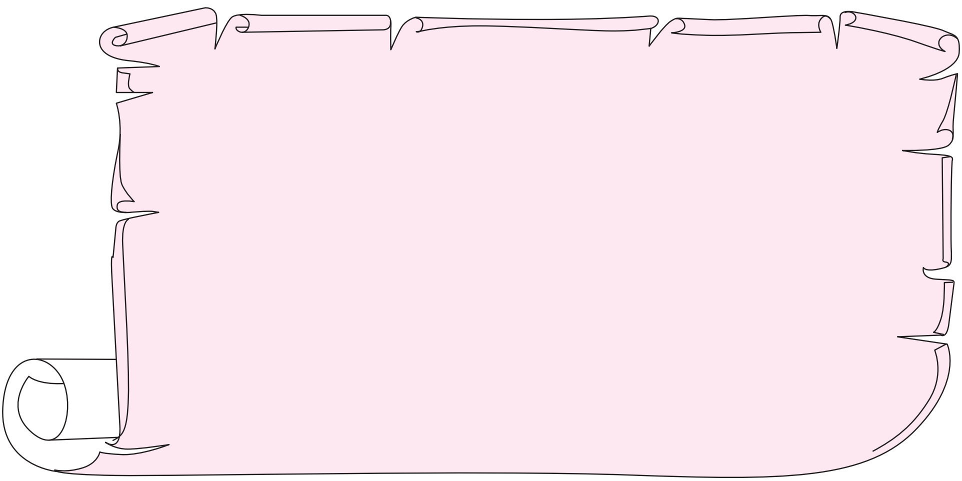
Взял Иван бечёвку, от ели в другую сторону по дороге пошёл и $\frac{27}{32}$ версты отмерил. Тут гнездо и нашёл, воронёночка в него посадил. То-то радости было!

Махнул рукой на прощанье и к Елене поехал. Скачет да думает:

— Промашка моя в том была, что не в ту сторону от ели шишки положил. Да и не моя промашка, а белкина. Это она, проказница, мне направление вдоль дороги не указала. А коли есть два противоположных направления вдоль дороги-то, так и **у каждой обыкновенной дроби есть дробь ей противоположная!** Как не быть! И знак у противоположных чисел в Еленином царстве такой же, как в моём царстве, — знак «минус».



(*А что в памятной грамотке о сравнении дробей писать — это уже тебе, читатель, решать.*)



ГЛАВА 7

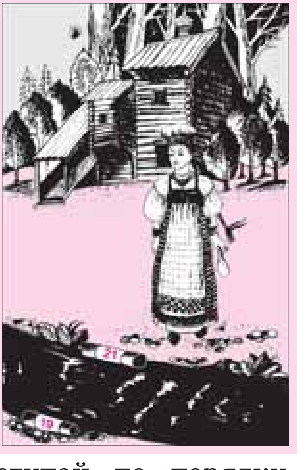
СКОЛЬКО ЧИСЕЛ НАХОДИТСЯ МЕЖДУ ЧИСЛАМИ 19 И 20

Помчал конь Ивана-царевича к терему узорчатому. Вышла на порог Елена Прекрасная. Так и обомлел Иван, стоит, слова вымолвить не может. Усмехнулась та, повела рукой, глядь, а у терема, у самого порога широкий да бурливый ручей побежал.

Иван-царевич с Еленой Прекрасной по разные стороны ручья оказались.

А на самом бережку возьми да загорись-засветись число 19. Вроде как мосточек какой.

— С чего бы это? — Иван думает. Смотрит, а на том берегу тоже мосток, с числом 21, виднеется.



А Елена-то Прекрасная говорит:

— Что ж, Иван-царевич, гость нежданный, войди в мой терем! Если сможешь... Да, чур, ног не замочи!

Повела рукою — посерёдке ручья вроде плотик заплавал, а на нём число 20 засветилось. Голову склонила — все три числа мостиком соединились. Реденький мостик, о трёх поперечинах! Но ничего, с одной поперечины да на другую перепрыгнуть, вроде, можно.

— Иди, говорит Елена Прекрасная, только, чур, по числам, что я бросила, ступай по порядку, с меньшего да на большее. Понял?

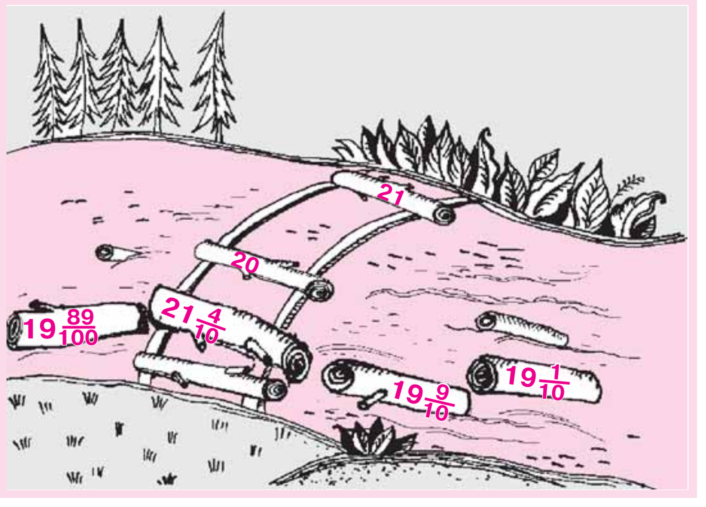
— Чего уж тут не понять! С 19 на 21 и не допрыгнуть сразу, обязательно 20 требуется.

Сказал так Иван-царевич и собрался прыгать с 19 на 20.

А Елена опять правой рукой повела, и запрыгали-засверкали на пути Ивановом четыре числа каких-то. Отмахнулся было от них Иван-царевич, прыгнуть изготовился, да тут, откуда ни возьмись, ворона на плечо к нему села. Мать того воронёнка, что Иван спас.

Села и говорит:

— Уж ты гой еси, Иван-царевич! Ты зачем от чисел отмахиваешься? Рано тебе ещё на 20 прыгать!



— Ничего не рано, самое время!

— Не торопись! — сердится ворона. — Бросить бы тебя за такую торопливость невнимательную, да жалко. Надо на ум-разум наставить, не то от Елениной красоты да от хитрости как бы ты в ручей не свалился!

Гляди-ка на числа, что вокруг тебя так и скачут. Глядишь? Ну и что видишь-то?

Вгляделся Иван-царевич и охнул. Ни одного целого числа не было, да все меж 19 и 20 помещались:

$$19\frac{4}{10};\quad 19\frac{89}{100};\quad 19\frac{1}{10};\quad 19\frac{9}{10}.$$

Стал Иван те дроби ловить, в десятичные для верности переделывать, да с одной на другую прыгать. (С десятичными дробями ему привычней управляться было.)

С 19,1 на 19,4; потом на 19,89; а уж дальше на 19,9, потому как

$$19{,}1 < 19{,}4 < 19{,}89 < 19{,}9.$$

Смотрит, совсем маленько до числа 20. И ноги сухи! А всего-то 0,1 частичка расстояния меж 19 и 20 ему осталась!

Да не тут-то было. Махнула Елена рукою — и четыре новых числа высыпала:

$$19\,\frac{97}{100};\quad 19\,\frac{909}{1000};\quad 19\,\frac{991}{1000};\quad 19\,\frac{95}{100}.$$

Ну, тут уж Иван в грязь лицом не ударил, по порядку их разложил:

$$19{,}909 < 19{,}95 < 19{,}97 < 19{,}991.$$

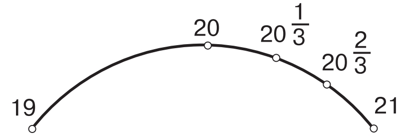
Уж совсем рядом 20 было. А Елена новую четвёрку чисел посылает.

(*Сколько там ему, читатель, до 20 осталось? А какие числа Елена послать могла?*)

Ивана-то царевича ворониха вовремя остановила. Понял он, что Елена хитрит да дорогу через ручей без конца делает. Приосанился и говорит:

— А что, хозяйка распрекрасная, выйди-ка мне навстречу, шагай со своего берега, с числа 21 и шагай! Может, тебе быстрее на 20 добраться удастся? Ты, я слыхал, не только красна, но и мудра! Иль не можешь?

Сказал так и чего-то воронихе на ухо шепнул. Улыбнулась Елена Прекрасная хитро, но ласково, сыпанула себе под ноги всего два числа: $20\frac{1}{3}$ и $20\frac{2}{3}$.



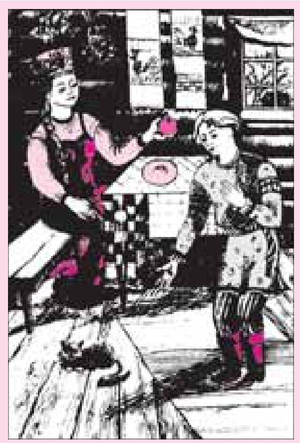
Шагнула с 21 на треть расстояния, сразу на $20\,\frac{2}{3}$, собралась дальше шагать, а ворониха-то!

На рукав ей села и давай трясти! Ну, числа так и посыпались:

$$20\,\frac{11}{30};\quad 20\,\frac{12}{30};\quad \ldots\ 20\,\frac{17}{30};\quad 20\,\frac{18}{30};\quad 20\,\frac{19}{30}.$$

Некоторые на ходу переделывались, от тряски, должно. К примеру, $20\frac{12}{30}$ в $20\frac{2}{5}$ переделалось, а $20\frac{15}{30}$ — в $20\frac{1}{2}$.

Глава 7. Сколько чисел находится между числами 19 и 20

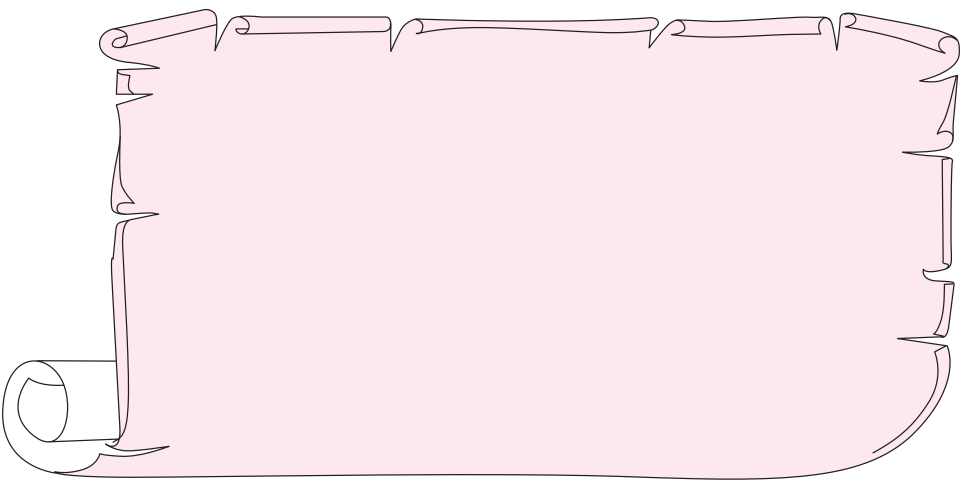


Смотрит Елена Прекрасная на тьму-тьмущую дробей под ногами, смотрит да видит: делать нечего, надо признаваться, что и ей до 20 не дойти, и на её пути чисел видимо-невидимо, считано-несчитано. Перехитрил её Иван с воронихиной помощью. Понял, что между двумя разными числами сколько угодно других чисел помещается.

Да и заставил ручей убрать, гостя в терем ввести!

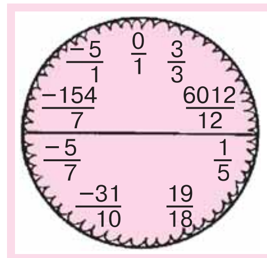
А уж Елена Прекрасная и сама рада была! Пригож да умён гость оказался. Усадила она его за столы дубовые, стала потчевать пирогами, речи вести сладкие, поясом, золотом шитым, что Иван подарил, любоваться. Вынесла к столу и забаву — серебряное блюдечко да наливное яблочко.

(*Ивану играть, а тебе, читатель, памятную грамотку о том, что в главе узнал, писать.*)



ГЛАВА 8

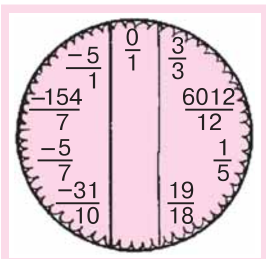
ПРО РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА



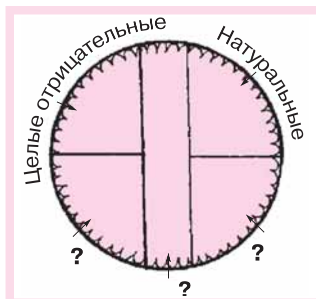
Покатилось яблочко по серебряному блюдечку, на блюдечке полоска обозначилась, а поверху и понизу от неё дроби появились. Поверху те дроби собрались, что целые числа означают.

Вниз же ни одного целого числа не попало.

— Что ж, ладно! — говорит Иван-царевич. — Разошлись числа на две компании. Почему бы и нет?



Сказал так и снова яблоко по блюдечку покатил. Новая картинка обозначилась — на ней числа уже на три кучки разбежались. Ну, Иван опять смекнул, что к чему. В одной кучке отрицательные дроби собрались, в другой — положительные, а посерёдке — нуль.



Покатилось в третий раз яблочко да по блюдечку — новая картинка: полоски на пять частей блюдце поделили, а какие где числа будут — поди знай! Не везде прописано, так только — намёк дан. Но Иван-то догадлив, вмиг сообразил!

(*Ты, читатель, тоже не плошай. Расставь дроби по местам и вместо вопросительных знаков нужные слова напиши. Подумай: могут ли дроби по блюдечку ещё как-нибудь по-другому расположиться.*)

Иван тем временем блюдце отодвинул, с лавки встал, в пояс Елене поклонился.

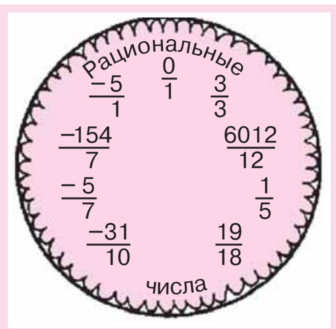
— Любо, — говорит, — мне у тебя, Елена Прекрасная! И хозяйство твоё справное — всякими числами оно богато: и *натуральные* числа есть, и *целые отрицательные*, и *нуль*, и *дробные* — хочешь *положительные*, хочешь — *отрицательные*... Одно только меня мучает — я-то тебе по нраву или нет?

Елена Прекрасная засмущалась, разрумянилась.

— Сперва ты мне ответь, — говорит, — есть ли у моих чисел одно имя-прозвание? После уж и про любовь поговорим.

Вспомнил тут Иван-царевич, что Баба-яга ему название Елениных чисел сказывала, **рациональные**, мол. Да велела то название — рациональные числа — до поры до времени в секрете держать.

— Ну, — думает, — пришло, знать, время!



И только подумал так, яблочко по блюдечку само покатилось, исчезли на блюдце полосы, все числа одной семьёй зажили. Да и числа маленько по-другому смотреться стали, что-то, вроде, в них переменилось.

Елена на картинку взглянула — обрадовалась. «Разобрался, — думает, — Иван в числах рациональных, будет им хороший хозяин вскорости».

А Иван на блюдце числа углядел: $\frac{-5}{1}$ да $\frac{-5}{7}$. И задумался:

— Верно ли, что $\frac{-5}{1} = -\frac{5}{1}$, $\frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}$? И если верно, то какое тому объяснение?

Елена принахмурилась. Вдруг, думает, не сообразит Иван-царевич? А он ничего, сообразил! Не зря про дроби допытывался... Сообразил и так вот записал:

$$\frac{-5}{1} = -5 : 1 = -\frac{5}{1} \text{ — число отрицательное;}$$

$$\frac{-5}{7} = -5 : 7 = -\frac{5}{7} \text{ — число отрицательное.}$$

А потом добавил:

— Можно, — говорит, — отрицательные дроби ещё и так писать: $\frac{5}{-7}$; $\frac{5}{-1}$.

$$-\frac{5}{7} = 5 : (-7) = \frac{5}{-7}; \qquad -5 = \frac{-5}{1} = \frac{5}{-1}.$$

Елена головой кивает. Можно, дескать, можно.

— А почему ж тогда на блюдечке ни одной дроби с отрицательным числом в знаменателе нет?

— Потому нет, — Елена отвечает, — что уговор у нас есть: если у чисел имя одно, то и писать их в одном виде будем. Вот и договорились:

Если число можно представить в виде $\frac{a}{b}$, где a — целое число, b — натуральное, то такое число называется рациональным.

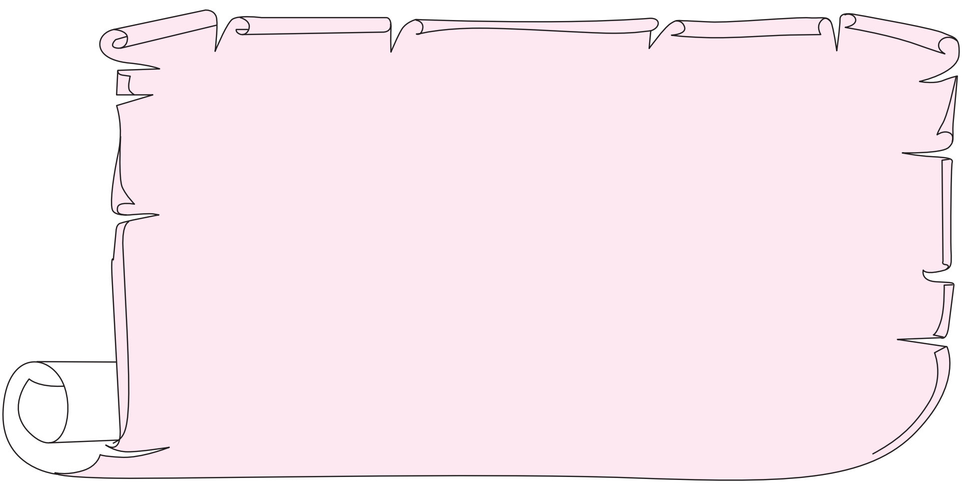
Вот и содержатся наши числа в полном порядке.

— Так и у нас, в тридесятом царстве, тоже не неряхи живут, у нас тоже числа в порядке хранятся на координатной прямой.

— А сумеешь ли ты, гость дорогой, всякому моему числу место на координатной прямой найти?

Взялся Иван-царевич за работу, начал с блюдца серебряного числа брать да на координатной прямой им место искать. Глядь, а на блюдце-то числа не кончаются, да, видно, и не кончатся никогда!

(*Ты, читатель, конечно, уже понял, что каждому рациональному числу место на координатной прямой найдётся. Возьми любые пять чисел и изобрази их на координатной прямой.*)



ГЛАВА 9
УМНОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Натешился Иван серебряным блюдечком и говорит:

— Ну что, Елена Прекрасная, пойдёшь замуж за меня или нет?

— Пойду, — та отвечает. — Как не пойти? Только должен ты сначала, как водится, мою задумку выполнить. Да не серчай, она и тебе по сердцу придётся. И подарок твой для батюшки-царя вовсе бесценным станет!

— Говори, какая-такая задумка у тебя?

— А должен ты, мил-друг Иванушка, по свету походить, три дороги пройти, чтобы действиям с дробями научиться. Это задумка моя и есть!

(*Действий-то четыре, а дороги только три. Почему отдельной дороги для вычитания нет, помнишь, читатель?*)

Вздохнул Иван-царевич, котомку с обыкновенными дробями прихватил — и пошёл действиям учиться.

Дошёл до места, где три дороги лесных в разные стороны расходятся. По какой идти далее — не понять! Сел на пенёк, призадумался. Бабу-Ягу вспомнил. А она уж тут как тут — с корзиной стоит, по грибы, знать, отправилась.

— Что, — говорит, — соколик, мудрит моя Елена? Ну, уж я тебе подсоблю.

Вышла на то место, где дороги расходятся, пошептала чего-то, глядь, а на дорогах-то правила обозначились.

— Выбирай путь, Иванушка! — говорит.

Прочитал Иван-царевич надписи и выбрал путь, где самое с виду простое правило записано было — правило умножения дробей.

— Пойду-ка я по этой дорожке, а куда потом идти — за суммой ли, за частным ли, там видно будет.

Прошёл так по дороге сколько-то и думает:

— Чего же это я иду? Дроби у меня в котомке, правило на дороге, дай-ка умножу!

Достал пару дробей обыкновенных, $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$, примерил к правилу

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}: \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

— Не может быть такого. — Множил, множил, а вышло меньше, чем было. Вот загвоздка-то! Треть-то и половины и двух третей меньше:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}; \qquad \frac{1}{3} < \frac{2}{3}.$$

А Баба-яга под берёзой гриб срезает и приговаривает:

— Чай, учили тебя, соколик, уму-разуму. Что-нибудь от того ученья в голове осталось, ай нет?

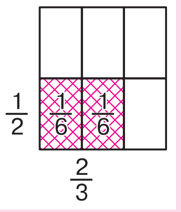
Задумался тут Иван-царевич. Вспоминать стал, что же он про умножение знает. В своём-то царстве он, умножая, **суммы одинаковых слагаемых** находил:

$$2 \cdot 3 = \underbrace{2 + 2 + 2}_{3 \text{ раза}}.$$

Посмотрел Иван-царевич на произведение $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ и головой покачал:

— Как же это можно одну вторую две третьих раза слагаемым взять? Неладно выходит!

Почесал затылок да ещё вспомнил, что приходилось ему раньше площади прямоугольников умножением высчитывать. Ещё в своём тридесятом царстве.



Вспомнив, нарисовал на дороге картинку и увидел, что площадь прямоугольника в $\frac{1}{2}$ аршина длиной и $\frac{2}{3}$ аршина шириной составляет $\frac{2}{6}$ площади всего квадрата, или $\frac{1}{3}$ всего квадрата, то есть $\frac{1}{3}$ квадратного аршина. То же самое вышло, что и по правилу дорожному.

Очень этому Иван порадовался и на правило дорожное уже без опаски глядеть стал.

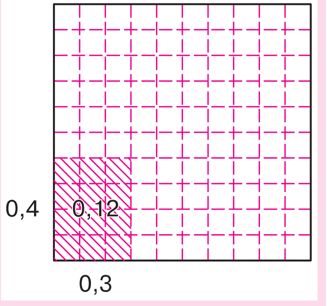
Произведение двух обыкновенных дробей равно дроби, в числителе которой — произведение числителей данных дробей, а в знаменателе — произведение их знаменателей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

— Знать, — решил, — Еленину задумку скоро выполню. Могу теперь с лёгкой душой Еленины обыкновенные дроби перемножать. Всего и нужно числители дробей перемножить, а потом уж и знаменатели.

А Елена-то? Сможет ли с натуральными числами да десятичными дробями справиться? Как бы перед батюшкой моим в грязь лицом не ударила... Сумеет ли, к примеру, по своему правилу такие числа перемножить:

$$0{,}3 \cdot 0{,}4 = ? \qquad 4 \cdot 5 = ?$$



Сумеет, отчего же нет. Она так сделает:

$$0{,}3 = \frac{3}{10}; \quad 0{,}4 = \frac{4}{10};$$

$$0{,}3 \cdot 0{,}4 = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12.$$

В азарт вошёл Иван и решил проверить, можно ли по этому правилу дорожному натуральные числа перемножать. Шапку набекрень сдвинул.

— Известно, — говорит, — что $4 \cdot 5 = 20$. А по-Еленину как будет?

$$4 = \frac{4}{1}; \quad 5 = \frac{5}{1};$$

$$4 \cdot 5 = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{20}{1} = 20.$$

Опять результат такой же, как в моем царстве. Видно, правило умножения в Еленином царстве с моими правилами в полном согласии находится. А коли так, надо этим Елениным правилом получше овладеть.

Достал Иван пару дробей обыкновенных (спасибо, в котомке их много было), да и перемножил:

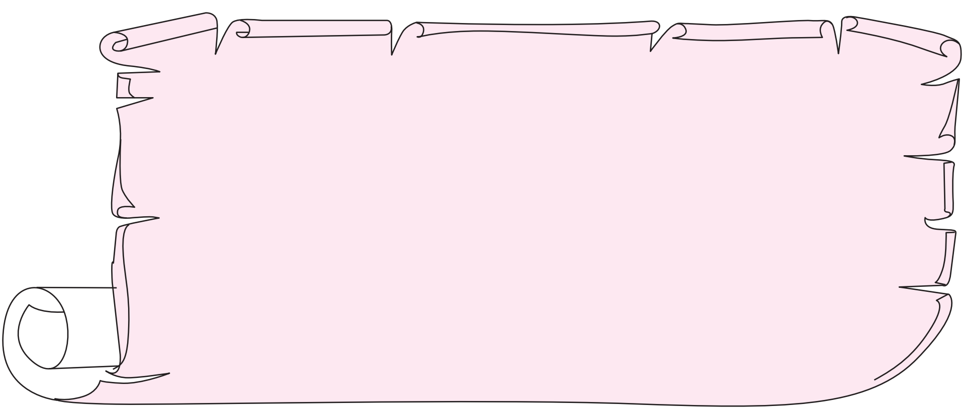
$$\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7 \cdot 3}{9 \cdot 10} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}.$$

А как перемножил, так и смекнул, что вычисления упростить можно:

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7 \cdot \cancel{3}^{\,1}}{{}_{3}\cancel{9} \cdot 10}.$$

Смекнул, да и на ус себе намотал, что **не следует торопиться считать произведения в числителе и знаменателе дроби. Сначала посмотреть надо, можно ли эту дробь сократить.**

Дроби назад в котомку сложил да дальше пошёл.



ГЛАВА 10

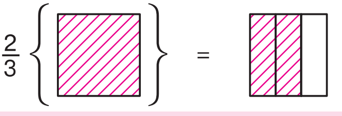
КАК НАЙТИ ЧАСТЬ ОТ ЧИСЛА

Идёт себе Иван по дороге, а Елена Прекрасная сидит в тереме узорчатом одна-одинёшенька, по Ивану-царевичу тоскует. Дай, думает, покачу наливное яблочко по серебряному блюдечку, может, и увижу дружка желанного.

Покатила, а увидела только дорогу да Иванову картинку с прямоугольником на дороге той.

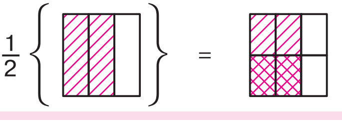
— Дай, — думает, — разберусь. Чем занимается Иван? Изучает ли действия с дробями?

Подумала так — и давай свои картинки рисовать. Сперва квадрат вдоль на три равные полосы разделила, да только две полоски взяла.



Это у неё $\frac{2}{3}$ части от квадрата получилось.

А потом она от двух третьих одну вторую взяла да решёткой зарешетила. Две шестых квадрата у неё в клеточку и получились!



— Никак, — говорит, — Иван одну вторую от двух третьих искал? Так ведь как раз **часть от числа умножением** как раз **находится!**

(*Что же это выходит, читатель? Елена что сказала? Что он не просто* $\frac{2}{3}$ *на* $\frac{1}{2}$ *умножил, а одну вторую часть от двух третьих нашёл. Давай разберёмся с этим.*)

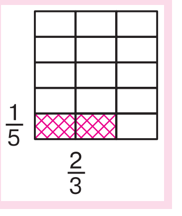
Найдём $\frac{1}{2}$ часть от $\frac{2}{3}$. Для этого сначала $\frac{2}{3}$ разделим на 2. При этом знаменатель увеличится в 2 раза: $\frac{2}{3 \cdot 2}$.

То, что получилось, возьмём один раз: $\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3}$.

Это можно переписать так: $\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$.

Интересно, а всегда ли, когда на дробь умножаешь, то часть от числа находишь?

Отыщем, например, $\frac{4}{5}$ от того же числа $\frac{2}{3}$. Сначала пятую долю от $\frac{2}{3}$ найдём.

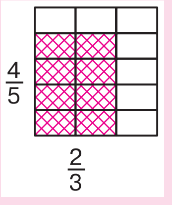


Для этого с помощью рисунка уменьшим $\frac{2}{3}$ в пять раз.

После этого у нас новая дробь получится, знаменатель у неё в 5 раз больше, чем у $\frac{2}{3}$. Вот эта дробь: $\frac{2}{3 \cdot 5}$. Да только нам не эта пятая доля нужна, а четыре таких доли. Такая дробь в четыре раза больше, чем $\frac{2}{2 \cdot 5}$ будет!

И чтобы её получить, надо четыре раза по две пятнадцатых доли взять. А для этого числитель дроби $\frac{2}{3 \cdot 5}$ надо на 4 умножить.

Вот что получится:



$$\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}; \qquad \frac{8}{15} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

(*Видишь, читатель, $\frac{4}{5}$ от числа можно найти умножением!*)

Ещё пример разберём. Трёх четвертей часа на это не потребуется! А сколько это будет — три четверти часа? Известно, что это равно 45 минутам:

$$(60 : 4) \cdot 3 = 15 \cdot 3 = 45 \text{ (мин)}.$$

Можно и здесь умножение увидеть:

$$60 \cdot \frac{3}{4} = \frac{60}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\overset{15}{\cancel{60}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{45}{1} = 45 \text{ (мин)}.$$

Теперь узнаем, сколько минут в полутора часах:

$$60 \cdot 1\frac{1}{2} = 60 \cdot \frac{3}{2} = \frac{60 \cdot 3}{2} = 90 \text{ (мин)}.$$

(*Скажи, читатель, каким действием мы решили задачу?*)

$1\frac{1}{2}$ часть от часа мы нашли умножением. Например, 0,33 часа, также можно найти умножением:

$$60 \cdot 0{,}33 = \frac{60}{1} \cdot \frac{33}{100} = 19{,}8 \text{ (мин)}.$$

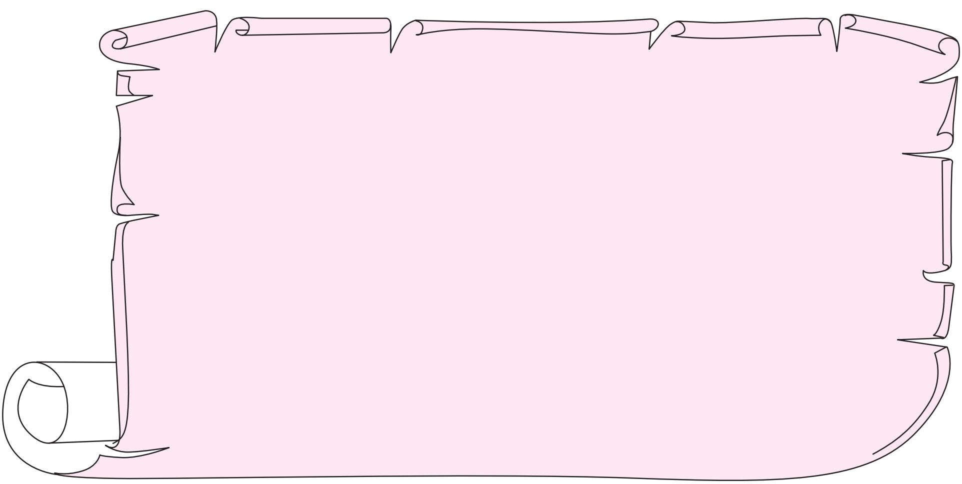
Две, то есть $\frac{2}{1}$ части от часа можно найти так:

$$60 \cdot 2 = \frac{60}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{120}{1} = 120 \text{ (мин)}.$$

Елена в это время Ивана в серебряном блюдечке углядела. Стоит суженый посреди дороги и что дальше делать, не знает.

— Дай, — думает, — подсоблю ему.

И подсобила ведь! Но об этом в другой главе сказ.



ГЛАВА 11

РАЗНЫЕ СЛУЧАИ УМНОЖЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И ЗАКОНЫ УМНОЖЕНИЯ

Нашептала Елена Прекрасная заговор заветный, и появилась на дороге перед Иваном застава. На заставе той щит стоит, а на щите таблица нарисована:

	$\frac{1}{100}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$	3	$3\frac{1}{5}$
0,01	$\frac{1}{10000}$	$\frac{5}{700}$	0,014	$\frac{3}{100}$	$\frac{16}{500}$
$\frac{5}{7}$		$\frac{25}{49}$	1	$\frac{15}{7}$	$\frac{16}{7}$
$\frac{7}{5}$			$\frac{49}{25}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{16 \cdot 7}{5 \cdot 5}$
$\frac{1}{3}$				1	$1\frac{1}{15}$
$3\frac{1}{5}$					$\frac{16 \cdot 16}{5 \cdot 5}$

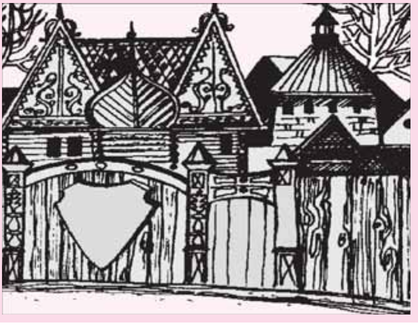
И, как положено, солдаты заставу сторожат.

— Заполни пустые клетки, — говорят, — тогда дальше путь откроется.

Стоит Иван-царевич, думает:

— В чем секрет надписей-то? В умножении, должно...

(*Проверь, читатель, правильно ли числа на щите расположены, и пустые клетки заполни. Смекалка-то есть у тебя, стало быть, много времени не потратишь.*)



Сел Иван на бугорок у заставы, хлеба краюшку пожевал, водой ключевой запил, на щит засмотрелся. Насмотрелся вдосталь, да и говорит:

— Хитрость заставная в том, что составлена надпись с помощью умножения!

В первой строке чего только нет: натуральные числа есть, обыкновенная дробь тоже есть, хочешь правильная, хочешь неправильная, смешанное число — пожалуйте вам, вот оно в последней клеточке.

Да на все эти числа дробь 0,01 умножается, а результаты во вторую строчку записаны. После на те же числа из первой строки $\frac{5}{7}$ умножается — вот и третья строчка готова! И далее, должно быть, тоже так.

Сказал да проверил. Так оно и вышло. Вон он как проверять-то начал:

$$0{,}01 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10\,000}; \qquad \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 5} = 1;$$

$$0{,}01 \cdot \frac{5}{7} = \frac{1}{100} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{700}; \qquad \frac{5}{7} \cdot 3 = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{1} = \ldots .$$

$$\frac{5}{7} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{5}{7} \cdot \frac{16}{5} = \ldots .$$

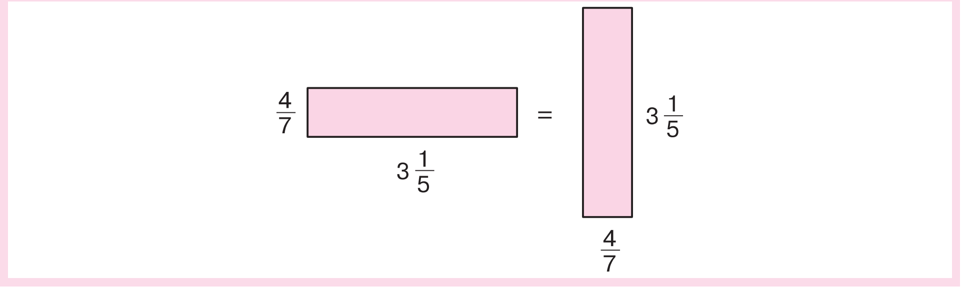
— Ну, — говорит, — теперь догадаться надо, как пустые клетки заполнить.

Да долго-то гадать не стал, вмиг заполнил, а все потому, что к месту вспомнил **переместительный закон умножения.**

— Чувствую, — говорит, — что Еленины числа тоже переместительному закону подчиняются:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

И хоть в чувствах своих уверен был, а все-таки проверил:



$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}; \quad \frac{4}{7} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{4}{7} \cdot \frac{16}{5} = \frac{16 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{16}{5} \cdot \frac{4}{7} = 3\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{7}.$$

Как проверку закончил, так исчез щит, заставы не стало. Да и сама дорога-то кончилась, знать, разобрался он в умножении, можно назад поворачивать. И пошёл Иван-царевич обратно.

(*А мы с тобой, читатель, отстанем ненадолго. Видишь ли, Иван попутно кое-какие мысли-заметки сделал. Может, и у тебя, читатель, свои заметки появились. Сравни их с Ивановыми.*)

1-я заметка

Чтобы умножить обыкновенную дробь на натуральное число, нужно умножить на это число числитель дроби.

Это произведение сделать числителем новой дроби, а знаменатель новой дроби оставить таким же, каким был знаменатель данной дроби.

$$\frac{5}{7} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{7}.$$

2-я заметка

Чтобы перемножить смешанные числа, нужно их превратить в неправильные дроби и эти дроби перемножить.

$$3\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{4} = \frac{17}{5} \cdot \frac{9}{4} = \frac{153}{52} = 7\frac{13}{20}.$$

3-я заметка

Если требуется обыкновенную дробь умножить на десятичную, то можно десятичную дробь превратить в обыкновенную, а затем выполнить умножение.

$$\frac{5}{7} \cdot 0{,}01 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{100} = \frac{5}{700}.$$

Если обыкновенную дробь можно превратить в конечную десятичную, то выполняется умножение десятичных дробей.

$$\frac{1}{5} \cdot 0{,}01 = 0{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}002.$$

Ну и мы к заметкам Ивана-царевича вот ещё что добавим.

Два числа, произведение которых равно 1, называются взаимно обратными, например:

$$\frac{5}{7} \text{ и } \frac{7}{5}; \qquad 3 \text{ и } \frac{1}{3}; \qquad 3{,}5 \text{ и } \frac{2}{7}.$$

(*Ты, читатель, проверь-ка, действительно ли числа* 3,5 *и* $\frac{2}{7}$ *взаимно обратные.*)

Идёт Иван-царевич по дороге, щит вспоминает:

— Хорош щит, — думает, — да не все интересные случаи умножения рациональных чисел на нем помещаются, кое-что и добавить надо. Вот $\left(-\frac{2}{3}\right)$ на $\frac{9}{10}$ можно бы умножить. Целые числа умножать умею. А эти как? А ну, дай-ка попробую:

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=-\left(\left|-\frac{2}{3}\right|\cdot\left|\frac{5}{7}\right|\right)=-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)=-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=-\frac{10}{21}.$$

Если рассуждать по-другому, то же самое выйдет:

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{-2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{-10}{21}=-\frac{10}{21}.$$

Взял ещё два рациональных числа, только не с разными знаками, а с одинаковыми. И вот что вышло:

$$-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=+\left(\left|-\frac{2}{3}\right|\cdot\left|-\frac{5}{7}\right|\right)=+\left(\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}\right)=\frac{10}{21}.$$

Ещё и по-другому рассудил:

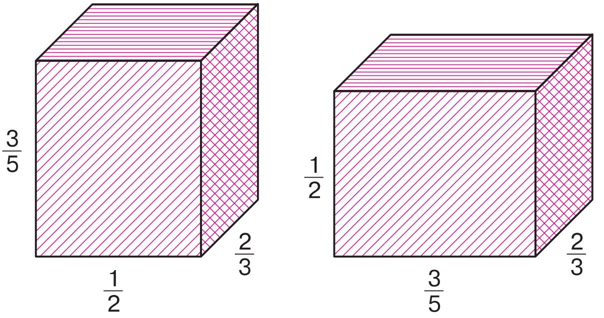
$$-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=\frac{-2}{3}\cdot\frac{-5}{7}=\frac{-2\cdot(-5)}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}.$$

Произведение двух чисел с разными знаками есть отрицательное число, модуль которого равен произведению модулей множителей.

Произведение двух чисел с одинаковыми знаками есть положительное число, модуль которого равен произведению модулей множителей.

Иван ещё и такой случай заметил: можно $\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}$ записать короче: $\left(\frac{5}{7}\right)^2$. Эта запись читается так: **вторая степень числа** $\frac{5}{7}$, или $\frac{5}{7}$ **в квадрате.**

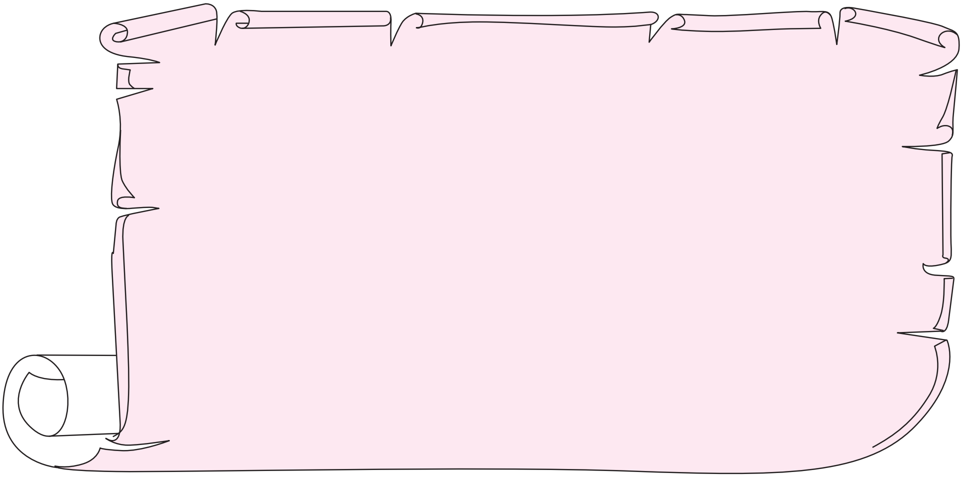
И вот ещё Иван-царевич о чем подумал: известно, что переместительный закон для умножения обыкновенных дробей выполняется. А выполняется ли **сочетательный**?



(*Перед тобой, читатель, два параллелепипеда. Найди их объёмы. Может ли в ходе этой работы получиться равенство:*

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right)?$$

Какой закон выражает это равенство?)



ГЛАВА 12

ДЕЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Идёт Иван-царевич обратно, торопится. Видит — камень гладкий да белый на дороге лежит. На камне задача для путника. Решай, мол, коли хочешь.

Вот она, та задача.

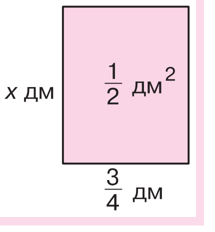
Площадь прямоугольника $\frac{1}{2}$ дм^2, а длина одной его стороны $\frac{3}{4}$ дм. Какова длина другой стороны?

— Что за диво? — говорит Иван-царевич. — Знать, специально он тут положен. Это либо Елена меня испытывает, либо Баба-Яга помочь хочет.

И давай Иван-царевич задачу решать.

Лёгкой она ему показалась. Он уж про площадь-то много задач решал. Знал, что если длины двух сторон прямоугольника известны, то площадь умножением находится. А если площадь известна, да одной стороны длина дана, то и длину другой стороны найти можно.

Присел он у камня и начал прямо на тропинке рисовать.



— Чтобы найти длину второй стороны прямоугольника, нужно его площадь разделить на длину известной стороны, $x = \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$. И все дела! Ох ты... Все, да не все. Как же обыкновенные дроби одна на другую разделить? Этого я не знаю.

Поглядел Иван по сторонам — помощи ждать неоткуда. Вздохнул и стал дальше рассуждать:

— Попробую по-другому. Обозначу длину неизвестной стороны за x дм.

Обозначил, да выражение для площади прямоугольника записал: $\frac{3}{4} \cdot x$ дм^2. И, как положено, уравнение составил:

$$\frac{3}{4} \cdot x = \frac{1}{2}.$$

— Какое число, — думает, — надо на $\frac{3}{4}$ умножить, чтобы $\frac{1}{2}$ получилась?

Стал Иван такое число подбирать — ему без такого числа и пути дальше не было. Не с первой попытки, но подобрал! Нашлось такое число: $\frac{2}{3}$. И записал Иван на тропинке возле камня:

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}, \text{ так как } \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2}.$$

— Ну и морока! — говорит, — с этим делением обыкновенных дробей! Не позавидуешь местным жителям, вот бедолаги!

Глядь, вдруг Баба-Яга опять у дороги появилась, смотрит сердито, топчется да бормочет что-то. Прислушался, а это она его, Ивана-царевича, ругает:

— Вот ещё! Жалельщик нашёлся...

— Чего ты, бабуля, сердишься?

— Прежде меня бы спросил, так, мол, и так, бабушка, расскажи, как вы в своём царстве с делением устраиваетесь.

— Так расскажи, бабушка, сделай милость, направь меня на ум-разум!

Баба-Яга тут на камень белый дунула, на нем подсказка и появилась:

$$\underset{\text{делимое}}{\frac{1}{2}} \cdot \underset{\text{делитель}}{\frac{3}{4}} = \underset{\text{делимое}}{\frac{1}{2}} \cdot \underset{\substack{\text{число,}\\ \text{обратное}\\ \text{делителю}}}{\frac{4}{3}} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \underset{\text{частное}}{\frac{2}{3}}$$

Частное двух обыкновенных дробей равно произведению делимого на дробь, обратную делителю.

— Ну, — говорит, — гостенёк дорогой, что теперь скажешь? Бедолаги ль мы?

— А то и скажу, что ловкий способ деления ты мне показала. Да только всякие ли рациональные числа этому правилу подчиняются?

— А ты вот возьми и разберись!

Начал разбираться Иван. Прикинул, что разобраться-то вот с чем надо — можно ли по этому правилу натуральные числа делить? Можно ли — десятичные дроби? И такой вот случай тоже разбора требует — можно ли натуральное число на дробь разделить? Да ещё отрицательные дроби есть... Как с ними-то в делении обходятся?

Такие вот примеры себе заготовил:

$$20 : 5; \qquad 2{,}44 : 0{,}8; \quad 2 : \frac{1}{3}; \quad \left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right).$$

(*А ты, читатель, что скажешь? Все ли случаи деления Иван рассмотрел? Может быть, какие-нибудь ещё разбора требуют?*)

Принялся Иван за работу. Доподлинно было известно ему, что $20 : 5 = 4$. Взял да и проверил результат по новому способу:

$$20 : 5 = \frac{20}{1} : \frac{5}{1} = \frac{20}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{20 \cdot 1}{1 \cdot 5} = 4.$$

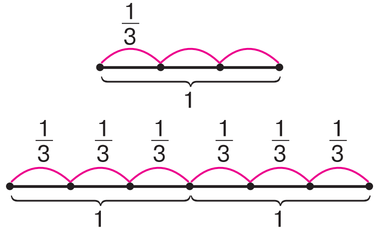
Ещё пример взял: $2{,}44 : 0{,}8 = 3{,}05$.

$$2{,}44 : 0{,}8 = \frac{244}{100} : \frac{8}{10} = \frac{\overset{61}{\cancel{244}} \cdot \overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{10}{\cancel{100}} \cdot \underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{61 \cdot 1}{10 \cdot 2} = \frac{61}{20} = 3{,}05.$$

И ещё придумал пример для проверки:

$$2 : \frac{1}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} = 6.$$

— Ох, и чудно́, — говорит, — частное-то от деления больше делимого оказалось! Хотя и у нас такое бывало. Да и тут, если подумать, то все сходится. Ведь $6 \cdot \frac{1}{3} = 2$. Да и в двух целых дробь $\frac{1}{3}$ как раз шесть раз и содержится!



— Ты смотри, бабушка, — удивляется Иван, — что вышло-то! Делить надо, а я умножаю. Умножаю, слышь, делимое на дробь, обратную делителю!

А ну как делитель смешанным числом будет? И тогда справлюсь — переведу смешанное число в неправильную дробь, вмиг найду ей обратную.

— Ты долго ли собираешься так-то упражняться?

— Ещё разделю $\left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right)$.

Сказал так Иван, подумал-подумал, да вспомнил, как целые числа делил. Решил и тут сначала знак частного поставить, а потом модуль его искать:

$$\left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right) = -\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right) = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) = -\frac{2 \cdot \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 5} = -\frac{4}{5}.$$

Сделать — сделал и проверить не забыл:

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = +\left(\frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 6}\right) = \frac{2}{3}.$$

Получилось, что с помощью правила, которое Баба-яга показала, можно любые числа делить — определи знак частного и дели модули!

После затылок почесал, про Елену вспомнил — про то, что та знак чисел своих отрицательных всегда к числителю относит, и говорит:

— Елене-то больше по нраву такое вот рассуждение придётся:

$$\left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{(+2)}{3} : \frac{(-5)}{6} = \left(\frac{+2}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{-5}\right) = \frac{2 \cdot \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot (-5)} = \frac{4}{(-5)} = -\frac{4}{5}.$$

То же самое и вышло!

— Тебе, может, ещё чисел разных подбросить, — Баба-Яга ехидничает, — чай, не напроверялся ещё?

— А я в самом общем виде проверку сделаю. **Для всех рациональных чисел правило деления** так запишется:

$$\underset{\textit{делимое}}{\frac{a}{b}} : \underset{\textit{делитель}}{\frac{c}{d}} = \underset{\textit{делимое}}{\frac{a}{b}} \cdot \underset{\textit{число, обратное делителю}}{\frac{d}{c}} = \underset{\textit{частное}}{\frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

И проверю я результат деления вот как: умножу частное на делитель, и коли получу делимое, то твоя правда:

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \cancel{d} \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c} \cdot \cancel{d}} = \frac{a}{b}.$$

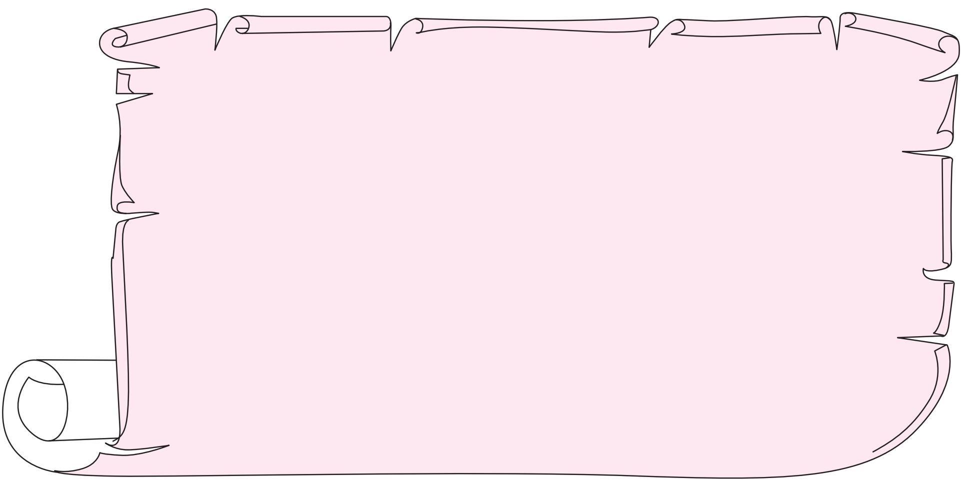
— Действительно, — говорит,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

И приписочку сделал: $c \neq 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

— Все! Твоя взяла, бабушка. Да и я тому рад, мне твоё правило по нраву.

Попрощался Иван-царевич с Бабой-Ягой и дальше по дороге пошёл.



ГЛАВА 13

КАК ОТЫСКАТЬ ЧИСЛО, ЕСЛИ ИЗВЕСТНА ЕГО ЧАСТЬ

Идёт Иван-царевич да тревожится:

— Не заблудился ли? — думает. — По дороге на умножение иду, а делением занимаюсь...

Потом успокоился — путь-то обратный, вот и появилось **обратное действию умножения действие деления.** Выходит, хороши мои дела — скоро Еленину задумку выполню.

Идёт дальше, озирается, углядел знак дорожный, а на знаке написано:

«До развилки осталась одна задача.»

А самой задачи на знаке нет!

Зашагал Иван-царевич по дороге дальше. Шагает, на обочину все поглядывает — последнюю задачу ищет. Прошагал 30 шагов, тут и задачу увидел. Взялся было решать, да передумал.

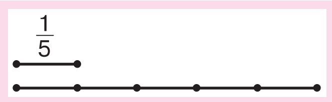
— Чего уж, без решения, чай, до развилки доберусь, вон она уж виднеется! Ох, ты, а от развилки теперь не три дороги, а две идут. Одна моя, на умножение, другая на сложение. А на деление отдельной дороги нет! Дак и понятно, почему! Деление-то к умножению сводится!

Хотел было к развилке шагнуть — ан нет, ноги-то нейдут.

Видно, задачу решать придётся!

Взялся за задачу Иван-царевич. Вот она:

«Некто прошагал от дорожного знака 30 шагов, что составляет $\frac{2}{5}$ всего пути до развилки. Сколько всего шагов от знака дорожного до развилки?»



Для начала картинку нарисовал да числа на ней разместил.

— Эх, — говорит, — если знать число шагов, что на одну пятую пути требуется, то задача вмиг бы решилась! Всего и дела было бы это число шагов на 5 умножить! А раз так, надобно это число искать.

В задаче сказано, что 30 шагов составляют $\frac{2}{5}$ пути. А на $\frac{1}{5}$ пути уйдёт шагов в два раза меньше:

$$30 : 2 = 15 \text{ (шагов)} — \text{на } \frac{1}{5} \text{ пути.}$$

Стало быть, на $\frac{5}{5}$ пути уйдёт в 5 раз больше:

$$15 \cdot 5 = 75 \text{ (шагов)} — \text{на весь путь.}$$

— Вот и всё, — говорит, — а то, вишь ты, «некто» какого-то придумали, будто им моё имя неведомо. Неужто подумать могли, что мне такая задача не по разуму?

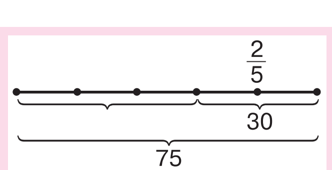
Хотел было дальше идти, 45 шагов дошагивать, да одна нога от земли оторвалась, а другая ни с места. Попробуй тут шагни, не только 45 шагов — одного не сделаешь!

— Что, — подивился, — такое? Может, проглядел что? Может, полезность какую не заметил? Может, у Елены к этим задачам подход особый?

Ну и стал разбираться с тем, что сделал:

$$(30 : 2) \cdot 5 = \frac{30 \cdot 5}{2} = 30 \cdot \frac{5}{2} = 30 : \frac{2}{5};$$

$$30 : \frac{2}{5} = 75 \text{ (шагов).}$$



Решение-то у него в одно действие записалось — действие деления, а в делении том только числа из условия задачи и участвуют!

— Одно число на другое разделил, а весь путь нашёл! Чудно что-то... Проверить надобно.

Картинку Иван нарисовал, с картинкой-то легко дело пошло:

$\frac{30}{75} = \frac{2}{5}$ — вышло, что и впрямь 30 пройденных шагов составляют $\frac{2}{5}$ пути;

$75 \cdot \frac{2}{5} = \frac{75 \cdot 2}{5} = 30$ — вышло, что $\frac{2}{5}$ от 75 шагов — это 30 шагов и есть;

$30 : \frac{2}{5} = 75$ — вышло, что на весь путь 75 шагов и уйдёт.

Верно всё, всё сходится, ответ тот же, а ноги ни с места!

— Так, значит... — думает Иван. — Вышло у меня, что **часть от числа находится умножением, а всё число по его части — делением.**

Надо будет ещё задач раздобыть да посмотреть, как в них дело пойдёт. Огляделся вокруг — новых задач не видно. Стал тогда сам их придумывать. Вспомнил, как в лавке с товарами разными, материями да лентами, был. Вспомнил, какие при нем покупки делались, да и составил задачу:

«Какая цена за аршин красного ситца, если $\frac{5}{7}$ *аршина стоят* 15 *денег;* $3\frac{1}{2}$ *аршина —* $73\frac{1}{2}$ *деньги́; а на* 12 *аршин того же красного ситца* 252 *деньги потребуется?»*

— А решается эта задача, — говорит, — делением. Тут и спорить нечего.

$$15 : \frac{5}{7} = \frac{15 \cdot 7}{5} = 21 \text{ (деньга́)};$$

$$73\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2} = \frac{147}{2} : \frac{7}{2} = \frac{147 \cdot 2}{2 \cdot 7} = 21 \text{ (деньга)};$$

$$252 : 12 = 21 \text{ (деньга)}.$$

Полюбовался на своё деление Иван, на то, как число по его части нашёл, и говорит:

— А что, если Елене такие же куски ситца потребуются? Только она больше до синего цвета охотница.

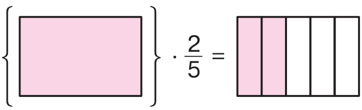
Вспомнил Иван, что цена синему ситцу была в том царстве 19 денег за аршин. Ну и взялся он считать, сколько денег за $\frac{5}{7}$ аршина синего ситца, после за $3\frac{1}{2}$ аршина, а после за 12 аршин потребуется. Пришлось ему для этого часть от числа находить. Не как-нибудь, а умножением, конечно:

$$19 \cdot \frac{5}{7} = \frac{95}{7} = 13\frac{4}{7} \text{ (деньги)}; \quad 19 \cdot 3\frac{1}{2} = \ldots; \quad 19 \cdot 12 = \ldots.$$

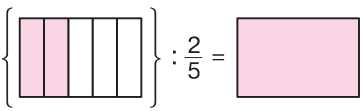
Как разобрался с ситцем Иван, так ноги и пошли! Идёт и, как ему уж в привычку вошло, думает:

— Задачи у меня про разные вещи были — одна про шаги, другие про цену, да решал я их одинаково. Надо бы мне это запомнить.

Если дано число и дана дробь, показывающая, какую часть от числа надо найти, то эту часть от числа находят умножением этого числа на дробь.



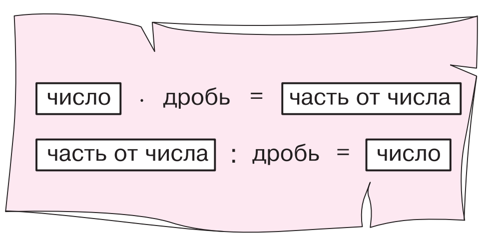
Если дана часть от числа и дробь, которая эту часть от числа выражает, то число находится делением этой части на дробь.



Как составил правило, так и говорит:

— Задачи-то эти взаимно обратные! И действия, которые для их решения используются, тоже взаимно обратные. Красота!

И хоть очень к Елене торопился, времени не пожалел, вернулся назад к знаку дорожному и укрепил на знаке грамотку:



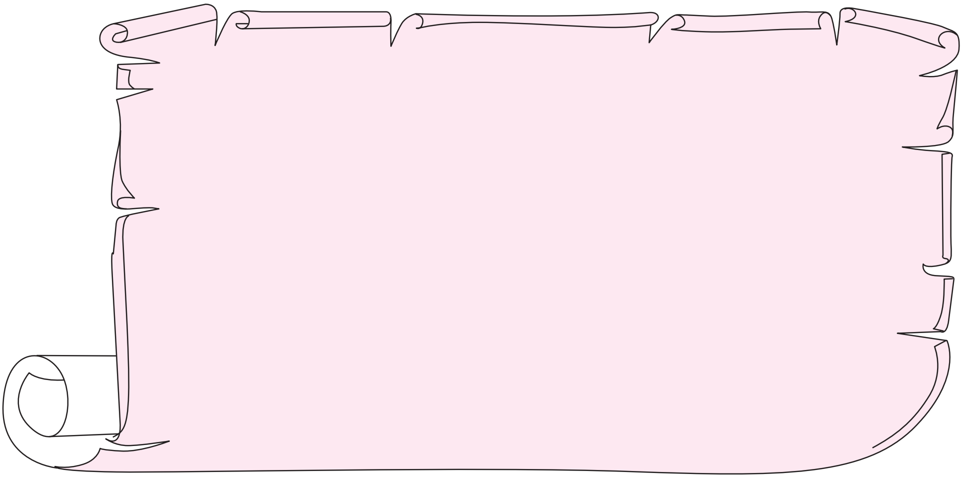
Смотрите, мол, кому не лень!

Тем временем слово «некто» в задаче про шаги до развилки исчезло, вместо него «Иван-царевич» появилось. Иван тем очень доволен остался, и дальше по дороге пошёл — 45 шагов дошагивать.

(*А ты, читатель, ещё пару случаев придумай, составь задачи и реши их.*

Сможешь, к примеру, составить задачу с такими дробями: $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{1}$; 2,3?

Да смотри, составленные задачи решить не забуды!)



ГЛАВА 14

СЛОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Приехал тем временем к Бабе-Яге гость — Кощей Бессмертный. Узнал про Ивана-царевича, разобиделся. Был, видишь ли, у него самого замысел Елену Прекрасную в жены взять.

Елена ему отказ за отказом слала, да он на то и внимания не обращал.

— Быть по-моему, — говорит, — и всё тут.

И вот ведь что наделал — напустил туман на дорогу. На ту самую дорогу, по которой Иван-царевич к Елене Прекрасной дойти мечтал, да попутно про сложение дробей все разузнать хотел. Ничего не видать стало — ни правила дорожного, в котором про сложение прописано было, ни самой дороги.

Один туман холодный, да липкий, да противный. А по туману шепоток ползёт:

— Уходи, Иван-царевич, домой ворочайся! Не видать тебе сложения, не видать Елены Прекрасной.

Вот дела-то какие!

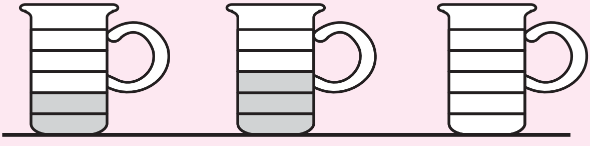
Хорошо, что Елена Прекрасная в ту пору опять наливное яблочко по серебряному блюдечку покатила. Все вмиг поняла, да вот беда — силы у неё такой не было, чтоб туман разогнать. Тогда она по-другому придумала.

Было у ней в тереме три голубя почтовых, стала она каждому к лапке письмецо привязывать да к Ивану-царевичу на дорогу туманную направлять. А в письмах тех все про сложение писала. Да так писала, чтобы любой человек все про то сложение понять мог.

Долетел голубь до Ивана-царевича, на плечо сел. Развернул Иван письмецо

Здравствуй, мил-друг Иван-царевич!
Решай задачу да меня не забывай

Стоят два кувшина одинаковых да рядом точно такой третий. Первый кувшин заполнен водой на $\frac{1}{3}$, второй — на $\frac{1}{2}$, а третий вовсе пустой.



Надобно воду из двух кувшинов перелить в третий. И тут забота есть: войдёт ли вся вода? А коли войдёт, то какую часть кувшина заполнит?

Иван-царевич письмецо перечёл. В том, что вода в третий кувшин войдёт, у него сомнений, конечно, не было. Но вот какую часть кувшина вода заполнит, это найти надобно было. И взялся он за решение. То, что в задаче складывать требуется, это ему сразу ясно стало. Ну и стал он складывать. Перво-наперво про умножение вспомнил, да так вот рассудил:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}.$$

Однако сообразил, что быть того не может! Чтоб лил-лил воду в кувшин, а вышло меньше, чем наливал?

— Дай, — думает, — по-другому сделаю:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

или

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{3+2} = \frac{1}{5}.$$

Ещё того не легче!

Тут светлячок откуда ни возьмись. Пополз-пополз светлячок по письму, у рисунка с кувшинами только и остановился. Смотри, мол, Иван-царевич! Тот глядел-глядел и видит, что все три кувшина вроде как полосочками поделены, на шесть частей каждый. А как разглядел, так и понял:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}.$$

Понял, да в грамотке записал:

Чтобы сложить обыкновенные дроби с разными знаменателями, нужно привести их к одному знаменателю.

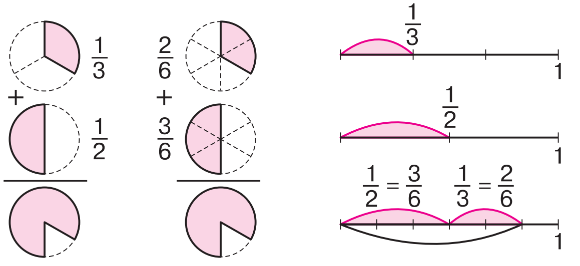
После и решение до конца довёл:

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6};\quad \frac{5}{6}<1.$$

А в грамотку решил для порядка такие слова добавить:

Чтобы найти сумму обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями, нужно записать дробь с таким же знаменателем, как у дробей, которые складываются, а в числитель поставить сумму числителей дробей, которые складываются.

Потом ещё рисунок сделал, который годился не только к задаче про кувшины, а и к любым другим похожим задачам. Рисунок тот говорил, что Иван все хорошо понял и любую такую задачу решить сможет, хоть про воду, хоть про ещё что. Вот он, рисунок-то.



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$

После грамотку с голубком Елене Прекрасной отправил. Решил, мол, задачу твою про воду в кувшинах. Ну, кое-чего ещё ей написал, да это не для постороннего глазу. Смотрит, а туман на дороге чуть пореже стал.

(*Ты, читатель, пока суть да дело тоже поработай — составь примеры про сложение, да такие, чтобы сумма двух дробей была равна* $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 2. *Глядишь, туман ещё поредеет.*)

Тут и другой голубок прилетел, второе письмо принёс, Еленой написанное.

Здравствуй, мил-друг Иванушка! Шлю тебе весточку с правилом да задачей.

Сделай милость, продолжи решение. Без того туману на дороге не рассеяться.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

1. $\frac{38}{45} + \frac{13}{18} = \frac{38 \cdot 18 + 45 \cdot 13}{45 \cdot 18} = \ldots$

2. $\frac{38}{45}^{\backslash 2} + \frac{13}{18}^{\backslash 5} = \frac{38 \cdot 2 + 13 \cdot 5}{90} = \ldots$

$$45 = 3^2 \cdot 5; \quad 18 = 3^2 \cdot 2;$$

$$\text{НОК}(45; 18) = 90.$$

Иван письмо прочитал и вспомнил, что ему уже приходилось что-то похожее делать. А было это, когда он дроби сравнивал. Тогда-то он их к общему знаменателю и приводил. Вгляделся ещё в Еленино правило

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d},$$

усмехнулся. Вовсе простое по виду правило-то было! Всего и дела-то дроби при сложении к общему знаменателю привести! Общим знаменателем двух дробей взять произведение их знаменателей. Числитель первой дроби умножить на дополнительный множитель — на знаменатель второй дроби. А числитель второй дроби умножить, само собой, на знаменатель первой:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Простое-то простое правило, а как начнёшь вычислять — не возрадуешься!

$$\frac{38}{45} + \frac{13}{18} = \frac{38 \cdot 18}{45 \cdot 18} + \frac{13 \cdot 45}{18 \cdot 45} =$$

$$= \frac{38 \cdot 18 + 13 \cdot 45}{45 \cdot 18} = \frac{684 + 585}{81} = \frac{1269}{810} = 1\,\frac{17}{30}.$$

Стал думать, как бы половчее сосчитать! Смотрит, а в письме у Елены и намёк на то имеется! Вот он, в строчках про НОК(45; 18).

Ну, и сосчитал Иван по-другому, НОК для отыскании общего знаменателя использовал. И число то же самое получил: $1\,\frac{51}{90} = 1\,\frac{17}{30}$. С НОК легко вышло!

(*Ты,читатель, если не веришь, сам сочти вторым способом. А после выбирай, какой тебе сподручнее!*)

А Иван тем временем стал ответ Елене писать. Про сложение обыкновенных дробей с разными знаменателями в нем тоже речь зашла. Про отдельные шаги, из которых это правило складывается. Про то, что идти по дороге за сложением оно помогает.

Чтобы сложить две обыкновенные дроби с разными знаменателями, нужно:
1. Найти общий знаменатель (подсчитать произведение знаменателей или их НОК).
2. Записать его в знаменатель суммы.
3. Разделить общий знаменатель на знаменатель каждой дроби (найти дополнительные множители дробей).

4. В числитель суммы записать сумму произведений числителя первой дроби на её дополнительный множитель и числителя второй дроби на её дополнительный множитель.
5. Если полученная дробь сократимой окажется, то прежде чем ответ писать, её сократить нужно.
6. Если дробь неправильной будет, то целую часть её выделить полагается.

Написал так Иван, да отправил голубка к Елене. Смотрит, как тот летит, а сам все про приведение дробей к общему знаменателю думает. Про то, какие случаи тут встретиться могут. Например, случай, когда **знаменатель одной дроби делится на знаменатель другой дроби** или когда **знаменатели дробей являются взаимно простыми числами.**

И примеры на такие случаи придумал:

$$\frac{1}{6}^{\backslash 3} + \frac{13}{18}^{\backslash 1} = \frac{1 \cdot 3 + 13 \cdot 1}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9};$$

$$\frac{5}{6}^{\backslash 7} + \frac{2}{7}^{\backslash 6} = \frac{5 \cdot 7 + 2 \cdot 6}{42} = \frac{35 + 12}{42} = \frac{47}{42} = 1\,\frac{5}{12}.$$

Придумал примеры и сидит-радуется, что все про сложение уже знает, любые дроби сложить может:

- когда знаменатель одной делится на знаменатель другой;
- когда знаменатели у них взаимно простые;
- когда у знаменателей этих дробей есть общие множители.

Вот и туман совсем поредел. Однако ещё держится.

(*Ну-ка, читатель, помоги Ивану туман развеять. Пока он письмо ждёт, придумай и реши свои примеры и задачи на сложение дробей в разных случаях.*)

А к Ивану-царевичу тем временем третий голубок прилетел. Его Кощей зловредный поймать хотел, письмо перехватить. Но не дался голубок, оттого и задержался в пути.

Выполни, Иванушка, задание,
найди, мил-друг, сумму!

Вот тебе два примера:

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6};$$

$$9\frac{5}{12}+5\frac{7}{18}.$$

Чур, складывать быстро, да ловко.
А в помощь тебе будут законы сложения:

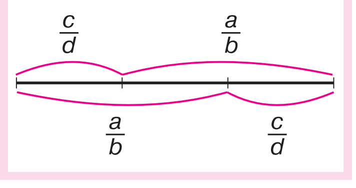
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b};$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right).$$

Законы — вещь важная, потому Иван за письмо со вниманием взялся. Законы-то из письма ему знакомы были, точно такие же и в его тридесятом царстве сложением командовали: **переместительный** да **сочетательный**. Елена их **коммутативным** и **ассоциативным** называла.

Закон коммутативный говорил, что порядок, в котором складываются две дроби, не влияет на значение суммы.

Вспомнил про это Иван да картинку объяснительную нарисовал.



По ассоциативному закону выходило, что результат сложения не изменится, если слагаемые сочетать по-разному, с помощью скобок.

(Для этого закона, читатель, сам картинку нарисуй.)

Разобрался Иван с законами, за задания из письма взялся. Да прежде подумал, что с чем складывать сподручнее:

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}=1+1+\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}.$$

Ко второму примеру присмотрелся и в нем смешанные числа увидел:

$$9\,\frac{5}{12}+5\,\frac{7}{18}\,.$$

— Важен и такой случай в сложении. Как с ним быть? Можно смешанные числа в неправильные дроби обратить и по известному правилу складывать. По правилу сложения дробей с разными знаменателями так вот:

$$9\,\frac{5}{12}+5\,\frac{7}{18}=\frac{113}{12}+\frac{97}{18}=\ldots$$

Но ловчее всего выйдет, коли целые части отдельно сложить, уж после сумму дробных частей добавить. Да вот только можно ли так-то делать? Конечно, можно! Законы сложения на то и даны!

$$9\,\frac{5}{12}+5\,\frac{7}{18}=\left(9+\frac{5}{12}\right)+\left(5+\frac{7}{18}\right)=(9+5)+\left(\frac{5^{\backslash 3}}{12}+\frac{7^{\backslash 2}}{18}\right)=$$

$$=14+\frac{5\cdot 3+7\cdot 2}{36}=14+\frac{15+14}{36}=14\,\frac{29}{36}\,.$$

Чтобы сложить смешанные числа, можно сначала обратить их в неправильные дроби и потом складывать по правилу сложения; а можно сложить их целые части и к полученному результату прибавить сумму дробных частей.

Вгляделся Иван в свои записи и решил, что записывать сложение смешанных чисел можно ещё и так:

$$9\,\frac{5}{12}+5\,\frac{7}{18}=14\,\frac{5\cdot 3+7\cdot 2}{36}=14\,\frac{29}{36}\,.$$

Вспомнилось тут Ивану, как он в батюшкином царстве десятичные дроби складывал — целые части с целыми, дробные с дробными да притом разряд под разрядом писал. Вот так:

$$\begin{array}{r} 2{,}4 \\ +\;3{,}85 \\ \hline 6{,}25 \end{array}$$

Взял он, да и переписал свой столбик, чтобы в Еленином царстве его поняли.

$$\begin{array}{r} 2\frac{4}{10} \\ + \\ 3\frac{85}{100} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\frac{40}{100} \\ + \\ 3\frac{85}{100} \\ \hline 5\frac{125}{100} \end{array} \qquad 5\,\frac{125}{100} = 6\,\frac{25}{100} = 6\,\frac{1}{4}\,.$$

— Ох, и по нраву мне дроби столбиком складывать! — говорит. — А нельзя ли так-то и с Елениными примерами устроить?

Сказал да и сделал.

$$\begin{array}{r} 9\frac{5}{12} \\ + \\ 5\frac{7}{18} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\frac{15}{36} \\ + \\ 5\frac{14}{36} \\ \hline 14\frac{29}{36} \end{array}$$

Но в письме, что Елене составил, записывать столбиком не стал, некрасиво ему показалось. Оставил запись в строчку.

Улетел голубок с ответом, Иван-царевич смотрит ему вслед, вздыхает:

— Были бы у меня крылья, слетал бы к суженой на минуточку, налюбовался бы, тогда бы и назад воротился — потому что не вся работа со сложением сделана Вот, к примеру, на такой вопрос ответа нет: как натуральное число с обыкновенной дробью складывается?

Или на такой вот: как обыкновенную дробь с десятичной сложить?

А ведь случай этот для меня особо желанный.

Как тут было ему пример не сочинить! Сочинил и решил, да ещё двумя способами!

$$\frac{1}{4} + 0{,}2.$$

Первый способ:

$$\frac{1}{4} + 0{,}2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{10} = \frac{1}{4}^{\backslash 5} + \frac{1}{5}^{\backslash 4} = \frac{5+4}{20} = \frac{9}{20}\,.$$

Второй способ:

$$\frac{1}{4} + 0{,}2 = 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}45.$$

И ещё пример придумал:

$$\frac{1}{3} + 0{,}5.$$

Сосчитал одним способом:

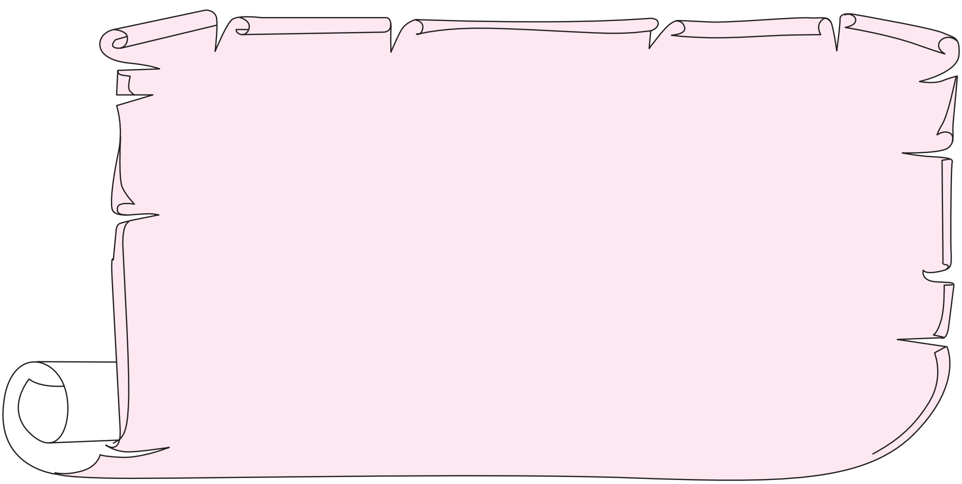
$$\frac{1}{3} + 0{,}5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6},$$

за второй было взялся, да вспомнил, что $\frac{1}{3}$ никогда в конечную десятичную дробь не обернётся.

— Вот и выходит, — говорит, — что если десятичную дробь с обыкновенной складываешь, то думать надо, какой способ сложения выбрать: десятичную дробь в обыкновенную обращать, или обыкновенную в десятичную. Первый-то способ всегда годится, а второй — нет! Хоть и хорош он и мне люб, да не всегда годен!

Эх, жаль, голубок улетел, не с кем весточку про это послать... Ну, ничего, при встрече скажу.

(*Много ты узнал, читатель, про сложение дробей обыкновенных, однако ещё не всё! Вот как рациональные числа с разными знаками складывать? Не знаешь! Об этом после поговорим, а пока всё самое главное, что про сложение уже узнал, в грамотку занеси.*)



ГЛАВА 15
ВЫЧИТАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

В ту пору туман на дороге рассеялся. Кончилась, знать, власть Кощея зловредного. Куда уж ему с Иваном тягаться! Иван, как-никак, про три действия с дробями все разузнал.

Приосанился Иван-царевич, пыль дорожную стряхнул, кудри русые расчесал да пошёл...

Идёт-торопится. Глядь, лавка на пути.

— Надо, — думает, — зайти, гостинец Елене выбрать.

Зашёл и спросил ленту самую алую и книгу самую что ни на есть учёную.

Лента та $\frac{1}{4}$ деньги́ стоила, а книга — $\frac{2}{5}$ деньги́. Заплатил Иван-царевич одну деньгу́, подали ему, что спросил, да сдачу вернули — $\frac{7}{20}$ деньги́. Стоит он, сомневается: не зря ли ему ту сдачу дали, да ещё двадцатыми долями?

Задумал Иван-царевич расчёт проверить.

— Какими бы числами ни считали, — говорит, — надо сложить, сколько книга да сколько лента стоит. Тогда и узнаешь, сколько всего платить. А чтобы узнать, сколько сдачи дадут, вычитать надо.

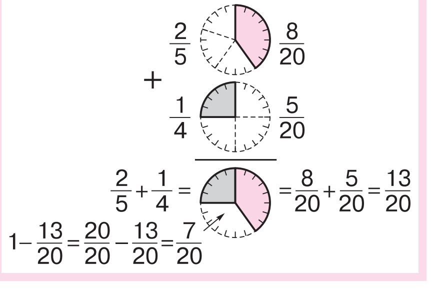
Составил Иван такой план:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{4} \quad \text{— первое действие;}$$

$$1-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right) \quad \text{— второе действие.}$$

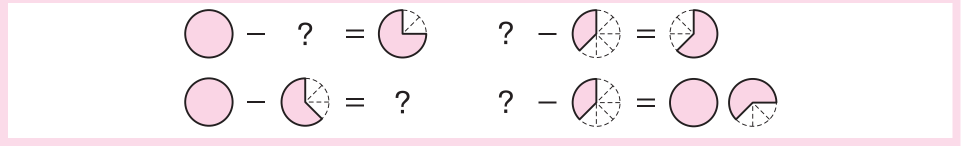
— Вот $\frac{7}{20}$ получиться и должно, — говорит. — Да поди, попробуй, получи тут $\frac{7}{20}$!

Однако пробовать надо... Сделал Иван рисунки, провёл вычисления.



Сделал расчёт Иван, а все из лавки не идёт. Смотрит, как лавочник торгует да сдачу даёт. Покупали у него товара разного: то за $\frac{65}{100}$ деньги, то за $\frac{1}{20}$ или за $\frac{4}{11}$, напоследок за $\frac{121}{1000}$ деньги пряников печатных купили. А подавали всякий раз всего одну деньгу.

(*А ты, читатель, подсчитай, какую сдачу давал лавочник. Затем на картинки взгляни и разберись, сколько денег подано, за сколько денег товар куплен, сколько сдачи получено.*)



Постоял-постоял Иван в лавке, да и составил правило:

Чтобы из единицы вычесть обыкновенную дробь, надо эту единицу раздробить на доли, в которых дана вычитаемая дробь, а потом найти разность дробей с одинаковыми знаменателями.

Если у дробей знаменатели одинаковые, так их и вычитать легко!

Разность двух обыкновенных дробей с одним и тем же знаменателем равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным разности числителей этих дробей.

$$\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{20 - 13}{20} = \frac{7}{20}.$$

(*Как ты думаешь, читатель, верное ли правило у Ивана? Для всех ли случаев вычитания оно годится? Да рассмотри примеры наши и на вопросы к ним ответь.*)

а) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$; б) $\frac{15}{20} - \frac{2}{20}$; в) $\frac{15}{20} - \frac{4}{20}$; г) $\frac{3}{4} - \frac{1}{5}$;

д) $7\frac{3}{4} - 2\frac{1}{6}$; е) $7\frac{3}{4} - 2\frac{5}{6}$; ж) $7\frac{3}{4} - 2$; з) $3 - \frac{1}{4}$;

и) $3 - 1\frac{1}{4}$; к) $27 - 19$; л) $1{,}37 - 0{,}9$.

Есть ли здесь примеры про:

- вычитание дробей с одинаковыми знаменателями;
- вычитание дробей с разными знаменателями;
- вычитание целого числа из смешанного;
- вычитание дроби из целого числа;
- вычитание смешанного числа из смешанного?

Какие ещё случаи вычитания здесь есть?

(*Выполняя вычитание, помогай себе рисунками — проверяй вычитание сложением. Какой случай тебе самым трудным показался? Попробуй составить правило вычитания любых положительных рациональных чисел.*)

Иван-то тем временем уж в терем к Елене вошёл. На скамью присел с дороги. Сидит, Елену дожидается. Та по хозяйству кое-что справить пошла. И не знает, что суженый вернулся!

Иван пока ждал, времени зря не терял. Достал покупку свою — книгу учёную, взялся из неё примеры на вычитание решать. Решает да записи делает.

(*Рассмотри, читатель, Ивановы записи. Какие особые случаи вычитания он разобрал? Объясни каждый шаг в его решениях.*)

$$\begin{array}{r} 2\;9\;10 \\ 3 \\ -\,0\;2\;5 \\ \hline 2\;7\;5 \end{array} \qquad 2{,}75 = 2\frac{3}{4} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2\,\frac{4}{4} \\ 3 \\ -\;\frac{1}{4} \\ \hline 2\,\frac{3}{4} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \ldots \\ 3 \\ -\,1\,\frac{1}{4} \\ \hline \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\text{ ч} - 25\text{ мин} \\ -\;2\text{ ч} - 58\text{ мин} \\ \hline \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\frac{25}{60} \\ -\;2\frac{58}{60} \\ \hline \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\frac{3}{4} \\ -\;2\frac{1}{6} \\ \hline \ldots \end{array} \begin{array}{c} = \\ \\ = \\ \\ \end{array} \begin{array}{r} 7\frac{9}{12} \\ 2\frac{2}{12} \\ \hline 5\frac{7}{12} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7\frac{3}{4} \\ -\;2\frac{5}{6} \\ \hline \ldots \end{array} \begin{array}{c} = \\ \\ = \\ \\ \end{array} \begin{array}{r} 7\frac{9}{12} \\ 2\frac{10}{12} \\ \hline \ldots \end{array} \begin{array}{c} = \\ \\ = \\ \\ \end{array} \begin{array}{r} 6\frac{21}{12} \\ -\;2\frac{10}{12} \\ \hline 4\frac{11}{12} \end{array}$$

$$7\frac{3}{4} - 2\frac{5}{6} = \frac{31}{4}^{\backslash 3} - \frac{17}{6}^{\backslash 2} = \frac{93-34}{12} = \frac{59}{12} = \frac{11}{12};$$

$$7\frac{3}{4} - 2\frac{5}{6} = \left(7 + \frac{3}{4}\right) - \left(2 + \frac{5}{6}\right) = (7-2) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) =$$

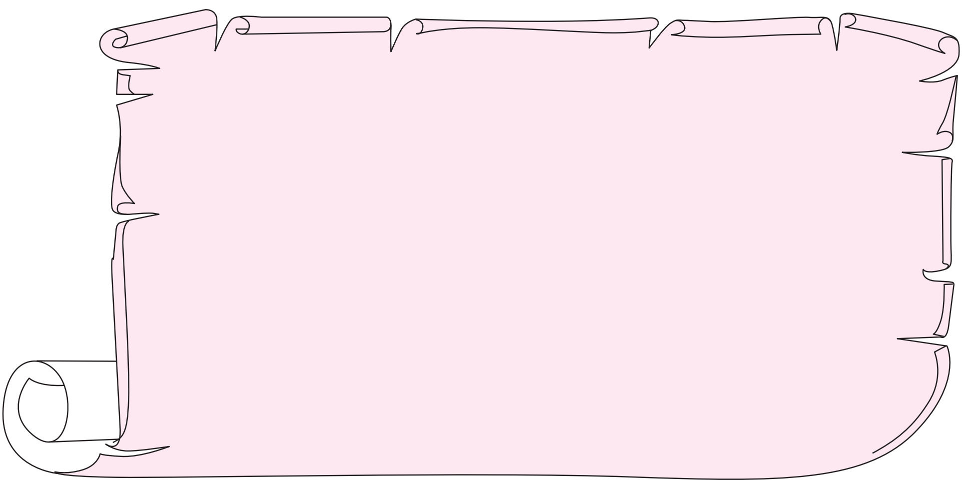
$$= 5 + \frac{9-10}{12} = 5 + \left(-\frac{1}{12}\right) = 4\frac{11}{12};$$

$$7\frac{3}{4} - 2\frac{5}{6} = 5\frac{9-10}{12} = 4\frac{21-10}{12} = 4\frac{11}{12}.$$

Иван-то так книгой увлёкся, что не заметил, как Елена в терем вошла. Стоит, к косяку прислонилась, замерла, от радости слова сказать не может. А Иван только когда в книге той до магического квадрата добрался, только тогда опомнился, Елену увидел. Ленту алую подарил, за белы руки взял. Тут и про магический квадрат забыл.

$\frac{16}{21}$		
	1	$\frac{1}{3}$
		$1\frac{5}{21}$

(*Ты уж, читатель, сам его заполни, чтоб дело на полдороги не бросать. А после и за грамотку берись.*)



ГЛАВА 16

КАК СКЛАДЫВАТЬ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Стоят Елена Прекрасная да Иван-царевич посреди горницы рука об руку. Разговоры ведут долгие да подробные, обо всем на свете разговаривают — наговориться не могут. Ну и о вычитании речь, конечно, тоже зашла.

— А ещё спасибо тебе, Елена Прекрасная, — говорит Иван-царевич, — за письма твои заботливые, я через твои письма не только сложение, но и вычитание обыкновенных дробей все как есть понял. Одно вот только, вроде, и осталось промеж нас недосказанным...

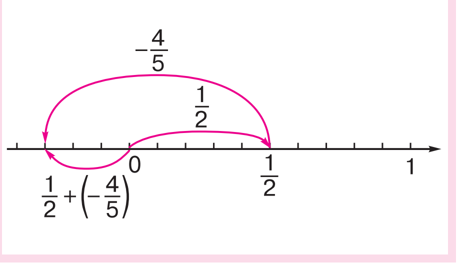
— О чем это ты, Иван-царевич? — Елена спрашивает.

— О тех числах я, у которых знаки разные. Есть ведь у тебя такие. Как же их складывать? Да как одно из другого вычесть? Такие вот два вопроса у меня к тебе и есть.

— Не два вопроса, а всего один ты мне задал, нам с тобой только о сложении чисел с разными знаками речь вести надо:

Вычесть из одного числа другое — это значит сложить уменьшаемое с числом, противоположным вычитаемому.

Например: $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)$.



— Так и в нашем царстве с целыми числами да десятичными дробями точно та же история происходит, — радуется Иван-царевич.

Елена тут ему картинку ещё показала — смотри, дескать, что у нас под сложением понимают.

Иван радуется:

— У нас так же, — говорит. — Мы при сложении десятичных дробей точно такие же рисунки делаем.

— Ты картинку-то опиши, — Елена советует.

— Это можно:

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{4}{5}\right)=-\left(\frac{4}{5}^{\backslash 2}-\frac{1}{2}^{\backslash 5}\right)=-\frac{4\cdot 2-1\cdot 5}{10}=-\frac{8-5}{10}=-\frac{3}{10}.$$

Знак «минус» перед скобкой поставил, потому что $\left|-\frac{4}{5}\right|>\left|\frac{1}{2}\right|$.

Описал Иван картинку, да ещё раз в десятичных дробях пересчитал:

$$0{,}5+(-0{,}8)=-(0{,}8-0{,}5)=-0{,}3.$$

— Полное у нас в этом вопросе согласие! — говорит.

— Нет, — говорит Елена, — маленькое отличие все ж есть!

— Какое такое отличие?

— Да пишем мы по-другому: знак, что перед дробью стоит, мы к числителю относим:

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{-4}{5}=\frac{1\cdot 5+(-4)\cdot 2}{10}=\frac{5-8}{10}=\frac{-3}{10}=-\frac{3}{10}.$$

— Да нет никакой разницы, ведь и ответ тот же получается, а главное — суть одна.

Хотела было Елена возразить да ножкой притопнуть, но удержалась.

— Ни к чему, — думает, — ссориться нам.

Отвела разговор в сторону, о погоде поговорила. А потом уж предложила:

— Давай, — говорит, — мил-друг, Иванушка, за столы дубовые сядем да алгоритм запишем. Каждый запишет свой алгоритм для сложения дробей с разными знаками.

Иван тоже спорить не стал, сел алгоритм составлять. Вот что у них получилось:

Чтобы сложить дроби с разными знаками, нужно:

Алгоритм Елены

1. Отнести знаки, которые перед дробями записаны, к числителям дробей.
2. Привести дроби к общему знаменателю.
3. Сложить полученные дроби.

Алгоритм Ивана

1. Сравнить модули этих дробей.
2. Записать знак числа с бо́льшим модулем.
3. Приписать к этому знаку разность между бо́льшим и меньшим модулем.

Сравнил Иван алгоритмы — и по числу шагов, и по тому, какой запомнить легче. Да самое главное, о том подумал, пригодны ли алгоритмы ко всем случаям сложения: о том, сработают ли эти алгоритмы в случае сложения противоположных чисел?

(*И ты, читатель, о том подумай.*)

Сравнил алгоритмы Иван да признал, что Елена права была. Есть в алгоритмах разница.

А Елена спрашивает, осторожненько так:

— Ну, Иванушка, чьё правило лучше?

— Да твоё, вроде. Но все же хочется мне посмотреть, как у нас с тобой дроби с одинаковыми знаками складываться будут.

— Так зачем дело стало?

Взялись оба за сложение, пример выбрали:

$$-\frac{9}{10}+\left(-\frac{5}{12}\right).$$

(Положительные-то числа им ни к чему было складывать.)

Начали Иван с Еленою решения писать.

Иваново решение:

$$-\frac{9}{10}+\left(-\frac{5}{12}\right)=-\left(\frac{9}{10}+\frac{5}{12}\right)=-\ldots$$

Еленино решение:

$$-\frac{9}{10}+\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{-9}{10}+\frac{-5}{12}=\frac{-\ldots}{\ldots}\quad.$$

(*Ты, читатель, доведи их решения до конца. Чьё решение тебе более удачным показалось?*)

Елена-то, как этот пример решила, губку легонько прикусила. А Иван говорит:

Сумма отрицательных чисел — число отрицательное. Модуль этой суммы равен сумме модулей слагаемых.

Но Елена не сдаётся, свой способ сложения смешанных чисел предлагает:

$$-3\,\frac{1}{4}+\left(-7\,\frac{5}{6}\right)=-\,\frac{13}{4}+\left(-\,\frac{47}{6}\right)=\frac{-13}{4}+\frac{-47}{5}=\ldots$$

И пример сложения смешанных чисел с разными знаменателями пишет:

$$9\,\frac{5}{6} + \left(-12\,\frac{3}{7}\right).$$

Опять решать взялись. Елена по-своему, Иван по-своему:

$$9\,\frac{5}{6} + \left(-12\,\frac{3}{7}\right) = \frac{59}{6} + \frac{-87}{7} = \ldots\ ;$$

$$9\,\frac{5}{6} + \left(-12\,\frac{3}{7}\right) = -\left(12\,\frac{3}{7} - 9\,\frac{5}{6}\right) = \ldots\ .$$

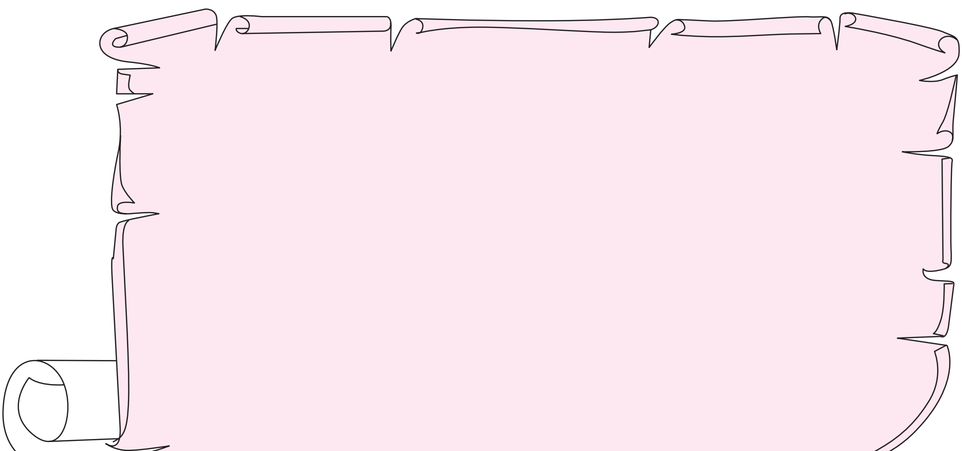
(*Ты, читатель, укажи, где чьё решение и сформулируй правило сложения чисел с разными знаками.*)

Посидели Елена с Иваном, подумали, после ещё один способ решения нашли:

$$9\,\frac{5}{6} - 12\,\frac{3}{7} = (9 + (-12)) + \left(\frac{5}{6} + \frac{-3}{7}\right) = \ldots\ .$$

До конца только не довели, все уж им понятно стало. О жизни разговор затеяли.

(*Тебе, читатель, все понятно? Но все-таки решение до конца доведи, а после грамотку памятную составь.*)



ГЛАВА 17

КОГДА ПРИМЕНЯЕТСЯ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН

Пока Елена Прекрасная с Иваном-царевичем разговор вели неторопливый да ласковый, Баба-Яга с Кощеем Бессмертным все спорили, чуть на всю жизнь не рассорились.

О том спорили, кто лучше задачки решит, — Иван-царевич или Кощей? Вот они задачки, из-за которых весь сыр-бор пошёл:

а) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}$;

б) $3 \cdot 1000\frac{2}{3}$; в) $999\frac{1}{3} \cdot 3$.

Кощей говорит, — только так решать можно:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{\overset{\backslash 4}{9}}{8} = \frac{9+3+36}{32} = \frac{48}{32} = 1\frac{1}{2}.$$

— И нечего, — говорит, — твоему Ивану-царевичу тут больше делать.

А Баба-Яга кипятится!

— Есть, — говорит, — тут для Ивана работа — в каждом слагаемом он произведение увидит, в каждом произведении один и тот же множитель углядит:

$$\boxed{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{8} + \boxed{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{8} + \boxed{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{2}.$$

Да тебе, Кощей, не понять, видно, что этот общий множитель за скобки вынести можно. А Иван это живо сделает:

$$\boxed{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{8} + \boxed{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{8} + \boxed{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3+1+12}{8}\right) = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Кощею признать бы, что этот путь проще. А обидно ему!

— Случайно, — говорит, — ответы совпали.

— И вовсе не случайно, — Баба-Яга настаивает, — а по закону распределительному, который Елена дистрибутивным называет.

— А Иван не знает, — говорит Кощей, — что тот закон дистрибутивный

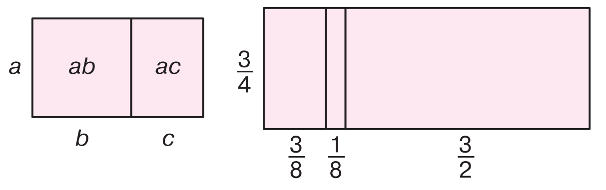
$$a(b + c) = ab + ac$$

для рациональных чисел выполняется!

— Ты что же это, старый, — Баба-Яга возмущается, — закон для натуральных чисел работает, для целых чисел работает, для десятичных дробей работает. Чем же это, интересно мне знать, обыкновенные дроби хуже? Быть не может, чтобы Иван в этом не разобрался.

Тут уж и сам Кощей вспомнил кое-что.

— Конечно, — говорит, — если речь о площади идёт, о такой вот:



то верно выходит:

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}\,.$$

— Можно показать, что и для любых других чисел из нашего царства тот дистрибутивный закон верен, — это Баба-Яга поспокойнее сказала. Видит ведь, что Кощей с ней уже почти согласился.

Напоследок не удержалась, Кощея поддразнила.

— Вот, — говорит, — Елене на платье к свадьбе шитья золотого дважды докупать пришлось — сперва 5 аршин купили, потом $\frac{7}{8}$ аршина да $\frac{12}{25}$ аршина. Цена тому шитью большая: $333\frac{1}{3}$ деньги за аршин. Хочешь узнать, сколько всего денег потрачено — считай хоть по-Иванову, хоть по-своему, один результат и будет. Большой результат-то! Не веришь — сам проверь.

Кощей видит, что права Баба-Яга, но все упрямится!

— Быстрее не сосчитать, чем я считаю:

$$-3 \cdot 1000\,\frac{2}{3} = -\,\frac{3 \cdot 3002}{3} = -3002.$$

Только по правилу умножения считать можно!

Или такой случай:

$$999\,\frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{999 \cdot 3 + 1}{3} \cdot 3 = 2998.$$

Трудные примеры, долго считать!

А Баба-Яга хихикает:

— Уж эти примеры вообще устные — если дистрибутивный закон знать да применять с умом:

$$-3 \cdot 1000\,\frac{2}{3} = -3 \cdot \left(1000 + \frac{2}{3}\right) = -\left(3 \cdot 1000 + 3 \cdot \frac{2}{3}\right) =$$
$$= -(3000 + 2) = -3002;$$

$$999\,\frac{1}{3} \cdot 3 = \left(1000 - \frac{2}{3}\right) \cdot 3 = 1000 \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 3000 - 2 = 2998.$$

Тут Кощей и примолк, да себе в грамотку записал:

Чтобы умножить на число сумму, можно умножить на это число каждое слагаемое и сложить полученные произведения.

$$\overrightarrow{\underleftarrow{a(b + c) = ab + ac}}$$

Чтобы найти сумму произведений, содержащих общий множитель, можно взять этот общий множитель из каждого произведения и умножить его на сумму оставшихся множителей.

(*Тебе, читатель, эта грамотка тоже пригодится.*)

Тем временем царю-батюшке в тридесятое царство гонца послали с поклоном, с обыкновенными дробями (их-то Елена Прекрасная из Ивановой котомки достала да в резной сундучок уложила). И попросили царя непременно к свадьбе поспеть. Царь-батюшка ждать себя долго не заставил, и начался тут свадебный пир, весёлый-развеселый. Тут и сказке конец.

(*Только тебе, друг-читатель, над вопросами нашими на прощанье полезно будет подумать.*)

ВОПРОСЫ ДЛЯ РАЗМЫШЛЕНИЯ

1. Какими мерками меряют в Ивановом царстве то, что нельзя целой меркой измерить?
2. Какими мерками меряют в Еленином царстве то, что нельзя целой меркой измерить?
3. Что неправильное в Еленином царстве полезным слывёт?
4. Если придёт какой человек из одного царства в другое, станет умножать-складывать по своим законам, так не выйдет ли с ним конфуза? Не засудят ли чужестранца законники?
5. Можно ли в Еленином государстве любое число взять да к нему такое подобрать, чтобы их сумма нулю равнялась Можно ли то же самое в Ивановом царстве сделать?
6. Можно ли в Еленином царстве любое число взять да такое к нему подобрать, чтобы их произведение единице равнялось? Можно ли в Ивановом царстве то же самое сделать?
7. Как ты думаешь, читатель, остались ли меж Иваном да Еленой какие вопросы невыясненные? А коли остались, то не будет ли из-за них раздору семейного? Вот, к примеру, можно ль узнать, какое царство числами богаче? Иваново? Еленино? Или чисел в царствах поровну?
8. Какие задачи в Еленином царстве решать сподручнее, а какие в Ивановом?
9. Из каких царств гости пришли да такие подарки принесли: 2,(43); ; 2,43; 2,431562...; $\frac{999}{433}$? Как те подарки по порядку в линеечку разложить, один за другим, больший за меньшим?
10. Если какое-нибудь Еленино число с Ивановым перемножить, то в каком царстве окажется произведение этих чисел?
11. Как приедет Елена в Иваново царство, так найдёт ли там для себя какую диковинку?

Может, ты, читатель, свои вопросы придумаешь? И вот что ещё напоследок скажем. Не всякий ответ в тот же час отыщется. Это ничего, иной вопрос полезнее ответа бывает... Придёт время — ответ будет найден, а там и новые вопросы возникнут.

ПРО ОТНОШЕНИЯ, ПРОПОРЦИИ, ПРОЦЕНТЫ

ГЛАВА 18
ОТНОШЕНИЕ ЧИСЕЛ

Пришла пора Ивану-царевичу на царство встать. Но прежде решил царь-батюшка проверить, готов ли Иван к этому — можно ли ему тридесятое царство доверить? Да хорошей ли царицей Елена Прекрасная станет, верной ли помощницей Ивану? Решил царь испытать сына с невесткой. Позвал к себе сына и говорит:

— Завтра у нас король заморский ко двору будет. Надобно принять его по-царски, хорошим отношением порадовать. А для того приготовить наше варенье царское, вишнёвое в подарок. Очень король до него охоч. Для варенья нужно взять вишню и сахар в весовом **отношении** 2 : 3. Да смотри, беспременно сам вари! Потому что рецепт мой в строгой секретности находится. Такого варенья, как в нашем тридесятом царстве, и сыскать нигде нельзя.

Пошёл Иван-царевич думу думать, сколько ж для того варенья нужно взять сахара и сколько — вишни. И о каком-таком отношении батюшка говорил? Ну, про хорошее отношение он все понимал, а вот что это за штука такая — весовое отношение, про то он ведать не ведал.

Пришла ему на помощь Елена Прекрасная.

— Слова «взять в весовом отношении 2 : 3» означают, муж мой любезный, вот что: на каждые 2 весовые меры вишни нужно взять 3 весовые меры сахара.

— Так сколько же сахара нужно взять? — Иван спрашивает.

— Сколько захочешь.

— А вишни? Тоже сколько захочу?

— Ты меру волен выбрать, какую душе твоей угодно, — Елена отвечает, — правильнее будет сказать, единичную меру. Ею будешь потом измерять и вес сахара, и вес вишни. Если за единичную меру выберешь один фунт, то нужно будет взять 3 фунта сахара и 2 фунта вишни. Но ты можешь выбрать и любую другую меру. Один золотник, к примеру.

(*В одном золотнике, читатель, ровнёхонько* 4,266 *наших граммов содержится. Часто в старину золотниками вес мерили, удобно это людям было.*)

— Не маловато ль будет варенья? А что, можно же за единичную меру 1 пуд взять? Или, к примеру, три фунта?

Да только сомневаюсь, можно ль принимать три фунта за одну единицу? Ведь три совсем не равно одному!

Улыбнулась Елена, Ивана обнадёжила. Можно, мол, почему нет?

— Есть ведь в хозяйстве одна трёхфунтовая гиря, — сказала, — да и не одна, сколько надо, столько и наберётся. И мерить вес сахара да вишен этими трёхфунтовыми гирями вполне сподручно.

— Правда твоя, — говорит Иван, — тогда возьмём 3 единицы сахара (что составит $3 \cdot 3 = 9$ фунтов) и 2 единицы вишни (что составит $3 \cdot 2 = 6$ фунтов).

— Да, мил-друг, Иванушка, совсем ведь неважно, сколько здесь по отдельности берётся сахара или вишни! А важно то, что они во всех случаях, когда варенье приготовлено по рецепту, в одном и том же отношении находятся.

— Понял теперь. Слушай, а может сахару побольше взять? Да батюшку ослушаться никак нельзя, рецепт не исполнить...

— Это смотря в каком смысле: «взять больше». Если количество вишни увеличить в соответствии с количеством сахара, то варенье останется таким же, как в рецепте.

А вот если увеличить количество сахара, а количество вишни не увеличивать, например, взять 4 фунта сахара и 2 фунта вишни, то варенье станет слишком сладким. Если же взять 2 фунта сахара и 5 фунтов вишни, то, оскомину набьёшь — сваренное варенье кислым окажется.

— Да чего уж там, понял я. Завет царя-батюшки нарушишь — так получишь другие отношения количества сахара к количеству вишни. И варенье куда хуже по вкусу выйдет.

— Понял, значит, что такое весовое отношение $2 : 3$?

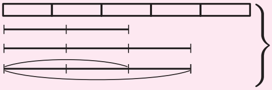
— Как есть понял. Если я беру сахара 3 фунта, то вишни — 2 фунта, если сахара 6 пудов, то вишни — 4 пуда, если сахара 18 фунтов, то вишни — 12:

$$2 : 3 = 4 : 6 = 12 : 18.$$

(*Ну-ка, читатель? А если сахару 0,5 килограмма взять? Иван-то про килограммы да граммы не слыхивал. Сосчитал? Правильно, вишни на полкило сахару надо взять всего 750 граммов! Главное, сколько бы продуктов ни взять, если разделить количество сахара на количество вишни, то в результате всегда получится* $\frac{2}{3}$.)

Ну, отправились Иван-царевич с Еленою Прекрасною варенье варить Иван прежде памятную грамотку составил. Про новое математическое понятие — **отношение**. Кое-что ещё и Елена в грамотку добавила.

Отношения



$2:3$; $\frac{2}{3}$.

Отношением числа a к числу b (a и b не равны нулю) называют частное от деления числа a на число b.

Отношение числа a к числу b записываем так:

$$a:b \text{ или } \frac{a}{b}.$$

При этом a и b называют членами отношения; a называют предшествующим членом отношения, а b — последующим членом отношения.

(*Пока Иван-царевич да Елена Прекрасная варенье варят, заполни-ка, друг-читатель, пропуски в таблице «Свойства отношений».*)

Свойства отношений	
$1:4=(1\cdot 12):(4\cdot 12)$; $\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 12}{4\cdot 12}$;	$a:b=(a\cdot n):(b\cdot n)$, где $n\neq 0$; $\frac{a}{b}=\ldots$, где $n\neq 0$; $a:b=(a:n):(b:n)$, где $n\neq 0$; $\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}$, где $n\neq 0$.

Отношение не изменится, если предыдущий и последующий его члены умножить или разделить на одно и то же, не равное нулю число.

(*Прочти внимательно правило под таблицей. Подумай и скажи — согласен ты с ним или нет? Да не забудь это правило в памятную грамотку добавить.*)

ГЛАВА 19

О ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Долго ли коротко — сварилось варенье, да знатное — 14 вёдер вышло. Раздобыл Иван две больших корчаги.

(*Корчага, читатель, — это глиняная посудина для всяких хозяйственных надобностей.*)

Собрался Иван в каждую из них по 7 вёдер вылить. Одну корчагу в царстве оставить, а другую гостю поднести. Но остановила его Елена.

— Распределять варенье надобно с умом.

— Как так?

— Ну, сам посуди. В нашей царской семье пока трое, Царь-батюшка, да мы с тобой. А у гостя семья чуть поболее — он сам, да королева, да два сына-королевича. Батюшка всегда за справедливость стоит. Да и гость на этот счёт очень придирчив, справедливость ему всего дороже. Вот и выходит, что разлить варенье по корчагам нужно в отношении «три к четырём».

(*Ну, друг-читатель, как разделить-распределить варенье по корчагам? Как разделить так, чтобы каждому досталось точнёхонько в соответствии с установленным отношением? В старину говорилось про это так: как «разделить по мере»?*

Сравни своё решение с теми, которые Иван с Еленой придумали.)

Решение Ивана.

1) $3 + 4 = 7$ (семь человек в двух семьях);
2) $14 : 7 = 2$ (два ведра варенья приходится на одного человека);
3) $2 \cdot 3 = 6$ (шесть вёдер должна получить семья царя);
4) $2 \cdot 4 = 8$ (восемь вёдер должна получить семья гостя-короля заморского).

Проверка: $6 : 8 = 3 : 4$.

Ответ: 6 вёдер и 8 вёдер.

Решение Елены.

1) $3 + 4 = 7$ (семь человек в двух семьях);

2) $14 \cdot \frac{3}{7} = 6$ (шесть вёдер должна получить семья царя);

3) $14 \cdot \frac{4}{7} = 8$ (восемь вёдер должна получить семья гостя-короля заморского)

Проверка: $6 : 8 = 3 : 4$.

Ответ: 6 вёдер и 8 вёдер.

(*Вдумайся, читатель, в эти записи. И скажи, можно ли по-другому решить задачу.*)

Вот, так, например:

$$4x + 3x = 14;$$
$$7x = 14;$$
$$x = 2; \quad \text{два ведра на 1 человека}$$
$$2 \cdot 3 = 6; \quad 2 \cdot 4 = 8.$$

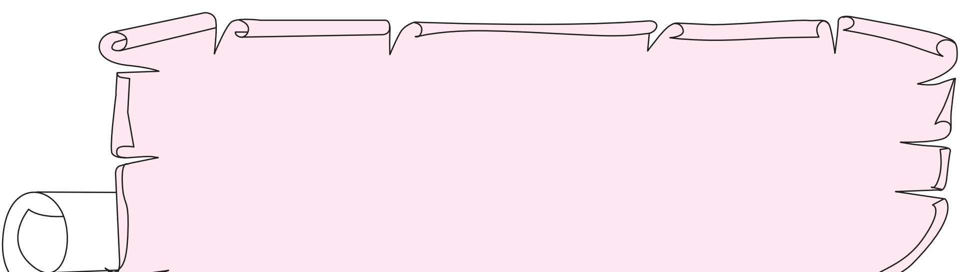
Какие слова в условии задачи позволили составить это уравнение?

Что в этом уравнении принято за неизвестную?

Что означают выражения $4x$ и $3x$?

Что означают числа 6 и 8?

(*Встречался ли ты, читатель, с ситуацией, в которой требовалось распределить что-то в том или ином заданном отношении? Если да, то опиши эту ситуацию языком математики.*)



ГЛАВА 20

ЧТО ТАКОЕ ПРОПОРЦИЯ

Справился Иван-царевич с первым отцовым заданием, в грязь лицом не ударил. Ну, да и Елена ему помогла. А у царя-батюшки уж другое испытание наготове.

Стоит, говорит, терем в королевстве у гостя нашего, короля заморского. Хочу и я такой в нашем царстве-государстве видеть.

Высота того терема хорошая, да у нас он повыше будет. Как строиться начнёшь, я тебе ту высоту в особом указе пришлю. А про подножье, то есть основание терема сейчас поговорим.

Терем заморский, коли до него добраться и кругом обойти, имеет 30 шагов в ширину и 80 шагов в длину. Основание у него в виде прямоугольника сделано, понял? Поставь ты мне такой же терем, но чтоб длина основания в 120 шагов была! А ширину сам найди. Чтобы основание по форме как у заморского терема получилось, только размером побольше. Да смотри, чтоб к утру все готово было!

(*А ты, читатель, готов размеры основания терема рассчитать? Если так — берись, а потом свой способ сравни с Ивановым.*)

Начал Иван рассуждать:

— Составлю-ка отношение числа шагов в длину к числу шагов в ширину, оно мне поможет... Та-а-к. А ведь это ж у меня отношение длины к ширине в основании терема получилось!

Теперь составлю равенство отношений. И вмиг ширину основания заказанного терема определю.

Размеры-то определю, а вот построить терем к утру никак не поспеть.

Ну, тут Елена его успокоила, сказала, что есть у неё слуги верные — плотники умелые. Хлопнет в ладоши — вмиг явятся, терем к утру построят. Только нужно им размеры точнёхонько указать. В математике они, плотники волшебные, несильны. Ну, и начал Иван размеры терема рассчитывать:

— В задаче этой участвуют четыре величины, три из которых известны. Составлю таблицу, а неизвестную ширину нового терема через x обозначу.

	Заморский терем	Терем, который Ивану построить нужно
Ширина основания терема	30 шагов	x шагов
Длина основания терема	80 шагов	120 шагов

Длина терема к его ширине относится как 80 : 30. У нового терема, что Царь-батюшка заказал, то же самое отношение длины к ширине сохранить нужно. Иначе подножье-основание терема по форме другим станет. Значит, вот какое равенство соблюдать нужно:

$$80 : 30 = 120 : x.$$

Тут Елена на помощь пришла:

— Перепиши отношения в виде дробей, да дробь, стоящую слева, сократи. Получишь вот что:

$$\frac{8}{3} = \frac{120}{x}.$$

— А теперь давай воспользуемся свойством равных дробей — равенством перекрёстных произведений:

$$8 \cdot x = 3 \cdot 120, \quad \text{или} \quad 8x = 360,$$

и получим вот что:

$$x = 360 : 8, \qquad x = 45.$$

Вот она, ширина нового большого терема — 45 шагов! — обрадовался Иван.

— Да, — отвечает Елена, — пропорция нам помогла.

— Какая-такая пропорция? Мы же отношения величин находили!

— Прав ты, Иван-царевич, — Елена отвечает, — пришлось нам иметь дело с разными отношениями.

Взгляни-ка:

$$a : b \text{ и } c : d.$$

Эти два отношения могут быть равными друг другу, а могут быть и неравными. Но если окажется, что они равны, то есть окажется, что $a : b = c : d$, то такое равенство и называют **пропорцией.**

Хлопнула тут Елена в ладоши, явились чудо-плотники и вмиг терем построили. Шириной в 45 шагов, длиной в 120 шагов. И высотой той самой, что Царь-батюшка в отдельном указе назначил. И знатный вышел терем — точь-в-точь по заказу и красоты невиданной!

Иван с Еленой, пока терем строился, тоже без дела не сидели. Они о пропорции разговор вели. Елена-то много о ней интересного знала. Иван слушал, да раздумывал, что о пропорции в памятную грамотку записать. И вот что надумал:

Пропорцией называется равенство двух отношений.

Обозначение. В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ или $a : b = c : d$ числа a и d называют **крайними членами**, а числа b и c — **средними членами пропорции**.

$$\underbrace{a : \overbrace{b = c}^{\text{Средние члены}} : d}_{\text{Крайние члены}}$$

80 : 30 = 120 : 45. 80 относится к 30 так же, как 120 относится к 45, или отношение 80 к 30 равно отношению 120 к 45.	$a : b = c : d$. a относится к b так же, как c относится к d, или отношение a к b равно отношению c к d.

Основное свойство пропорции

Произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов, то есть, **если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$.**

Верно и обратное утверждение: **если a, b, c, d — не равные нулю числа и $a \cdot d = b \cdot c$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.**

Последняя-то запись про основное свойство пропорции у Ивана не сразу сложилась. Сперва он из чисел 2, 8, 12, 4, 24 составил разные отношения.

(*И ты, читатель, то же сделай.*)

Потом нашёл среди них равные отношения да записал произведения средних и крайних членов тех отношений. Ну, вывод у Ивана тут сам собой и сложился! Проверил Иван мысль свою на следующих пропорциях:

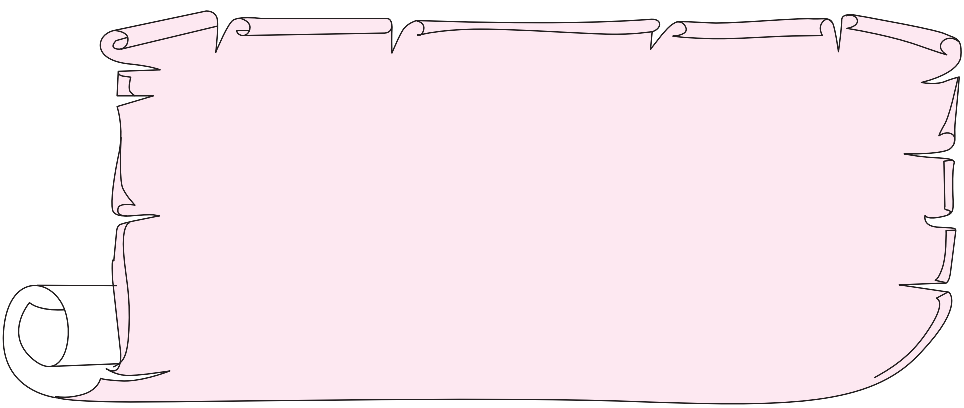
1) $1:3=6:18$; 2) $2:9=4:18$;

3) $0{,}1:0{,}5=2:10$; 4) $8:6=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$.

И потом записал свой вывод для пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

(*Ты читатель тоже этой проверкой займись. Как, согласен ли ты с Иваном?*)

А уж название «Основное свойство пропорции» Елена подсказала. При решении задачи-то о постройке нового терема Иван с Еленой составили пропорцию $\frac{8}{3}=\frac{120}{x}$. Для отыскания ширины постройки они по сути дела использовали это основное свойство пропорции: $8\cdot x=3\cdot 120$, $x=3\cdot 120$. По известным членам пропорции был найден её неизвестный член, то есть была решена пропорция.



ГЛАВА 21

ЧТО ТАКОЕ ПРОЦЕНТ

Встал терем, краше некуда. Доволен царь-батюшка. Ну, думает, теперь проверить надо, сумеет ли Иван казной государственной толково распоряжаться. Коли сумеет, то можно сына на царство ставить.

Тут как раз казначей пришёл с докладом. Собрались купцы за заморским товаром: шелками, пряностями, мехами, драгоценностями. Чтобы купить товар, трое из них просят дозволения взять в долг из казны одну и ту же сумму денег. С возвратом, конечно. Да с возвратом на определённых условиях.

Один купец обещает с каждого тюка товара стоимостью 2200 рублей, кроме долга, ещё вернуть 88 рублей.

Другой — с каждой единицы товара стоимостью 1300 рублей обещал вернуть эти 1300 да ещё 39 рублей.

Третий купец за каждые занятые 100 рублей обещает вернуть на 5 рублей больше.

Выслушал казначея царь и говорит:

— Дай денег только одному купцу. Тому, от которого казне моей царской наибольшая выгода будет. А определить, чьё обещанье выгоднее, велю я сыну моему, Ивану-царевичу. Пусть он нам скажет, который из купцов больше прибыли казне принесёт.

Взялся Иван за решение задачи.

Для сравнения обещаний купеческих составил Иван отношения:

88 руб. к 2200 руб.
39 руб. к 1300 руб.
5 руб. к 100 руб.

Получил: $\frac{88}{2200}$; $\frac{39}{1300}$; $\frac{5}{100}$.

Тут казначей и говорит:

— С давних времён, чтобы понять, кому выгоднее дать взаймы, люди вычисляли, какую прибыль можно получить на каждую сотню отданных в долг денег. Отношение $\frac{5}{100}$ как раз и говорит о том, что со 100 рублей можно получить прибыль в 5 рублей.

— Постараюсь я и другие отношения заменить равными им отношениями, но со знаменателем 100, — тогда и сравнить смогу, который из купцов пощедрее будет, — сказал Иван. Сказал да сделал:

$$\frac{88}{2200} = \frac{4}{100}; \qquad \frac{39}{1300} = \frac{3}{100}.$$

Получилось у него, что первый купец принесёт прибыль

$$\frac{88}{2200} = \frac{4}{100};$$

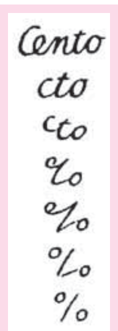
второй купец принесёт прибыль

$$\frac{39}{1300} = \frac{3}{100};$$

ну, про третьего купца уж известно, он обещает прибыль $\frac{5}{100}$.

Значит, выгоднее одолжить деньги третьему купцу.

Казначей Ивану рассказывает:



Давным-давно купцы на Руси вместо $\frac{5}{100}$ писали «пять со ста». А в далёкой Италии на свой манер делали. «Со ста» у них как «pro centum» писалось.

Постепенно превратилось «pro centum» в «per cento», потом в «procento» — и разошлось такое написание по всему миру. А на Руси вместо слов «со ста» слово «процент» в речах да книгах купеческих появилось. Потом и значок особый вместо слова «процент» появился для сокращения записи. Как, спрашиваешь, такой значок придумали? А очень может быть, что вот так, как на рисунке этом показано.

— О, как! — Иван говорит. — Выходит, я своё решение теперь так записать могу:

первый купец обещает $\frac{88}{2200} = \frac{4}{100} = 4\%$ прибыли;

второй купец обещает $\frac{39}{1300} = \frac{3}{100} = 3\%$ прибыли;

третий купец обещает $\frac{5}{100} = 5\%$ прибыли.

С теми словами пошёл он к царю-батюшке докладывать, что третий купец 5% предлагает от суммы долга, то есть больше всех. Стало быть, заём — деньги в долг — ему и дать следует.

Одним процентом называют одну сотую часть.

(*Ну, что ж, читатель, Ивану пора на царство вставать, а мы с тобой поподробнее о проценте поговорим.*)

Запись

1%

$\frac{1}{100}$ 0,01 1 : 100

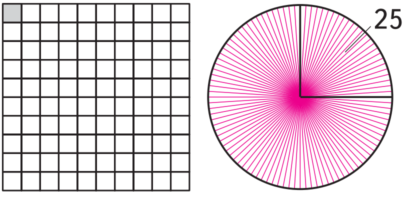
Чтение

1%

Одна сотая · Один из ста · Один к ста

Изображение

1%

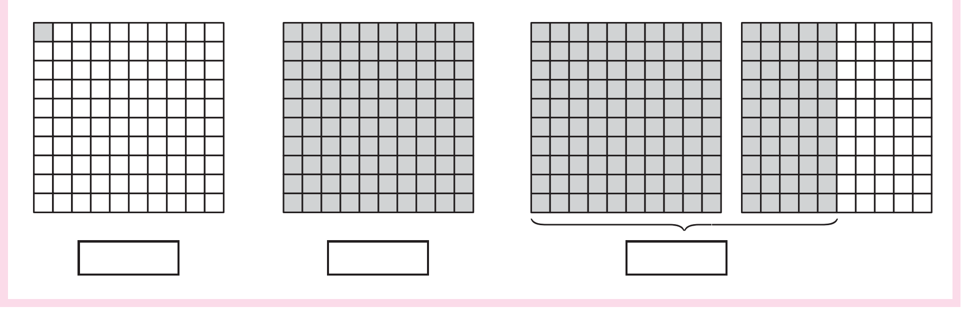


25% или $\frac{1}{4}$

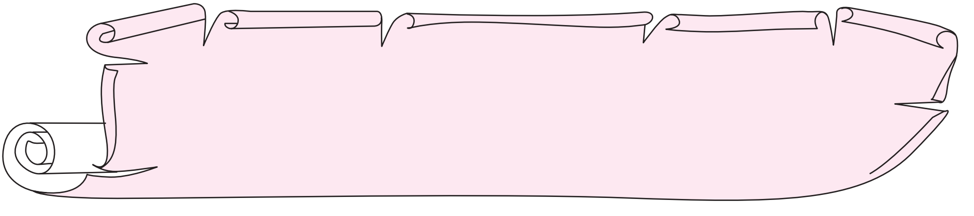
Формула

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Рассмотри рисунки и заполни пустые окошки. Сделай свои рисунки и закрась 10%, 25%, 33%, 100% квадрата.



(*Ну вот, читатель, первый разговор о процентах и их использовании, пожалуй закончен. И осталось тебе... правильно, осталось составить памятную грамотку об всем, что ты узнал о процентах.*)



ПСИХОЛОГИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

Когда человек, так же как Иван-царевич, сталкивается с какой-либо новой проблемой, он, как правило, испытывает замешательство. И это понятно: слишком мало нужной информации, слишком много времени и усилий приходится затрачивать на поиск решения.

Что же делать, если проблема трудна, но найти её решение необходимо? Давай обсудим два возможных пути.

Вот один из них. Человек знакомится с условиями задачи, выбирает среди известных ему способов решения наиболее, на его взгляд, подходящий и с его помощью пытается найти правильный ответ. Несколько безуспешных попыток — задача не решается. Тогда, если настойчивости мало, человек отказывается от решения задачи («не могу, мол, да и задача, судя по всему, неразрешима»). Ну, а если настойчивости много, то человек продолжает решать «до посинения», много раз подряд используя один и тот же (проверенный! надёжный!) способ.

Можно ли добиться успеха на этом пути? Если повезёт, правильный ответ, вероятно, будет получен. Однако поиск может оказаться длительным, утомительным и скучным. Кроме того, надо иметь в виду, что новую и сложную задачу привычными способами зачастую решить невозможно. Поэтому на таком пути неудачи, к сожалению, будут слишком частыми. Неудивительно, что при столкновении с очередной новой задачей может появиться чувство неуверенности в своих силах и даже чувство страха.

Конечно, первые шаги в любом новом деле, как правило, связаны с ошибками. Как известно, не ошибается только тот, кто ничего не делает.

Однако ошибок будет гораздо меньше, если, пытаясь справиться с проблемой, пойти по другому пути. Если задача оказалась чересчур трудной и первые попытки решения не принесли результата, нужно просто сказать себе: «Стоп!» — и постараться посмотреть на задачу под другим углом зрения. Именно так действует **исследователь**. Для этого надо не только иметь хорошие математические знания, но и освоить определённые психологические правила. С некоторыми из них ты можешь познакомиться в этой книге.

Правило первое:
старайся помнить об инерции собственного мышления

Что такое инерция мышления? Это склонность идти по проторенной дорожке, использовать привычные способы деятельности. В результате человек оказывается неспособным изменить сформировавшиеся навыки или сложившуюся точку зрения даже тогда, когда этого требуют изменившиеся обстоятельства. Короче, инерция мышления — это готовность действовать по привычке, без сознательных усилий. В той или иной мере инерция присуща мышлению каждого человека, хотя многие этого за собой даже не замечают.

Попробуй решить 10 арифметических задач, имеющих одинаковое условие и отличающихся друг от друга только числовыми данными, приведёнными в таблице.

Есть три пустых бочонка, каждый из которых имеет определённую ёмкость, и водопроводный кран. Как, переливая воду из одного бочонка в другой, отмерить ровно столько воды, сколько требуется?

№ задачи	Ёмкость, л			Нужно получить, л
	1-й бочонок	2-й бочонок	3-й бочонок	
1	37	21	3	10
2	37	24	2	9
3	39	22	2	13
4	38	25	4	5
5	29	14	2	11
6	28	14	2	10
7	41	13	7	14
8	26	10	3	10
9	28	7	5	12
10	29	9	8	1

Решим первую задачу. Чтобы получить 10 л, можно заполнить самый большой бочонок, затем отлить из него часть воды в бочонок ёмкостью 21 л (тогда в большом бочонке останется 16 л). Потом снова из большого бочонка отлить часть оставшейся воды в маленький бочонок ёмкостью 3 л и ещё раз отлить в пустой маленький бочонок — и тогда в большом бочонке останется ровно 10 л. Ответ запишем в таком виде: 37 – 21 – 3 – 3.

Психологический комментарий

Задачи нужно решать, не отвлекаясь, с первой до последней, причём обязательно в том порядке, в каком они указаны в таблице. Ответы записывай в тетради.

Теперь давай проанализируем те способы, которые ты использовал при решении каждой задачи.

Задачи 1–5 можно решить одним и тем же способом (например, задача 2: $37 - 24 - 2 - 2$; задача 3: $39 - 22 - 2$ и так далее).

Задачу 6 удобнее решить новым, более коротким способом $(14 - 2 - 2)$, хотя можно применить и старый способ.

Задача 7 легко решается очень простым способом $(7 + 7)$, хотя опять-таки можно применить более громоздкий старый способ.

Задача 8 вообще не требует никаких переливаний.

Задачи 9 и 10 можно решить только новым способом, так как старый способ для них не годится.

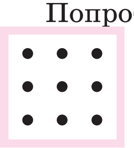
Теперь ты сам можешь оценить в баллах склонность собственного мышления к психологической инерции. В зависимости от того, каким способом ты решал задачи, ты получаешь следующие баллы:

Задача 1 — 0 баллов (из-за нашей подсказки);
Задачи 2, 3, 4, 5 — по 1 баллу за каждую задачу (если решение правильное);
Задача 6 — 3 балла (если решение $14-2-2$), 0 баллов (если использован старый способ);
Задача 7 — 3 балла (если решение $7 + 7$); 0 баллов (если использован старый способ);
Задача 8 — 2 балла (если ответ получен без вычислений); 0 баллов (если использован старый способ);
Задачи 9 и 10 — по 2 балла за каждую задачу (если найдено правильное решение).

Максимальный результат — 16 баллов.

Если ты набрал 13–16 баллов, то твоё мышление отличается высокой степенью гибкости, ты легко меняешь стереотипный способ решения на новый, более удобный. Если набралось меньше 8 баллов, то тебе следует потренироваться в развитии гибкости своего мышления.

Попробуй решить ещё одну задачу:



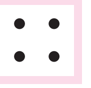
Соедините 9 точек четырьмя прямыми линиями, не отрывая карандаша от бумаги.

Не получилось? Ничего страшного. Даже многие взрослые не могут сразу найти правильное решение.

Если решить задачу с первой попытки не удалось, то все равно постарайся поискать правильный ответ в течение 5 минут.

Отвлекись-ка ненадолго и попробуй решить следующую, более простую задачу-подсказку:

Соедините четыре точки тремя прямыми линиями, не отрывая карандаша от бумаги.



Однако прежде чем приняться за решение этой задачи, пожалуйста, нарисуй треугольный журнальный столик, на поверхности которого лежит квадратная салфетка. Нарисовал? А теперь приступай к решению задачи с 4 точками. Получилось?

После этого вернись к задаче с девятью точками и снова попробуй её решить.

Так в чем же смысл задачи-подсказки? Если ты так и не догадался, в чем секрет, смотри правильное решение на с. 118. Не правда ли, оно кажется совсем простым, когда его видишь?

Давай задумаемся вот над чем: почему основная задача сначала кажется неразрешимой? Дело здесь именно в психологической инерции нашего мышления, которая в данном случае проявляется в том, что 9 заданных точек зрительно «навязывают» образ квадрата, вынуждая в процессе поиска решения мысленно проводить линии по его сторонам и диагоналям. Как только ты сможешь увидеть пространство за пределами этих точек и мысленно провести в этом пространстве линии, решение легко будет найдено.

Итак, Исследователя отличает гибкость мышления — способность при необходимости отказываться от сложившихся стереотипов и изменять способы своей деятельности в зависимости от требований ситуации.

Для тренировки гибкости мышления полезно выполнить такое задание: назвать как можно больше способов использования хорошо известных тебе предметов (табуретки, спичечной коробки, канцелярской скрепки).

Правило второе: научись задавать вопросы

Как мы с тобой убедились, инерция нашего мышления выражается в том, что, столкнувшись с новой ситуацией, мы сосредоточиваемся на очевидном, явном, привычном. Для того, чтобы разрушить стереотипы в восприятии и понимании проблемы, следует научиться задавать вопросы (прежде всего самому себе!).

Например, каждый из нас знает, что зимой идёт снег. Казалось бы, какие тут могут быть вопросы? А что, если спросить:

Почему снежинки различаются по своей форме? Зависит ли это от высоты, с которой снежинки падают на землю? Как будет различаться их форма в зависимости от высоты падения? Почему появляются такие различия?

Что делают Елена Прекрасная, Баба-Яга, конь, желая помочь Ивану-царевичу избежать ошибок? Они задают ему вопросы. И каждый вопрос, будто луч фонарика, «высвечивает» в проблеме те её стороны, на которые раньше Иван-царевич не обращал внимания.

Верно говорят, что правильно задать вопрос — значит наполовину решить задачу.

Давай рассмотрим следующую ситуацию.

Однажды отшельник сказал своему ученику: «*Ко мне сегодня утром пришли трое гостей. Произведение их возрастов* 2450. *Сумма их возрастов вдвое больше твоего возраста. Каков возраст каждого гостя?*» Через некоторое время ученик пришёл и сообщил отшельнику, что эту задачу он решить не может, потому что...

Ученик начал рассуждать примерно так: «Что в этой задаче мне точно известно? Во-первых, я знаю свой собственный возраст. Во-вторых, я знаю, что возраст человека обычно обозначается целым числом. В-третьих, я знаю правило разложения числа на множители:

$$2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7.$$

Каков же мог быть возраст гостей?

Возраст одного гостя — это либо один из делителей, либо произведение делителей числа 2450. Выпишу варианты возрастов троих гостей и найду суммы получившихся троек.

1-й	2	2	10	14	10
2-й	25	35	35	5	5
3-й	49	35	7	35	49
	76	72	52	54	64

Так вот же решение! — обрадовался ученик. — И как же все просто: мне — 32 года, следовательно, возраст гостей — 10, 5 и 49 лет. Стоп! Можно ли утверждать, что сочетание трёх возрастов, которое в сумме даёт 64, получится только один раз?

(*Заметь, читатель, этот вопрос ученик задал самому себе.*)

Надо проверить!

1-й	14	70	50	98	98
2-й	7	5	7	2	10
3-й	25	7	7	25	5
	56	82	64	125	113

У меня получилось два подходящих набора: 49 – 5 – 10 и 50 – 7 – 7. Какой из них будет ответом к задаче? Этого я сказать не могу — не хватает данных.»

И ученик задал отшельнику вопрос: «Как можно дополнить условие задачи?»

— Старший из моих гостей старше меня самого, — ответил отшельник.

Ученик было обрадовался, но тут же спохватился, что не знает возраста отшельника. Тогда он задал другой вопрос учителю:

— Достаточно ли этих сведений для выбора правильного ответа?

— Вполне, — ответил отшельник.

И вскоре ученик дал правильный ответ: возраст гостей 50, 7 и 7 лет!

Так сколько лет отшельнику и как ученик определил его возраст?

Итак, ученик, конечно, действовал как исследователь: с помощью вопросов он управлял процессом решения задачи (как бы «перетряхивал» её содержание), руководил своими собственными действиями, получал помощь в виде дополнительной информации от другого человека.

Заметим, что все вопросы, которые могут возникнуть в процессе решения любой задачи, можно разделить на следующие основные группы.

1. ***Вопросы, связанные с уяснением условий задачи.***

Что именно в задаче заставляет меня считать её сложной и почему? Что неизвестно? Достаточны ли заданные условия для ответа на вопрос задачи? Может быть, стоит изобразить условия задачи в виде рисунка-схемы? Есть ли в задаче некоторый «ключевой» элемент, с которого я мог бы начать свои рассуждения?

2. ***Вопросы, связанные со сбором дополнительных сведений.***

Что вспоминается в связи с данной задачей из того, что я уже знаю и что может иметь к ней какое-либо отношение (факты, определения и так далее)? Какие уточнения я хотел бы получить? Какие учебники, книги и справочники следует просмотреть для поиска нужных сведений? С кем из знающих людей нужно посоветоваться?

3. ***Вопросы, связанные с поиском способов решения.***

Встречал ли я раньше какую-либо подобную задачу? Какой способ (метод), из тех, что я уже знаю, можно применить к решению этой задачи? Если он не приводит к положительному результату, то почему? Можно ли как-то переформулировать условия задачи, чтобы её легче было решить?

4. ***Вопросы, связанные с проверкой полученного ответа.***

Нравится или не нравится мне найденное решение? Какие аргументы «за» и «против» этого решения можно привести? Можно ли тот же результат получить каким-либо другим способом? Если я не уверен в правильности результата, как мне его проверить? Будет ли полезным данный способ решения для задач другого типа? Какие новые проблемы обнаруживаются в связи с полученным ответом?

Итак, Исследователь, решая задачу, всегда задаёт себе вопросы, при этом процесс поиска решения превращается в увлекательный диалог с самим собой.

Правило третье: формулируй и обосновывай гипотезы

Задавая вопросы, мы создаём основу для выдвижения гипотезы. Гипотеза — это предположение (догадка) о возможности какого-либо события. Например, мы можем высказать гипотезу о возможной погоде на завтра, возможном поступке определённого человека в определённой ситуации и так далее.

Научная гипотеза — это предположение (догадка) о причинах какого-либо явления, которое мы хотели бы понять, но не можем этого сделать из-за отсутствия необходимых знаний.

Например, *известно, что в стволе вертикальной шахты через каждые* 30–40 *метров по мере углубления температура изменяется примерно на один градус*. Как она меняется? Почему она так меняется? Попробуй высказать предположение (гипотезу) относительно природы этого явления. Возможно, у тебя появилось несколько гипотез? Выбери гипотезу, которая представляется тебе верной. Попробуй на её основе предсказать (то есть снова высказать гипотезы), как может измениться климат Земли через 10 000 лет?

Гипотеза — это «предварительное», ещё не доказанное утверждение. Гипотезу подвергают проверке, чтобы подтвердить её (установить её истинность) или опровергнуть (установить ложность). Подтвердить или опровергнуть гипотезу можно с помощью фактов, результатов экспериментов или логических доводов.

Приведём примеры задач, решая которые, тебе придётся формулировать и проверять гипотезы.

Иногда для этого достаточно учесть условия задачи. Рассмотрим такую задачу:

Турист попал в местность, где было три селения: Правдино, Кривдино, Очередино. Все жители села Правдино всегда говорят правду. Все жители села Кривдино всегда говорят неправду. Все жители сели Очередино говорят правду и неправду строго по очереди (то есть из двух подряд утверждений одно обязательно правда, а другое — ложь).

Турист подошёл к развилке двух дорог, да не знает, куда свернуть. Он спросил проходящего мимо местного жителя:

— Какая дорога ведёт в село Правдино?

— Левая, — ответил местный житель.

— А вы сами из какого села? — спросил турист.

— Из Очередино.

Так по какой же дороге идти туристу — левой или правой?

Предложи гипотезы о том, из какого села был местный житель, и проверь соответствие каждой гипотезы условиям задачи.

Выдвигая гипотезу, часто опираются на специальные знания (в области химии, биологии, истории).

На Земле в современных условиях самым крупным животным на суше является слон (его вес — около 5 т), тогда как в океане живут настоящие гиганты (вес синего кита составляет до 130 т). Выскажи и обоснуй гипотезу, почему размер морских животных может быть гораздо больше, чем размер животных, живущих на суше.

Порой гипотеза может быть «сумасшедшей», особенно когда сталкиваешься с, казалось бы, невозможной ситуацией.

Некто разрезал пополам лист газетной бумаги и положил два листа друг на друга. Затем эти половинки снова разрезал пополам и снова сложил их в стопку и так далее — всего эта процедура была проделана 52 раза. Вопрос: какова высота получившейся стопки?

Предположим, что она будет равна расстоянию от Земли до Луны.

Не правда ли, безумная гипотеза? Газетный лист — и такое огромное расстояние! Выясни, ложным или истинным является это утверждение.

Правило четвёртое: используй эвристические приёмы

Слово «эврика» в переводе с греческого означает восклицание «Я нашёл!», приписываемое Архимеду. Он воскликнул: «Эврика!», когда сделал одно из своих научных открытий.

Эвристика — это приём мыслительной деятельности, который обеспечивает быстрое «наведение» на правильное решение и сокращение времени поиска ответа. Ивану-царевичу посылает Елена Прекрасная голубков с письмами, в каждом из которых — советы (по-нашему, эвристические приёмы-подсказки).

Известен целый ряд таких приёмов, которые называются эвристиками. Рассмотрим их более детально.

1. ***Специализация*** — переход от задачи в общем виде к какому-либо её частному случаю.

Это может быть приём рассмотрения «крайнего случая», в котором искомые закономерности могут проявиться наиболее заметно, явно.

Часто используется и приём «другой путь использования», когда основная задача первоначально решается применительно к какой-либо другой ситуации.

В одной из сказок Андерсена королю и королеве надо было узнать, настоящая ли принцесса пришла к ним в дом. Вместо детальной проверки «по всем статьям» королева переходит к «крайнему» случаю и успешно разрешает столь важный вопрос. Как она действовала?

Вспомни, какое свойство королева считала абсолютно обязательным для настоящей принцессы и как она попыталась проверить, что оказавшаяся у них в гостях девушка действительно является принцессой.

2. ***Аналогия*** — установление сходства между предметами по каким-либо свойствам, хотя в целом эти предметы или явления могут быть совершенно разными. Суть этой эвристики такова: если два предмета сходны в каком-либо одном соотношении, они, возможно, будут сходны и в других своих свойствах.

Попробуй поискать ответ на следующий вопрос.

В желудках птиц часто находят камешки: проглочены они птицами случайно или нет?

Поищи аналогию на собственной кухне.

3. ***Упрощение.*** Если задача сложная, попробуем её упростить (можно отбросить некоторые условия задачи; принять во внимание действие только одного фактора; поискать более простую формулировку условий).

Два приятеля — Саша и Петя — одновременно вышли из своих домов и пошли по дороге навстречу друг другу. Вместе с Петей из его дома выскочила собака и побежала в направлении к Сашиному дому. Добежав до Саши, собака повернула и побежала обратно к Пете. И так она бегала от одного мальчика к другому, пока те не встретились. Сколько километров пробежала собака, если её скорость 10 *км/час, расстояние между домами* 4,5 *км, Петя идёт со скоростью* 5 *км/час, а Саша — со скоростью* 4 *км/час?*

Что в условии задачи кажется наиболее сложным? Видимо, перебежки собаки туда-сюда. Попробуй отбросить это условие.

4. ***Гиперболизация*** — чрезмерное преувеличение тех или иных условий задачи. Весьма часто в случае затруднения используется приём «доведения до абсурда» (условия задачи, собственной ошибки).

Попробуй использовать приём гиперболизации при решении следующей задачи.

10 *котят и кошек получили на завтрак* 16 *сосисок. Каждый котёнок съел по* 1 *сосиске, а каждая кошка — по* 3 *сосиски. Сколько было котят и сколько было кошек?*

Представь, что все 10 животных — котята. Сколько сосисок они съедят? Почему остались лишние сосиски? Как их количество связано с количеством кошек?

5. ***Замена*** — замещение определённых условий задачи на другие условия, в том числе за счёт переформулировки условий. Найди оптимальное решение в следующей ситуации.

Архитектор хочет построить здание для фирмы, в котором могло бы полностью разместиться оборудование, архивы, служащие Поскольку в данном районе города по сейсмологическим требованиям разрешается строить только одноэтажные здания, то для строительства необходимо 5 *тыс. кв. м земельной площади. Однако на выделенном участке только* 1 *тыс. кв. м пригодна под застройку. Архитектор с сожалением откажется от своего проекта или будет искать выход?*

Выдели основное противоречие ситуации и попробуй изменить одно из условий строительства здания.

6. ***Комбинирование*** — рассмотрение отдельных аспектов задачи в разных соотношениях. Можно изменять расположение элементов задачи на схематическом рисунке, последовательность шагов решения, менять местами причину и следствие.

Примером использования такой эвристики может служить способ решения классической задачи о перевозке через реку волка, козы и капусты.

Человеку надо волка, козу и капусту переправить в лодке через реку, учитывая, что, во-первых, только двое могут одновременно поместиться в лодке и, во-вторых, только в присутствии человека никто никого не может съесть. Как благополучно (без потерь!) человек должен перевезти всё своё хозяйство?

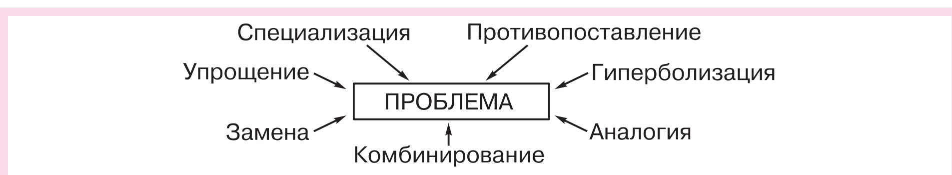
Постарайся подобрать цепочку таких сочетаний основных участников этой истории, чтобы в итоге с уверенностью можно было гарантировать благополучный исход перевозки.

7. ***Противопоставление*** — использование прямо противоположных аргументов, в том числе приёма «доказательства от противного». Например, используя этот приём, реши задачу:

В одной из школ 412 учащихся. Докажи, что по крайней мере у двух учащихся этой школы совпадают дни рождения.

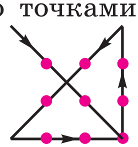
Попробуй предположить обратное — что все ученики этой школы родились в разные дни года. Согласуется ли это предположение с условием задачи? Какой вывод можно сделать?

Итак, с трудной задачей можно справиться, если использовать разные эвристические приёмы.



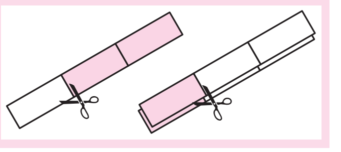
Как ты думаешь, какие из перечисленных эвристик есть в письмах Елены?

Ответ к задаче с девятью точками.



ПРАКТИКУМ

Обыкновенные дроби



1. Какой рисунок вы бы подписали: «$\frac{2}{3}$»; «2 : 3»? что в каждом случае означает число 2? число 3?

Какова длина $\frac{2}{3}$ полоски, если длина целой полоски равна: а) 12 см; б) 10 см?

2. Как вы думаете, почему в словаре слово «дробь» имеет следующие толкования:

- мелкие свинцовые шарики (употребляются для стрельбы из охотничьего ружья);
- разбитые, измельчённые части чего-нибудь;
- ряд частых, прерывистых звуков, трель (барабанная дробь)?

3. Число $\frac{7}{11}$ можно прочитать так: «семь одиннадцатых» или «дробь, в числителе которой число 7, а в знаменателе — 11».

1) Прочтите число: а) $\frac{11}{7}$; б) $\frac{11}{7}$; в) $\frac{13}{30}$; г) $\frac{1}{8}$; д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{191}{200}$; ж) $\frac{m}{n}$.

2) Запишите число с помощью цифр и букв: а) семь тридцать первых; б) три сотых; в) двадцать одна первая; г) дробь, в числителе которой тысяча, а в знаменателе — a плюс один; д) сто стотысячных.

4. 1) Известно, что в сутках 24 часа. Какую часть суток вы: а) спите; б) учитесь в школе; в) едите суп; г) смотрите телевизор; д) читаете книги; е) играете в футбол (или в куклы); ж) смотрите в окно; з) говорите по телефону? и) проводите за компьютером? Что у всех полученных вами дробей одинаково?

2) Известно, что окружность составляет 360°. Сколько градусов составляет: а) половина окружности; б) четверть окружности; в) треть окружности?

5. Какую часть всех уроков (за неделю) составляют в вашем расписании: а) уроки математики; б) уроки физкультуры? Какая из получившихся дробей имеет больший числитель?

6. Какую часть учеников вашего класса составляют: а) девочки; б) мальчики; в) девочки с голубыми глазами; г) Иваны; д) Елены; е) мальчики с зелёными глазами; ж) те, кто родились летом; осенью; зимой; под созвездием Тельца?

I **7.** Решите задачу и представьте ответ в виде обыкновенной дроби.

1) 2 м ткани разделили на 3 равные части. Сколько метров ткани получилось в каждой части?

2) 5 яблок разделили поровну между 5 детьми. Сколько яблок досталось каждому?

3) 3 одинаковые шоколадки разделили поровну между 5 детьми. Сколько шоколадок досталось каждому?

Придумайте задачу с ответом: а) $\frac{1}{4}$ кг; б) $\frac{4}{7}$ м; в) $\frac{5}{3}$ ч.

II **8.** Хотите приготовить картофельный суп со сметаной? Предлагаем такой рецепт:

$1\frac{1}{4}$ л воды, 500 г картофеля, 2 яйца, $\frac{1}{5}$ кг сметаны, 2 столовые ложки муки, 2 столовые ложки нарубленной зелени петрушки или укропа, тмин, соль.

Очищенный картофель сварить и добавить тмин. Сметану хорошо перемешать с 2 столовыми ложками муки и добавить в картофельный бульон. Супу дать ещё раз закипеть и добавить мелко нарубленные крутые яйца, петрушку, укроп или какую-нибудь другую зелень. Рассчитано на 3 порции.

Как будет выглядеть рецепт того же супа, если в доме оказалось 1 яйцо; 3 яйца?

Запишите рецепт вашего любимого блюда, используя обыкновенные дроби.

I **9.** Какая часть суток прошла, если сейчас: а) 8 ч утра; б) 8 ч вечера; в) полдень; г) 14 ч 40 мин; д) посмотреть на часы?

I **10.** 1) 2 кг риса разделили на 3 равные порции. Сколько риса оказалось в каждой порции?

2) Из 5 м ткани сделали 6 одинаковых салфеток. Какова длина одной салфетки?

I **11.** 1) Запишите дробью результат деления чисел:

а) 5 : 7; б) 32 : 40; в) 5 : 3; г) 100 : 2; д) 2 : 100; е) 15 : 5; ж) 4 : 1.

2) В результате деления каких чисел может получиться дробь: а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{11}{10}$; г) $\frac{12}{3}$; д) $\frac{2}{1}$?

II **12.** 1) Какой знак нужно поставить между натуральными числами 2 и 3, чтобы получить: а) натуральное число; б) отрицательное число; в) обыкновенную дробь; г) десятичную дробь?

2) Верно ли, что какой бы знак арифметической операции ни поставить между числами 6 и 3, в результате получится натуральное число?

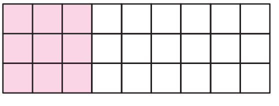
3) Какими должны быть числа a и b, чтобы число $a : b$ было: а) отрицательным; б) дробным; в) целым?

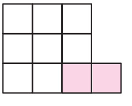
I **13.** Нарисуйте или составьте фигуры из 18 одинаковых треугольников. Раскрасьте фигуры так, чтобы число красных треугольников составляло $\frac{1}{2}$ часть от 18, синих — $\frac{1}{3}$, зелёных — $\frac{1}{6}$. Какую часть составят нераскрашенные треугольники?

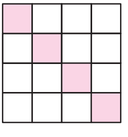
II **14.** Пусть у вас есть семь одинаковых по форме фигур. Вы можете раскрашивать их в любые цвета.

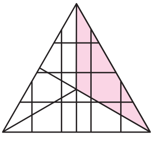
Можно ли, используя все эти фигуры, составить новую фигуру так, чтобы она служила иллюстрацией дроби $\frac{2}{3}$? Если да, то как? Если нет, то сколькими фигурами можно проиллюстрировать дробь $\frac{2}{3}$? Какое наименьшее число фигур потребуется для этого?

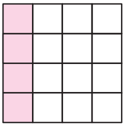
I **15.** 1) Определите, какая часть фигуры закрашена.

а) 

б) 

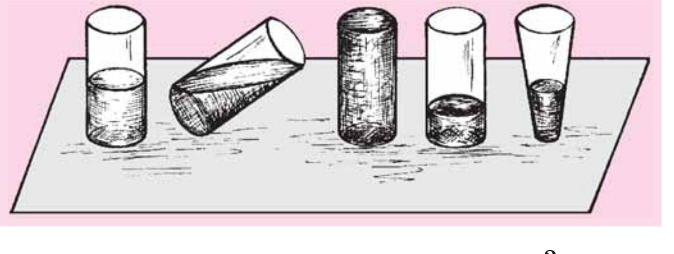
в) 

г) 

д) 

2) Составьте фигуру так, чтобы с её помощью можно было проиллюстрировать дроби: а) $\frac{4}{10}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{5}{2}$.

II **16.** Укажите примерное количество воды в каждом сосуде.



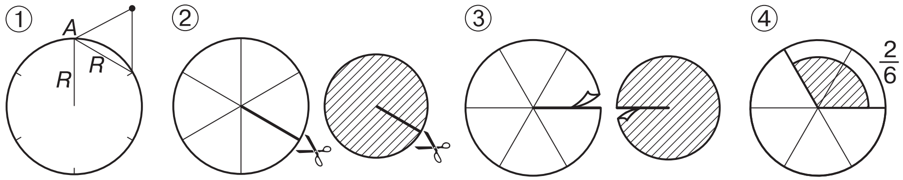
Для каких сосудов нельзя дать точного ответа?

I **17.** Лабораторная работа.

Цель: изготовить наглядное пособие для иллюстрации дробей.

Оборудование: 4 листа бумаги разного цвета, циркуль, ножницы, линейка.

1) Изготовьте наглядное пособие.



- Вырежьте из плотной бумаги круг радиуса 6 см и отметьте на его границе в любом месте точку A.
- Зафиксируйте раствор циркуля, равный радиусу, и от точки A последовательно отметьте с помощью циркуля на окружности ещё 5 точек.
- Соедините каждую из отмеченных точек с центром окружности и по одному из радиусов сделайте разрез.
- Из другого листа бумаги приготовьте круг меньшего радиуса и тоже сделайте разрез.
- По разрезам вставьте один круг в другой.
- Вращайте круг меньшего радиуса до тех пор, пока не «увидите» дробь $\frac{2}{6}$.

2) Используя изготовленную вами модель, проиллюстрируйте дробь $\frac{1}{6}$. Какие ещё дроби можно показать на вашей модели?

3) Изготовьте модели для иллюстрации дробей $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{9}{12}$ (желательно, чтобы все круги были разных радиусов).

II **18.** 1) Познакомьтесь:

правильный шестиугольник

правильный треугольник

2) Из правильных треугольников составьте правильный шестиугольник. Выделите у шестиугольника: а) $\frac{1}{6}$ часть; б) $\frac{2}{6}$ части; в) $\frac{3}{6}$ части; г) $\frac{4}{6}$ части; д) $\frac{5}{6}$ частей; е) $\frac{6}{6}$ частей. Попробуйте показать $\frac{7}{6}$ частей; $\frac{1}{12}$ часть шестиугольника.

II **19.** Нарисуйте такой циферблат часов (в виде круга), на котором отмечены все 24 часа.

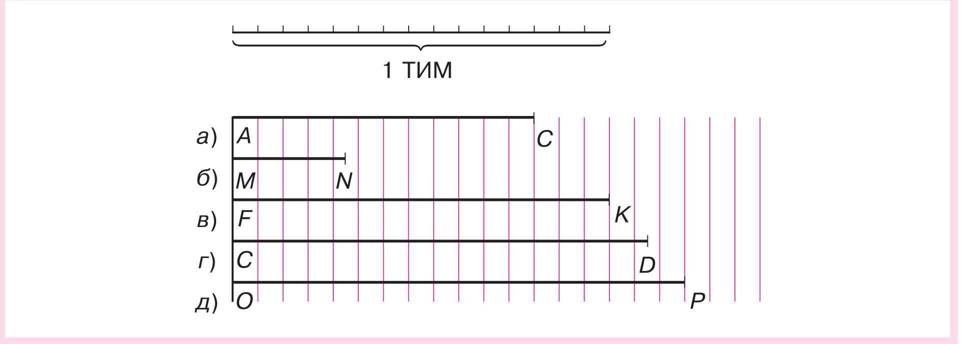
1) Какую часть круга проходит минутная стрелка за: а) минуту; б) секунду?

2) Какую часть круга проходит часовая стрелка за: а) 1 ч; б) 6 ч; в) 20 мин?

3) За какое время пройдёт $\frac{1}{2}$ круга; $\frac{3}{4}$ круга; $\frac{1}{1}$ круга; $\frac{3}{2}$ круга: а) минутная стрелка; б) часовая стрелка?

I **20.** Измерьте свою талию и запишите её длину в аршинах.[1)]

II **21.** Запишите результаты измерения длин отрезков в дробях, если задана мерка:



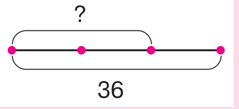
II **22.** 1) Начертите фигуру, площадь которой равна: а) $\frac{37}{100}$ дм^2; б) $\frac{7}{5}$ дм^2; в) $\frac{4}{5}$ дм^2.

2) Начертите отрезки длиной: а) $\frac{3}{10}$ дм; б) $\frac{7}{10}$ дм; в) $\frac{13}{10}$ дм; г) $\frac{3}{4}$ дм; д) $\frac{2}{5}$ дм; е) $\frac{7}{8}$ дм; ж) $\frac{7}{20}$ дм.

I **23.** 1) Найдите часть от числа: а) $\frac{1}{3}$ от 36 м; б) $\frac{2}{3}$ от 36 р.; в) $\frac{5}{3}$ от 36 кг; г) $2\frac{1}{4}$ от 36 мин. д) $\frac{3}{1}$ от 36 р.; е) $\frac{2}{9}$ от 36.

[1)] 1 аршин $\approx$71 см.

Пример. Найдите $\frac{2}{3}$ от 36 р.

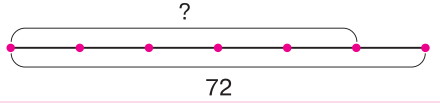


$36 : 3 = 12$ (р.) — составляет $\frac{1}{3}$ от 36 р.;

$12 \cdot 2 = 24$ (р.) — составляет $\frac{2}{3}$ от 36 р.

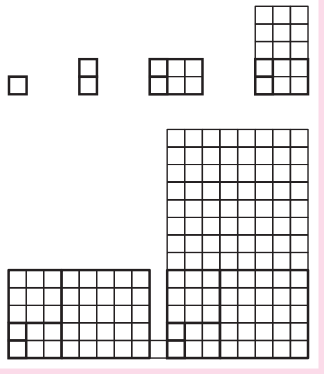
2) Какую часть от числа 72 нашли, если для этого выполнены такие записи: а) $(72 : 6) \cdot 5$; б) $72 : 6$; в) $(72 : 3) \cdot 5$? Чему равна эта часть?

3) Какую часть от числа искали, если выполнена следующая краткая запись:



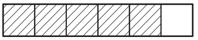
4) Составьте аналогичные задания.

II **24.** 1) Примите за единицу площадь первого (наименьшего) квадрата. Выясните: а) какую часть составляет площадь каждой предыдущей фигуры от площади последующей; б) какую часть составляет площадь каждой последующей фигуры от площади предыдущей? Запишите результаты в виде обыкновенных дробей.



2) Пусть площадь первого квадрата равна 1 см^2. Найдите площадь каждой фигуры в квадратных дециметрах.

I **25.** Заполните таблицу.

	$\frac{5}{6}$	пять шестых
		осьмушка
	$\frac{7}{12}$	
	$\frac{2}{1}$	
		числитель и знаменатель дроби равны
	$\frac{0}{11}$	

II **26.** Устройте в классе конкурс на лучшую рекламу дроби $\frac{8}{12}$.

Равенство дробей

27. Завещал отец сыновьям наследство:

$\frac{43}{129}$ всего состояния отец оставил старшему сыну,

$\frac{27}{81}$ всего состояния — среднему сыну,

$\frac{11}{33}$ — младшему сыну.

Поровну ли поделено наследство? Для ответа можете воспользоваться записями, которые оставил отец сыновьям.

1) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{3}$: $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, так как $2 = 2$ и $3 = 3$.

2) $\frac{16}{24}$ и $\frac{24}{36}$: $\frac{16}{24} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{8}}} = \frac{2}{3}$; $\frac{24}{36} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{12}}}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{12}}} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, значит $\frac{16}{24} = \frac{24}{36}$.

3) $\frac{16}{24}$ и $\frac{24}{36}$: НОК$(24; 36) = 72$; $\frac{16 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{48}{72}$; $\frac{24 \cdot 2}{36 \cdot 2} = \frac{48}{72}$; $\frac{48}{72} = \frac{48}{72}$, значит $\frac{16}{24} = \frac{24}{36}$.

28. Выясните, равны ли такие дроби:

а) $\frac{12}{78}$ и $\frac{2}{13}$; б) $\frac{9}{8}$ и $\frac{81}{84}$; в) $\frac{7}{15}$ и $\frac{36}{71}$;

г) $\frac{20}{96}$ и $\frac{15}{73}$; д) $\frac{3}{18}$ и $\frac{4}{24}$; е) $\frac{23}{36}$ и $\frac{77}{126}$.

29. Лабораторная работа.

Цель: с помощью модели проиллюстрировать равенство (или неравенство) дробей.

Оборудование: цветная бумага, циркуль, карандаш, линейка, ножницы, модель для иллюстрации дробей со знаменателями 3, 6, 12.

1) Сделайте модель для иллюстрации дробей со знаменателями 2, 4, 8 (круги делать желательно разного цвета и разного радиуса).
2) С помощью модели покажите, что: а) $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$; б) $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$.
3) Верны ли равенства: а) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$; б) $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; в) $\frac{4}{6} = \frac{5}{8}$; г) $\frac{3}{8} = \frac{1}{2}$?

30. Разбейте дроби на группы так, чтобы в каждой группе были только равные дроби:

$\frac{15}{35}$, $\frac{30}{70}$, $\frac{92}{100}$, $\frac{15}{50}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{88}{16}$, $\frac{56}{68}$, $\frac{63}{210}$, $\frac{42}{51}$,

$\frac{36}{84}$, $\frac{126}{153}$, $\frac{121}{11}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{14}{17}$, $\frac{48}{102}$, $\frac{33}{11}$, $\frac{70}{85}$, $\frac{23}{25}$.

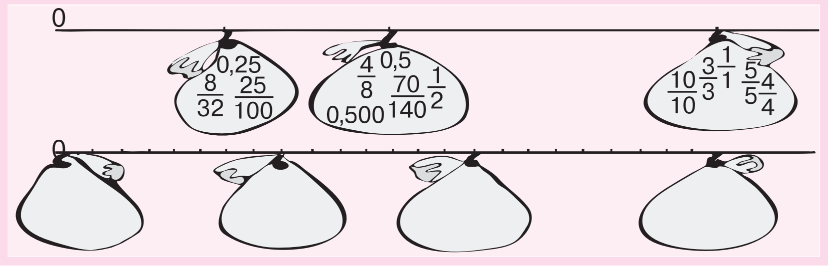
Добавьте в каждую группу ещё по две дроби, найдите в каждой группе несократимую дробь.

31. 1) Отметьте на числовом луче дроби:

$$\frac{1}{2};\ 0{,}5;\ \frac{6}{12};\ \frac{2}{3};\ \frac{10}{15};\ 1{,}5;\ \frac{21}{14};\ \frac{8}{12};\ \frac{6}{9}.$$

2) Сколько точек получилось на луче? Почему их меньше, чем данных дробей? Приведите примеры других дробей, соответствующих отмеченным на луче точкам.

32. 1) Рассмотрите рисунок, сделайте соответствующие метки на числовом луче.



2) Положите в каждый из мешков несколько дробей.

33. Некто сократил дробь $\frac{24}{56}$ так: $\frac{24}{56} = \frac{12}{28} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

Сможете ли вы предложить другие способы для сокращения дроби $\frac{24}{56}$?

34. 1) Сократите дроби и дробные выражения:

а) $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 7}$; $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 2}$; $\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 9}$; $\frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 10}$; $\frac{8 \cdot 12 \cdot 15}{9 \cdot 20}$;

б) $\frac{16}{20}$; $\frac{32}{128}$; $\frac{120}{150}$; $\frac{42}{98}$; $\frac{45}{75}$; $\frac{34}{85}$;

в) $\frac{750}{1125}$; $\frac{1000}{3175}$; $\frac{675}{975}$; $\frac{1188}{1485}$; $\frac{720}{600}$; $\frac{660}{420}$; $\frac{430}{26}$; $\frac{192}{256}$; $\frac{160}{224}$; $\frac{168}{540}$.

Примеры.

• Сократите дробь $\frac{192}{256}$:

$$\begin{array}{r|l} 192 & 2 \\ 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

НОД(192; 256) = 64; $\quad \frac{192}{256} = \frac{3 \cdot 64}{4 \cdot 64} = \frac{3}{4}$.

• Сократите дробь $\frac{24}{36}$:

$$\frac{24}{36} = \frac{24:2}{36:2} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}.$$

2) Используя признаки делимости, назовите сократимые дроби: а) $\frac{117}{711}$; б) $\frac{1324}{2632}$; в) $\frac{77}{714}$; г) $\frac{1315}{3135}$; д) $\frac{5433}{10321}$.

3) Используя таблицу простых чисел, назовите несократимые дроби: а) $\frac{37}{43}$; б) $\frac{13}{23}$; в) $\frac{307}{619}$; г) $\frac{151}{303}$.

4) Приведите примеры сократимых и несократимых дробей, числитель и знаменатель которых трёхзначное число.

35. *Задача-шутка.* Некто, пытаясь сократить дробь $\frac{16}{64}$, записал так: $\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$.

Верный ли ответ он получил? Действительно ли он провёл сокращение дробей? Попробуйте подобрать подобные примеры.

II **36.** Замените знак $*$ числами так, чтобы получились верные равенства.

1) а) $\frac{3}{4} = \frac{*}{8}$; б) $\frac{4}{8} = \frac{*}{2}$; в) $\frac{5}{6} = \frac{*}{24}$; г) $\frac{24}{42} = \frac{*}{7}$;
д) $\frac{21}{36} = \frac{7}{*}$; е) $\frac{3}{5} = \frac{15}{*}$; ж) $\frac{5}{9} = \frac{*}{*}$; з) $\frac{16}{3} = \frac{*}{7}$.

Во всех ли случаях удалось выполнить задание?

2) а) $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot *} = \frac{4}{*}$; б) $\frac{15}{24} = \frac{15:*}{24:3} = \frac{*}{*}$;
в) $\frac{36}{60} = \frac{36:*}{60:*} = \frac{6}{*}$; г) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot *}{3 \cdot *} = \frac{12}{*}$.

Можно ли продолжить цепочку равенств в каждом случае?

3) а) $\frac{5}{*} = \frac{5}{*}$; б) $\frac{0}{*} = \frac{0}{*}$; в) $\frac{*}{13} = \frac{*}{13}$;
г) $\frac{4}{*} = \frac{*}{4}$; д) $\frac{3}{*} = \frac{8}{*}$; е) $\frac{3}{*} = \frac{*}{8}$.

Во всех ли случаях задача имеет решение? В каких случаях задача имеет единственное решение?

II **37.** 1) Приведите дроби к одному и тому же знаменателю и подумайте, какая из дробей больше:

а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{20}$; б) $\frac{2}{5}$ и $\frac{8}{20}$; в) $\frac{2}{7}$ и $\frac{1}{20}$;
г) $\frac{1}{20}$ и $\frac{7}{35}$; д) $\frac{7}{15}$ и $\frac{6}{6}$; е) $\frac{5}{36}$ и $\frac{4}{27}$;
ж) $\frac{4}{27}$ и $\frac{4}{1}$; з) $\frac{7}{35}$ и $\frac{42}{210}$; и) $\frac{7}{36}$ и $\frac{5}{24}$.

2) В каких случаях общим знаменателем может быть один из данных знаменателей? Как в таком случае найти дополнительный множитель?

В каких случаях общим знаменателем будет новый знаменатель? Как найти этот новый знаменатель?

3) В каких случаях общим знаменателем двух дробей может быть: а) произведение их знаменателей; б) наименьшее общее кратное их знаменателей?

В каких случаях произведение знаменателей будет наименьшим общим знаменателем?

Составьте примеры на различные случаи приведения дробей к общему знаменателю.

I **38.** Запишите десятичные дроби в виде несократимых обыкновенных дробей: а) 0,7; б) 0,15; в) 0,25; г) 0,0003; д) 0,36; е) 0,75.

I **39.** Запишите обыкновенные дроби в виде десятичных:
а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{19}{100}$; в) $\frac{1543}{1000}$; г) $\frac{3}{4}$; д) $\frac{8}{5}$; е) $\frac{4}{3}$; ж) $\frac{11}{25}$; з) $\frac{2}{7}$; и) $\frac{9}{45}$.
В каких случаях получилась конечная десятичная дробь, а в каких — бесконечная периодическая дробь?

Сравните свои выводы со следующим: «Обыкновенная несократимая дробь переводится в конечную десятичную дробь тогда и только тогда, когда разложение её знаменателя на простые множители не содержит множителей, отличных от 2 и 5».

II **40.** Переведите дроби в десятичные: а) $\frac{27}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2}$; б) $\frac{77}{22 \cdot 35}$; в) $\frac{63}{7 \cdot 45}$. Объясните, почему эти обыкновенные дроби переводятся в конечные десятичные дроби, хотя их знаменатели содержат и простые множители, отличные от 2 и 5.

II **41.** Какие из чисел переводятся в конечные десятичные дроби:
а) $\frac{7}{2^2 \cdot 5}$; б) $\frac{7}{2^4 \cdot 5^3}$; в) $\frac{7}{2^2 \cdot 11}$; г) $\frac{7}{2 \cdot 5^2}$; д) $\frac{7}{2 \cdot 3 \cdot 5}$; е) $\frac{7}{32}$?

Задачу помогут решить следующие рассуждения.

Рассмотрим, например, число $\frac{11}{2 \cdot 5^2}$. Знаменатель этой дроби в качестве простых множителей содержит числа 2 и 5. Поэтому число $\frac{11}{2 \cdot 5^2}$ можно перевести в конечную десятичную дробь.

Разделим числитель на знаменатель, получим 0,22. Можно осуществить перевод иначе, получив в знаменателе 100:

$$\frac{11}{2 \cdot 5^2} = \frac{11 \cdot 2}{2 \cdot 5^2 \cdot 2} = \frac{22}{100} = 0{,}22.$$

Обратите внимание, что число вида $100\ldots0$ имеет в своём разложении на простые множители только числа 2 и 5:

$$1\underbrace{0}_{1\text{ нуль}}=2\cdot5=2^1\cdot5^1;$$

$$1\underbrace{00}_{2\text{ нуля}}=4\cdot25=2^2\cdot5^2;$$

$$1\underbrace{000}_{3\text{ нуля}}=8\cdot125=2^3\cdot5^3;$$

Это позволяет быстро находить дополнительные множители при втором способе перевода. Например:

$$\frac{13}{2^7\cdot5^5}=\frac{13\cdot5\cdot5}{\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{7\text{ раз}}\cdot\underbrace{\underbrace{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}_{5\text{ раз}}\cdot\underbrace{5\cdot5}_{2\text{ раза}}}_{7\text{ раз}}}=\frac{325}{1\underbrace{0000000}_{7\text{ нулей}}}=0{,}0000325.$$

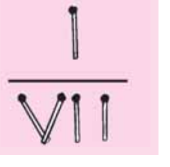
II **42.** 1) Из чисел

$$\frac{7}{8},\quad \frac{12}{10},\quad \frac{9}{50},\quad \frac{35}{250},\quad \frac{6}{35},\quad \frac{195}{45},\quad \frac{104}{65},\quad \frac{219}{65},\quad \frac{63}{504},\quad \frac{16}{30},\quad \frac{48}{12}$$

выберите те, которые можно перевести в конечные десятичные дроби, и осуществите этот перевод.

2) Можно ли представить в виде десятичных дробей оставшиеся числа?

II **43.** Из спичек выложено число $\frac{1}{7}$. Как, переложив одну спичку, получить число, равное $\frac{1}{3}$?



I **44.** 1) Напишите положительную дробь со знаменателем 4, меньшую единицы. Сколько всего таких дробей можно записать?

2) Напишите дробь со знаменателем 4, большую единицы. Сколько таких дробей можно записать?

3) Напишите дробь со знаменателем 4, равную единице. Сколько таких дробей можно записать?

4) Какие из полученных выше дробей являются неправильными? Как вы думаете, почему их так называют?

II **45.** Попробуйте изготовить модель для иллюстрации неправильных дробей.

I **46.** 1) Представьте сумму в виде смешанного числа:

а) $5+\frac{3}{7}$; б) $1+\frac{9}{17}$; в) $4+\frac{4}{9}$; г) $2+\frac{15}{19}$; д) $0+\frac{5}{8}$; е) $3+\frac{71}{81}$.

2) Представьте число в виде суммы целой и дробной частей:

а) $3\frac{5}{6}$; б) $7\frac{1}{2}$; в) $10\frac{3}{5}$; г) $2\frac{7}{10}$; д) $2\frac{5}{10}$; е) $2\frac{8}{9}$.

I **47.** 1) Выделите целую часть из неправильной дроби:

а) $\frac{11}{5}$; б) $\frac{3838}{38}$; в) $\frac{107}{15}$; г) $\frac{34}{1}$; д) $\frac{203}{25}$; е) $\frac{8}{8}$.

Пример. $\frac{203}{25} = 8\frac{3}{25}$, так как $208 = 8 \cdot 25$ (ост. 3).

2) Запишите число в виде неправильной дроби:

а) 2; б) $7\frac{1}{2}$; в) $11\frac{2}{5}$; г) $20\frac{7}{8}$; д) 5; е) $1\frac{2}{10}$.

I **48.** Сформулируйте правило:

а) превращения неправильной дроби в смешанное число;
б) превращения смешанного числа в неправильную дробь.

I **49.** 1) Числитель дроби $\frac{2}{6}$ а) умножили на 2; б) умножили на 3; в) разделили на 2; г) разделили на 4. Как изменилась величина дроби в каждом случае? Попытайтесь как-либо проиллюстрировать свои действия.

2) Знаменатель дроби $\frac{2}{6}$ а) умножили на 2; б) разделили на 2; в) разделили на 3; г) уменьшили на 3. Как изменилась величина дроби в каждом случае? Попытайтесь как-либо проиллюстрировать свои действия.

3) И числитель, и знаменатель дроби $\frac{2}{6}$ а) умножили на 2; б) разделили на 2. Как изменилась величина дроби в каждом случае? Попытайтесь как-либо проиллюстрировать свои действия.

II **50.** Придумайте такую дробь, чтобы сумма её числителя и знаменателя была равна 72, а сама дробь равнялась бы $\frac{5}{7}$.

I **51.** Верны ли равенства:

а) $\frac{72}{180} = \frac{2}{5}$; б) $\frac{14}{17} = \frac{588}{714}$; в) $\frac{868}{217} = \frac{4}{1}$;
г) $\frac{15}{108} = \frac{20}{144}$; д) $\frac{12}{144} = \frac{13}{1691}$; е) $\frac{148}{132} = \frac{24}{26}$?

II **52.** Дана дробь $\frac{11}{41}$. Какое число нужно: а) прибавить к числителю и знаменателю, чтобы получилась дробь, равная $\frac{3}{8}$; б) вычесть из числителя и знаменателя, чтобы получилась дробь, равная $\frac{1}{4}$?

II **53.** Равны ли дроби $\frac{23}{99}$, $\frac{2323}{9999}$ и $\frac{232323}{999999}$?

54. Даны дроби $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{13}{15}$. Каждую нужно расположить на числовом луче и к каждой «мешок» подвесить. Подумайте, как, используя лист бумаги в клетку, выбрать единичный отрезок таким, чтобы «мешки» с данными дробями разместились удобно.

Добавьте в каждый из «мешков» ещё по две дроби. Удобно ли будет показывать на этом отрезке дробь $\frac{6}{11}$? А дробь $\frac{13}{26}$? $\frac{7}{30}$?

55. Выразите дробь в указанных долях единицы:

а) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{12}$ — в двенадцатых долях;

б) $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{39}{100}$ — в двухсотсороковых долях.

Всегда ли эта задача имеет решение?

56. Составьте все правильные дроби вида $\frac{a}{b}$, если $b = 6$.

57. Найдите значения выражений:

а) $\dfrac{1{,}75 \cdot 0{,}28 + 18{,}3 : 61 + 14{,}21}{2{,}75 - (2{,}75 - 4{,}5 : 0{,}5)}$;　б) $\dfrac{18{,}15 - (0{,}75 - 14{,}3 - 15{,}7) : 5}{16{,}5 : 55 + 12{,}5 \cdot 4 - 30{,}3}$;

в) $\dfrac{9{,}5 - 0{,}9 : (5 - 4{,}4)}{(4 - 3{,}64) : 0{,}9 + 23{,}6}$;　г) $\dfrac{(6{,}05 - 1{,}15 : 0{,}5) \cdot 2{,}4}{0{,}25 \cdot 20 + 10 : 100 + 0{,}9}$;

д) $\dfrac{1{,}25 : 0{,}2 + 3{,}75 \cdot 5}{130 \cdot 0{,}2 - 7{,}5 : (-0{,}4) + 6{,}25 : 25}$;

е) $\dfrac{142{,}7 \cdot 8{,}5 - 4{,}27 \cdot 85}{34 \cdot 1{,}94 + 3{,}4 \cdot 10{,}6}$;　ж) $\dfrac{-58{,}6 \cdot 0{,}3 + 1{,}86 \cdot 3}{9{,}62 \cdot 0{,}15 \cdot 8 - 7{,}62 \cdot 1{,}2}$.

58. Напишите рассказ (пьесу, сказку), в котором участвуют различные обыкновенные дроби.

Проверьте себя 1

Вариант 1

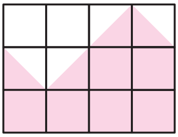
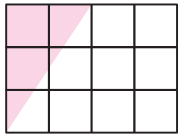
1. Заполните таблицу.

Несократимая обыкновенная дробь	$\frac{9}{16}$		
Сократимая обыкновенная дробь		$\frac{315}{216}$	
Десятичная дробь			0,075

2. Есть ли среди данных дробей неправильные дроби? Если есть, запишите их в виде смешанного числа.
3. Выпишите из таблицы два различных числа и приведите их к одному знаменателю.

Вариант 2

1. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 24?
2. Сократите дробь $\frac{454\,545}{545\,454}$.
3. Какая часть прямоугольника закрашена?

а) 
б) 

Вариант 3

Сделайте антирекламу дроби $\frac{8}{12}$.

Сравнение рациональных чисел

59. Выберите на каждом лепестке из двух дробей бо́льшую и прочитайте полученное слово.

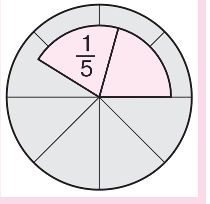
Используйте, если потребуется, подсказки, которые находятся на обороте каждого лепестка.

Существует ли универсальный метод сравнения обыкновенных дробей? Если да, то сформулируйте его.

60. Выберите из сказки про Ивана-царевича и Елену Прекрасную (гл. 6) все воронихины дроби и расположите их в порядке возрастания, используя какой-либо один способ сравнения.

61. 1) Покажите на модели, что $\frac{1}{4}$ меньше $\frac{3}{4}$, а $\frac{11}{12}$ больше $\frac{7}{12}$.

2) Сравнение каких дробей иллюстрирует рисунок?



3) Сравните с помощью модели дроби:

а) $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{12}$; в) $\frac{3}{8}$ и $\frac{2}{6}$;

г) $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{4}$; д) $\frac{4}{8}$ и $\frac{2}{3}$; е) $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{12}$.

62. Выясните, какая из дробей ближе к единице, и поставьте между ними знак «>» или «<»: а) $\frac{7}{8}$ или $\frac{5}{6}$; б) $\frac{7}{5}$ или $\frac{7}{9}$; в) $\frac{11}{10}$ или $\frac{12}{11}$.

Придумайте сами дроби, которые легко сравнивать, используя для этого дополнение дроби до единицы.

63. Запишите с помощью знаков «=», «>», «<» выражения: а) 3 составляет от 6 половину; б) 4 составляет от 5 больше половины; в) 2 составляет от 7 меньше половины. Составьте сами аналогичные примеры.

64. Известно, что точка, соответствующая большей дроби, на координатной прямой располагается правее точки, соответствующей меньшей дроби

Выясните, какая из двух дробей будет изображена на координатной прямой правее:

а) $\frac{76}{105}$ или $\frac{5}{7}$; б) $\frac{13}{11}$ или $\frac{10}{9}$; в) $2\frac{5}{9}$ или $2\frac{7}{15}$;

г) $\frac{161}{144}$ или $\frac{147}{132}$; д) $-\frac{5}{24}$ или $-\frac{12}{63}$; е) 2,23 или $2\frac{13}{50}$.

65. Рассмотрите неравенства: $\frac{*}{17} < \frac{4}{51}$; $\frac{*}{65} < \frac{8}{13}$; $\frac{*}{5} < \frac{3}{15}$.

1) Замените $*$ числами так, чтобы неравенства стали верными.
2) Замените $*$ числом 5 и выясните, какие из неравенств верны.
3) Замените $*$ числом (−5) и выясните, какие из неравенств верны.

66. Расположите числа в порядке возрастания:

1	$-2\frac{3}{4}$	1,7	$-\frac{63}{4}$	2,1	−15
ь	д	л	м	у	о

Какое слово при этом получилось? Какой математический смысл оно имеет? Используя это слово, сформулируйте правила сравнения: а) отрицательных дробей; б) положительных дробей.

II **67.** 1) Увеличьте дробь $\frac{16}{21}$ в 3 раза. Как это можно сделать?

2) Уменьшите дробь $\frac{18}{25}$ в 3 раза. Как это можно сделать?

3) Какая из дробей больше и во сколько раз:

а) $\frac{8}{9}$ и $\frac{8}{27}$; б) $\frac{8}{9}$ и $\frac{2}{9}$; в) $\frac{3}{7}$ и $\frac{3}{98}$; г) $\frac{45}{7}$ и $\frac{405}{7}$?

I **68.** Ответьте на вопросы:

1) Всякое ли положительное дробное число больше всякого отрицательного?
2) Всякое ли отрицательное дробное число меньше нуля?
3) Всякое ли дробное число больше нуля?
4) Всякое ли дробное число меньше единицы?
5) Всякое ли целое число больше дробного?
6) Существует ли наибольшее дробное число? Наименьшее?
7) Всякая ли неправильная дробь меньше правильной дроби?
8) Всякое ли смешанное число больше обыкновенной дроби?

I **69.** Сравните следующие пары чисел, превратив предварительно числа в десятичные дроби:

а) $\frac{3}{9}$ и $\frac{7}{20}$; б) $\frac{6}{7}$ и 0,84; в) $-2{,}255$ и $-2\frac{2}{7}$;

г) $\frac{43}{21}$ и $\frac{401}{142}$; д) 0,6(3) и $\frac{45}{70}$; е) $-\frac{13}{6}$ и $-\frac{22}{10}$.

I **70.** Сравните следующие пары чисел, выделив целую часть, если это необходимо:

а) $\frac{13}{7}$ и $\frac{12}{6}$; б) $\frac{31}{3}$ и $\frac{81}{88}$; в) $-\frac{27}{2}$ и $-\frac{37}{3}$;

г) $\frac{15}{4}$ и $\frac{12}{13}$; д) $\frac{41}{8}$ и $\frac{129}{24}$; е) $-\frac{10}{3}$ и $\frac{117}{37}$.

II **71.** Замените знак $*$ числами или знаками в правильной дроби так, чтобы получились верные неравенства:

а) $\frac{12}{13} < \frac{37}{*}$; б) $\frac{*}{107} > \frac{*}{33}$.

II **72.** Сравните:

а) $\frac{22}{27}$ и $\frac{31}{36}$; б) $\frac{22}{35}$ и $\frac{110}{177}$; в) $\frac{22}{67}$ и $\frac{51}{152}$; г) $\frac{37}{67}$ и $\frac{277}{677}$; д) $\frac{37}{67}$ и $\frac{3737}{6767}$.

Посмотрите на рисунок. Какие пары дробей вы бы записали на обратной стороне каждого лепестка?

(I) **73.** Запишите числа порядке возрастания:

$$-\frac{8}{7};\quad -\frac{5}{2};\quad -\frac{1}{7};\quad -\frac{13}{14};\quad -\frac{18}{7};\quad -\frac{23}{2};$$
$$\frac{1}{3};\quad \frac{2}{5};\quad \frac{7}{5};\quad \frac{8}{15};\quad \frac{144}{15};\quad \frac{233}{30}.$$

(II) **74.** Придумайте несколько пар дробей, с помощью которых можно было бы показать разные способы сравнения.

Проверьте себя 2

Вариант 1

1. Расположите числа в порядке убывания и прочитайте зашифрованное слово:

$-\frac{3}{4}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{23}{11}$	$-0{,}6$	$-\frac{24}{92}$	$\frac{97}{42}$	$\frac{13}{72}$
а	р	о	о	х	и	в	н

2. Вместо знака $*$ поставьте такое целое число, чтобы дробь $\frac{*}{192}$ оказалась равной: а) натуральному числу; б) целому отрицательному числу; в) нулю; г) числу, большему нуля, но меньшему единицы; д) числу, меньшему единицы, но большему $\frac{1}{2}$; е) числу $\frac{1}{3}$; ж) числу, меньшему нуля, но большему (-1); з) числу $2\frac{3}{8}$.

Вариант 2

1. Обоснуйте следующий факт: $\frac{9193}{9194} > \frac{62}{63}$.

   Заполните пропуски: $0 < * < \frac{62}{63} < * < \frac{9193}{9194} < * < 1$.

2. Поставьте вместо знака $*$ такие числа, чтобы неравенства были верными:

   1) $*4{,}48 < *4\frac{*}{16}$; 2) $\frac{1}{17} > \frac{17}{*} > 0$; 3) $-\frac{2}{7} < \frac{*}{9} < -\frac{1}{8}$.

Вариант 3

Сочините историю под названием «Сравнение в жизни дроби $\frac{8}{12}$».

Виды рациональных чисел

75. Множество натуральных чисел обозначается буквой $\mathbb{N}$, множество целых чисел — буквой $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел — буквой $\mathbb{Q}$.

Заполните таблицу.

	101	2	3,4	-1	0	-10931	25	-13	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{14}{3}$	$-\frac{17}{11}$	$-\frac{2534}{1000}$
$\mathbb{N}$	*												
$\mathbb{Z}$	*												
$\mathbb{Q}$	*												

76. 1) Укажите натуральные числа a, при которых будут верными неравенства:

а) $\frac{3}{5} < \frac{a}{5} < \frac{8}{5}$; б) $\frac{4}{9} < \frac{4}{a} < \frac{4}{3}$; в) $\frac{3}{5} < \frac{4}{a} < \frac{5}{3}$;

г) $\frac{4}{7} < \frac{a}{3} < \frac{7}{8}$; д) $\frac{9}{11} < \frac{a}{2} < \frac{8}{9}$; е) $\frac{4}{7} < \frac{5}{a} < \frac{3}{4}$.

Во всех ли случаях удалось найти натуральное число a?

2) Укажите целые числа b, такие, при которых будут верны неравенства:

а) $-\frac{3}{5} < \frac{b}{5} < -\frac{1}{5}$; б) $-\frac{3}{5} < \frac{b}{3} < \frac{1}{2}$; в) $\frac{4}{9} < \frac{3}{b} < 1$;

г) $-1\frac{3}{5} < \frac{b}{4} < \frac{1}{4}$; д) $-3 < \frac{b}{2} < -2\frac{1}{3}$.

Во всех ли случаях удалось найти целое число b?

II **77.** Укажите, если это возможно, по меньшей мере 5 дробных чисел x, для которых $y < x < z$. Значения y и z возьмите в таблице.

y	$0{,}2$	$\frac{1}{100}$	$-1{,}5$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$3{,}5$
z	$-0{,}22$	$\frac{1}{10}$	$-1{,}4$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$3\frac{16}{25}$

I **78.** Запишите частное целых чисел: а) $10 : 2$; б) $10 : 30$; в) $-10 : 2$; г) $-10 : 40$; д) $10 : (-60)$; е) $-10 : (-14)$; ж) $23 : 36$; з) $0 : (-1)$. Каким числом может быть частное двух целых чисел: натуральным; целым отрицательным; дробным?

I **79.** Выберите те числовые выражения, значения которых меньше нуля: а) $\frac{-12}{10}$; б) $\frac{-3}{-4}$; в) $-\frac{-5}{15}$; г) $\frac{7}{-15}$; д) $-\frac{4}{19}$; е) $-\left(-\frac{-3}{8}\right)$; ж) $-\frac{0}{4}$; з) $\frac{-33}{11}$.

II **80.** 1) Подберите вместо знака $*$ такое рациональное число, чтобы неравенства были верными:

а) $\frac{5}{12} < * < \frac{7}{12}$; б) $\frac{-6}{12} < * < \frac{-5}{12}$.

Удалось ли вам в каждом случае найти такое число? Проверьте, можно ли вместо знака $*$ поставить дроби $\frac{11}{24}$; $-\frac{16}{36}$? Подберите ещё несколько дробей вместо знака $*$.

Придумайте способ подбора дробей, расположенных между двумя данными дробями.

2) Поставьте вместо знака $*$ такое натуральное число, чтобы неравенства были верными:

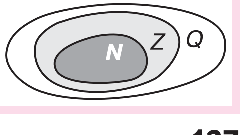
$$\frac{5}{12} < \frac{*}{7} < \frac{6}{12}.$$

Можно ли между дробями $\frac{5}{12}$ и $\frac{6}{12}$ найти дробь со знаменателем: 2; 3; 4; 5; 6; 9; 15; 18?

Можно ли между дробями $\frac{1}{18}$ и $\frac{1}{12}$ найти дробь со знаменателем 9; 10; 30?

3) Можно ли для ответа на вопросы использовать мерную выставку? (Описание мерной выставки найдите на с. 10).

Найдите на рисунке место для следующих чисел:



$-\frac{2}{5}$; -11; 0; $53{,}00$; $1{,}173$; $\frac{12}{3}$; $-351{,}7$; $1\frac{2}{9}$.

Умножение рациональных чисел

81. 1) Сгруппируйте следующие арифметические выражения по виду множителей:

а) $6{,}2 \cdot (-4)$; б) $3{,}75 \cdot 1\frac{3}{5}$; в) $3 \cdot \frac{5}{2}$;

г) $\frac{9}{11} \cdot \frac{33}{12}$; д) $28 \cdot \left(-1\frac{1}{7}\right)$; е) $20\frac{1}{4} \cdot 20\frac{5}{9}$;

ж) $-11 \cdot (-12)$; з) $\frac{3}{2} \cdot 1{,}5$; и) $16{,}15 \cdot 0{,}08$;

к) $\frac{8}{11} \cdot 2\frac{1}{2}$; л) $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3}$; м) $5\frac{1}{2} \cdot \left(-8\frac{1}{11}\right)$;

н) $-3{,}84 \cdot (-1)$; о) $\frac{4}{9} \cdot \frac{27}{2}$; п) $-35 \cdot \frac{5}{21}$;

р) $\frac{31}{72} \cdot 1$; с) $-33 \cdot 1\frac{1}{11}$; т) $2{,}5 \cdot 2\frac{22}{15}$;

у) $0{,}156 \cdot 1{,}7$; ф) $2{,}5 \cdot \frac{2}{7}$; х) $0 \cdot 2\frac{3}{5}$;

ц) $0{,}3 \cdot \frac{5}{6}$; ч) $15{,}2 \cdot 0{,}003$; ш) $0 \cdot 14$;

щ) $2{,}4 \cdot 1\frac{2}{3}$; э) $76 \cdot \frac{12}{19}$; ю) $7\frac{3}{11} \cdot 2\frac{19}{40}$.

Можете ли вы подобрать специальный алгоритм нахождения произведения для каждой из выбранных вами групп?

2) Любую ли пару данных рациональных чисел можно умножить по алгоритму:

- приведите каждое число к виду $\frac{a}{b}$; где a — целое число, а b — натуральное;
- перемножьте получившиеся дроби;
- упростите произведение?

3) Вычислите все данные произведения.

82. 1) Запишите и вычислите:

а) произведение трёх целых двух пятых и пяти восьмых;
б) произведение семи целых четырёх десятых и пяти тридцати седьмых;
в) произведение минус трёх целых двух седьмых и двух целых четырёх пятых.

2) Прочтите и вычислите: а) $1\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{26}$; б) $6{,}3 \cdot \frac{5}{9}$; в) $3{,}20 \cdot 4$.

83. 1) Найдите значения выражений $6x$; $\frac{4x}{9}$; $2\frac{2}{3}x$, если x принимает значения:

$$\frac{1}{2};\quad -\frac{1}{3};\quad 0{,}25;\quad 2;\quad -3;\quad \frac{9}{2};\quad -15\frac{3}{4}.$$

2) Какие из следующих действий вам пришлось выполнить при вычислении произведений: а) сокращение дробного выражения; б) приведение дробей к наименьшему общему знаменателю; в) сравнение чисел; г) сравнение модулей чисел; д) определение знака произведения; е) почёсывание затылка; ж) представление десятичной дроби в виде обыкновенной; з) выделение целой части числа; и) представление числа в виде неправильной дроби; к) доказательство равенства дробей; л) нахождение произведения обыкновенных дробей?

84. Найдите результат умножения:

а) $\frac{1}{5} \cdot 4$; б) $3\frac{1}{10} \cdot 5$; в) $0,9 \cdot 2$; г) $5\frac{3}{4} \cdot (-3)$;
д) $\frac{9}{10} \cdot 2$; е) $\frac{2}{5} \cdot 4$; ж) $-\frac{3}{14} \cdot 12$; з) $\frac{11}{12} \cdot (-10)$.

Сформулируйте правило умножения рационального числа на целое число.

85. Подберите значения a, чтобы произведение $\frac{3}{4}a$ равнялось: а) дробному числу; б) целому числу; в) числу, меньшему единицы; г) числу, большему единицы; д) нулю; е) трём четвёртым; ж) единице. Единственное ли решение имеется в каждом случае?

86. Расположите результаты умножения в порядке убывания и прочтите спрятанное слово:

$\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{5}$	$\frac{1}{18} \cdot 45$	$18 \cdot 1\frac{1}{9}$	$8,5 \cdot \frac{2}{7}$	$0,75 \cdot 3,5$	$2,1 \cdot 1\frac{7}{18}$
н	к	ы	о	а	з

87. Используя законы умножения рациональных чисел, найдите произведение:

а) $\frac{7}{5} \cdot 1,25 \cdot 9$; б) $\frac{8}{21} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{21}{8}$; в) $0,6 \cdot \frac{4}{7} \cdot 1\frac{2}{3}$;
г) $2 \cdot \frac{13}{14} \cdot 0,5$; д) $\frac{8}{9} \cdot \frac{7}{15} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$; е) $\frac{12}{25} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{5}{4}$;
ж) $31,25 \cdot \frac{4}{31} \cdot 0$; з) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 1,6 \cdot 0,5$; и) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-1,5) \cdot \frac{6}{5}$;
к) $\frac{7}{15} \cdot \frac{13}{17} \cdot \frac{34}{39}$; л) $\left(-4\frac{1}{12}\right) \cdot \left(-8\frac{6}{7}\right) \cdot (-6)$; м) $6\frac{1}{4} \cdot \left(-1\frac{2}{5}\right) \cdot (-8)$.

88. Решите уравнения:

а) $\frac{3}{5}x = \frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{5}y = -\frac{3}{5}$; в) $-0,6a = -\frac{3}{5}$;
г) $-\frac{231}{179}x = 1\frac{52}{179}$; д) $\frac{10}{83}x = 1$; е) $5y = 1$;

ж) $5\frac{3}{20}x = 1$; з) $-12{,}2a = 1$; и) $6\frac{3}{121}x = 0$;

к) $-121\frac{17}{37}y = 0$; л) $\frac{43}{65} \cdot (7x) = 0$.

Что общего в уравнениях каждого столбика? Допишите в каждый столбик по два уравнения.

II **89.** а) Найдите произведение дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{5}$, затем найдите произведение дробей, обратных к данным. Проанализируйте результаты.

б) Придумайте сами два аналогичных примера.

в) Подметьте и сформулируйте общее свойство. Докажите его, используя дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

II **90.** 1) Замените знак $*$ дробями так, чтобы равенства или неравенства стали верными:

а) $\frac{5}{7} \cdot * = 1$; б) $\frac{3}{2} \cdot * < 1$; в) $\frac{5}{3} \cdot * = 0$;

г) $12\frac{1}{5} \cdot * = \frac{7}{8}$; д) $\frac{7}{8} \cdot * < \frac{7}{8}$; е) $* \cdot \frac{3}{4} > \frac{3}{4}$.

2) Верно ли, что произведение двух правильных дробей может быть: а) больше 1; б) меньше 1; в) равно 1?

3) Сформулируйте аналогичные вопросы относительно неправильных дробей и ответьте на них.

I **91.** Сравните значения произведений:

а) $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7}$; б) $\frac{5}{6} \cdot \left(-3\frac{1}{4}\right)$ и $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}$; в) $3\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6}$ и $1\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$;

г) $\frac{5}{6} \cdot 1$ и $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5}$; д) $\frac{5}{6} \cdot 144\frac{3}{17}$ и $\frac{5}{6} \cdot 149\frac{1}{3}$.

II **92.** 1) Из какой обыкновенной дроби при переводе её в десятичную получилась такая дробь: а) 0,(1); б) 0,(3); в) 0,(7); г) 5,(6); д) 1,(4); е) 3,(8)?

Подсказка.

Достаточно знать, что

$$0{,}(1) = \frac{1}{9}; \quad \frac{1}{3} = 0{,}(3); \quad \frac{1}{6} = 0{,}1(6).$$

Тогда, к примеру, дробь 7,(5) можно записать так:

$$7{,}(5) = 7 + 0{,}(5);$$

$$0{,}(5) = 0{,}5555\ldots \cdot 5 = 0{,}1111\ldots = 5 \cdot 0{,}(1) = 5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Значит,

$$7{,}(5) = 7 \cdot \frac{5}{9} = 7\frac{5}{9} = \frac{68}{9}.$$

2) Запишите каждое следующее произведение в виде обыкновенной дроби:

а) $\frac{1}{3} \cdot 0{,}(3)$; б) $0{,}(1) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$; в) $0{,}1(6) \cdot 0{,}(6)$; г) $2{,}(5) \cdot 5(6)$.

(I) **93.** Представьте числа $\frac{7}{9}$; $1\frac{3}{8}$; $-\frac{17}{24}$; $\frac{8}{12}$ в виде произведения а) двух дробей; б) трёх дробей.

(II) **94.** 1) Пусть $\frac{a}{b} \neq 0$, $\frac{c}{d} \neq 0$. Верно ли, что $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \neq 0$?

2) Пусть $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \neq 0$. Верно ли, что:

а) $\frac{a}{b} \neq 0$ и $\frac{c}{d} \neq 0$; б) $\frac{a}{b} \neq 0$ или $\frac{c}{d} \neq 0$?

(II) **95.** Пусть $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > 0$. Как изменится знак произведения, если:

а) $\frac{a}{b}$ заменить противоположным числом?

б) $\frac{c}{d}$ заменить противоположным числом?

в) $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ заменить противоположными числами?

(I) **96.** Известно, что $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < 0$. Какими могут быть знаки множителей?

(I) **97.** Сгруппируйте выражения:

1) $-\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{12}{25}\right)$; 2) $-2\frac{2}{15} \cdot (-6{,}25)$; 3) $-\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{17}$;

4) $5 \cdot 2\frac{1}{5}$; 5) $\frac{4}{15} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$; 6) $-2{,}8 \cdot \left(-1\frac{1}{7}\right)$;

7) $-4\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$; 8) $-3\frac{1}{5} \cdot 1{,}2$; 9) $3\frac{3}{5} \cdot 1\frac{9}{16}$;

10) $-3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{9}{16}$; 11) $\frac{10}{34} \cdot \frac{17}{25}$; 12) $1{,}8 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$

по знакам множителей; по знакам результатов. Найдите значения этих выражений. Верно ли, что:

а) произведение двух положительных дробей — всегда положительное число;
б) произведение двух дробей может быть целым числом;
в) произведение двух положительных дробей всегда больше одного из множителей;
г) произведение двух положительных дробей может быть меньше одного из множителей?

II **98.** При каком значении x будет верным равенство:

а) $\frac{3}{5} \cdot \frac{x}{4} = \frac{21}{20}$; б) $\frac{9}{8} \cdot \frac{x}{4} = -\frac{9}{8}$; в) $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{x} = \frac{1}{3}$;

г) $\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{2} = -1\frac{1}{8}$; д) $\frac{4}{7} \cdot \frac{x}{3} = -4$; е) $\frac{x}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0$;

ж) $\frac{9}{x} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$; з) $\frac{6}{7} \cdot \frac{x}{3} = 12$; и) $\frac{5}{7} \cdot \frac{x}{9} = \frac{25}{63}$;

к) $\frac{7}{5} \cdot \frac{4}{x} = \frac{28}{20}$; л) $\frac{18}{15} \cdot \frac{4}{x} = \frac{24}{100}$; м) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{10} = 1$?

I **99.** 1) Вычислите произведения, записанные в первой строке.

	$\frac{6}{25} \cdot \frac{5}{12}$	$1\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7} \cdot 10{,}5$	$10{,}8 \cdot 6{,}(6) \cdot \frac{1}{24}$
I	$\frac{30}{300}$	$\frac{11}{3}$	1	$\frac{6}{1}$	3
II	$\frac{0}{10}$	$2\frac{5}{3}$	$2\frac{1}{5}$	$10\frac{2}{7}$	$\frac{54}{18}$
III	$\frac{3}{30}$	$2\frac{2}{15}$	$2\frac{2}{10}$	6	$\frac{27}{9}$
IV	$\frac{1}{10}$	$3\frac{2}{3}$	$\frac{10}{10}$	$10\frac{4}{14}$	$\frac{3}{1}$

2) Выберите правильный результат умножения в соответствующем столбце. Обсудите результаты.

I **100.** Заполните пропуски в таблице.

$\times$	$\frac{6}{25}$		-3
$\frac{5}{12}$		2	
		0,(3)	
	$\frac{36}{25}$		

I **101.** 1) Длина прямоугольного поля равна $1\frac{1}{8}$ км, а ширина — $\frac{4}{5}$ км. Вычислите площадь поля.

2) Найдите длину и ширину этого поля в метрах. Сколько квадратных метров составляет площадь этого поля?

3) Найдите площадь квадрата со стороной a, если а) $a = 3$; б) $a = 1\frac{1}{2}$; в) $a = \frac{3}{7}$; г) $a = \frac{2}{5}$.

102. Вставьте вместо пропусков рациональные числа и решите задачи.

1) Одна сторона прямоугольника ... , а вторая в 1,5 раза больше. Найдите площадь прямоугольника.
2) Купили $3\frac{7}{10}$ кг печенья по ... р. Сколько стоит покупка?
3) Сколько вёрст проскакал Иван за $2\frac{1}{3}$ ч, если скорость его жеребца ... ?
4) Сколько кубических метров воды налито в бассейн, вмещающий ... м^3, если бассейн заполнен на $\frac{3}{4}$.

103. Одна четверть работы выполнена за $2\frac{1}{3}$ ч. Какая часть работы будет выполнена за 7 ч? Какая часть всей работы будет выполнена за $9\frac{1}{3}$ ч?

104. Борода у Петра растёт, удлиняясь в неделю на $\frac{1}{5}$ дюйма.[1)] Предположим, что так она будет расти на протяжении всей его жизни.

Какой длины достигнет борода, если Пётр не будет бриться в течение 30 лет?

105. Простейшие из дробей, $\frac{1}{2}$ (полтина) и $\frac{1}{3}$ (треть), были известны на Руси с незапамятных времён. С их помощью образовывались другие дроби:

$\frac{1}{4}$ — четь, или четверть,

$\frac{1}{8}$ — полчети, или полчетверти,

$\frac{1}{16}$ — пол-полчети,

$\frac{1}{32}$ — пол-пол-полчети, или малая четь,

....

$\frac{1}{24}$ — пол-пол-полтрети, или малая треть.

Запишите в современных обозначениях следующие дроби:

пол-пол-пол-пол-пол-полчети;
пол-пол-пол-малой чети;
пол-пол-пол-пол-пол-полтрети;
пол-пол-пол-малой трети.

[1)] 1 дюйм = $\frac{1}{12}$ фута = 2,54 см.

106. Вернитесь к выполненным заданиям раздела «Умножение рациональных чисел». Какие задания показались вам: а) очень лёгкими; б) очень трудными; в) интересными; г) полезными; д) лишними? Каких заданий, на ваш взгляд, не хватает? Придумайте свои задания.

Проверьте себя 3

Вариант 1

1. Выполните действия: 1) $\frac{63}{73} \cdot 12\frac{1}{6}$; 2) $2{,}205 \cdot \frac{20}{63}$; 3) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$.
2. Найдите $29\frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot c$, если $a = \frac{3}{25}$; $b = 6\frac{1}{4}$; $c = \frac{16}{25}$.
3. Сравните $16\frac{11}{12} \cdot \frac{3}{35}$ и $10\frac{5}{11} \cdot \frac{11}{80}$.

Вариант 2

Найдите условия, при которых:

а) произведение двух несократимых дробей равно целому числу;
б) произведение двух рациональных чисел равно целому числу.

Вариант 3

Составьте сценарий, в котором каждая сцена показывает один из случаев умножения рациональных чисел.

Деление рациональных чисел

107. Существует ли такое рациональное число, при умножении которого на 3 получится 5?

Решите уравнение: а) $3x = 5$; б) $\frac{3}{2}x = 1$; в) $3x = 1$; г) $2\frac{1}{3}x = \frac{5}{7}$; д) $\frac{3}{4}x = -2{,}5$.

108. Решите задачи.

1) Разделите: а) 3 м ленты на 4 равные части; б) $3\frac{1}{2}$ м ткани на 6 равных частей.
2) Вычислите ширину прямоугольника: а) площадью 600 м^2 и длиной 35 м; б) площадью $2\frac{2}{5}$ м^2 и длиной 0,15 м.

109. Заполните пропуски: а) 16 м : 3 = ... м = ... см = ... мм; б) 2 ц : 6 = ... кг = ... г; в) 32тыс. р. : 7 = ... р. = ... к.

110. 1) Выполните деление и сделайте проверку:

а) $76:12$; б) $\frac{112}{77}:\frac{28}{33}$; в) $\frac{0}{36}:\frac{48}{31}$; г) $1\frac{2}{3}:2\frac{2}{9}$;

д) $15:\frac{6}{7}$; е) $1:\frac{4}{9}$; ж) $38\frac{19}{80}:231\frac{4}{5}$; з) $4:2\frac{3}{5}:1\frac{1}{15}$.

2) Соедините стрелками выражения, значения которых равны:

а) $\frac{11}{15}:\frac{4}{5}$; б) $\frac{4}{5}:\frac{11}{15}$; в) $\frac{6}{5}:\frac{15}{11}$; г) $\frac{15}{11}\cdot\frac{4}{5}$; д) $\frac{11}{5}\cdot 1\frac{1}{5}$; е) $\frac{11}{15}\cdot\frac{5}{4}$.

3) Составьте алгоритм деления положительных рациональных чисел. Сравните его со следующими алгоритмами

а) Чтобы разделить рациональное число $\frac{a}{b}$ на рациональное число $\frac{c}{d}$, нужно:

- записать число, обратное делителю;
- составить произведение $\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$;
- вычислить произведение $\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

б) Чтобы разделить одно рациональное число на другое рациональное число, нужно делимое умножить на число, обратное делителю.

111. Проверьте, правильно ли выполнено деление:

а) $5\frac{5}{8} : 2\frac{13}{16} = \frac{45}{8} : \frac{45}{16} = \frac{45}{8} \cdot \frac{16}{45} = \frac{2}{1} = 2$;

б) $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{7}{8} : \frac{8}{3} = \frac{7\cdot 8}{8\cdot 3} = \frac{7}{12}$;

г) $6\frac{5}{8} : 2\frac{3}{4} = 6 : 2 + \frac{5}{8} : \frac{3}{4} = 3 + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = 3\frac{5}{6}$;

д) $4 : 2\frac{2}{3} = 4 \cdot 2\frac{3}{2} = \frac{4}{1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{4\cdot 7}{1\cdot 2} = 14$.

Какие ошибки допущены при выполнении деления?

112. Заполните пропуски:

а) $\bigcirc : \square = \frac{6}{55}$; б) $\bigcirc : \square = \frac{1}{3}$; в) $\bigcirc : \square = 1$;

г) $\bigcirc : \square = \frac{5}{15}$; д) $\bigcirc : \square = 2\frac{1}{4}$; е) $\bigcirc : \square = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}$.

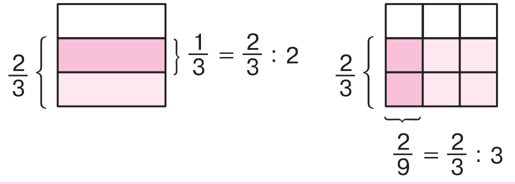
Единственным ли образом можно заполнить пропуски?

113. 1) Найдите частное:

а) $\frac{2}{3} : 2$; б) $1\frac{4}{5} : 4$; в) $171\frac{1}{4} : 1$;

г) $\frac{2}{3} : 3$; д) $-17\frac{1}{2} : 7$; е) $1\frac{3}{7} : (-2)$.

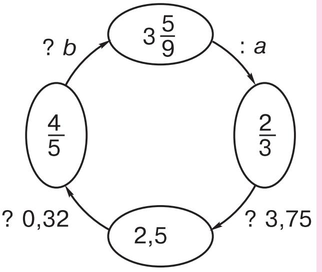
2) Сформулируйте правило деления рационального числа на целое число.



114. Вместо знака $*$ вставьте знак действия так, чтобы равенства были верными:

а) $\frac{2}{3} * \frac{7}{8} = \frac{7}{12}$; б) $3\frac{1}{5} * 1\frac{1}{4} = 4$; в) $\frac{9}{32} * \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$; г) $3 * \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}$.

115. На рисунке буквы a и b замените числами, а знаки вопроса — знаками действий.



116. Найдите значение n:

а) $\frac{2}{3} : \frac{n}{5} = \frac{10}{21}$; б) $\frac{5}{4} : \frac{3}{n} = \frac{25}{12}$;

в) $\frac{n}{10} : \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$; г) $\frac{4}{n} : \frac{5}{21} = \frac{12}{15}$.

117. Решите уравнение и сделайте проверку:

а) $-\frac{3}{8}x = -12$; б) $\frac{4}{5}x = -16$; в) $\frac{5}{14}x = 13\frac{1}{3}$;

г) $-\frac{13}{17}x = 5\frac{5}{51}$; д) $\frac{6}{7}x = 0$; е) $\frac{4}{5} : x = \frac{2}{5}$;

ж) $x : \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{7}$; з) $x : 5 = -\frac{2}{11}$; и) $-\frac{3}{4} : x = -\frac{1}{16}$;

к) $\frac{6}{11} : x = -\frac{2}{55}$; л) $\frac{x}{2} : \left(-\frac{7}{5}\right) = 1\frac{1}{14}$; м) $x : x = 1$;

н) $0 : x = 0$.

118. 1) Подберите вместо букв несколько таких рациональных чисел, чтобы полученные числовые неравенства были верными:

а) $\frac{8}{9} : a < \frac{8}{9}$; б) $\frac{8}{9} : a > \frac{8}{9}$; в) $-\frac{8}{9} : a < 0$;

г) $\frac{1}{2} : x > \frac{1}{2}$; д) $7 : t < 7$; е) $\frac{7}{5} : x > \frac{7}{5}$;

ж) $\frac{3}{2} : z > 2$; з) $\frac{3}{4} : x < \frac{3}{4}$; и) $x : \frac{7}{5} < x$;

к) $x \cdot \frac{11}{3} > 0$; л) $\frac{11}{3} : x > 0$; м) $\frac{11}{3} : x < 0$.

2) Продолжите предложение так, чтобы получилось высказывание, верное для положительных рациональных чисел: а) частное меньше (больше) делимого, если делитель... ; б) частное равно делимому, если... .

II **119.** 1) Выполните действия и сравните результаты:

а) $\frac{5}{8}:\frac{3}{2}$ и $\frac{3}{2}:\frac{5}{8}$; б) $\left(3\frac{3}{4}:\frac{5}{8}\right):\frac{1}{2}$ и $3\frac{3}{4}:\left(\frac{5}{8}:\frac{1}{2}\right)$;

в) $1\frac{4}{7}\cdot\left(1\frac{1}{2}:\frac{4}{5}\right)$ и $\left(1\frac{4}{7}\cdot1\frac{1}{2}\right):\frac{4}{5}$; г) $1\frac{4}{7}:\left(1\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\right)$ и $\left(1\frac{4}{7}:1\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}$.

2) Найдите значения выражений:

а) $6\frac{11}{12}:\frac{15}{36}:9\frac{3}{5}:27\frac{2}{3}$; б) $8\frac{1}{3}:5:\frac{5}{6}$.

С помощью скобок получите такие новые выражения, значения которых отличались бы от данных. Сколькими способами это можно сделать?

I **120.** Верно ли выполнено деление:

а) $2\frac{3}{5}:1\frac{11}{15}:4:\frac{3}{8}=\frac{13}{5}:\frac{26}{15}:\frac{4}{1}:\frac{3}{8}=\frac{13}{5}\cdot\frac{15}{26}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}=\frac{13\cdot15\cdot1\cdot8}{5\cdot26\cdot4\cdot3}=1$;

б) $5\frac{1}{4}:\left(1\frac{1}{2}:\frac{7}{11}\right)=\frac{21}{4}:\frac{3\cdot11}{2\cdot7}=\frac{21\cdot2\cdot7}{4\cdot3\cdot11}=\frac{49}{22}=2\frac{5}{22}$?

I **121.** Выполните действия:

а) $\frac{32}{39}:\left(-\frac{4}{3}\right):\frac{3}{4}$ — л;

б) $8:\frac{32}{39}:\left(-\frac{1}{4}\right)$ — м;

в) $-\frac{5}{7}:\left(-1\frac{1}{14}\right):\frac{7}{5}$ — д;

г) $\dfrac{-8:2\frac{2}{5}}{5\frac{1}{4}:(-7)}:\dfrac{2\frac{1}{7}:\left(-\frac{5}{7}\right)}{-4:\frac{8}{9}}$ — ц;

д) $-72:\left(\left(-2\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{13}{45}\right)\right)$ — о;

е) $\dfrac{20:4}{3\frac{3}{4}:\frac{1}{2}}$ — е;

ж) $\dfrac{10\frac{10}{11}:(-12)}{-2\frac{21}{22}}$ — о.

Расположите результаты в порядке возрастания и прочтите получившееся слово.

122. Какими должны быть рациональные числа, чтобы их частное (произведение) было: а) натуральным числом; б) целым отрицательным числом; в) конечной положительной десятичной дробью; г) отрицательной дробью; д) равным 0; е) равным 1; ж) равным -1; з) числом, большим 0 и меньшим 1; и) числом, меньшим -1. Приведите примеры.

123. Придумайте два рациональных числа с разными знаками таких, чтобы их частное было: а) меньше -10; б) равно 0; в) больше 7,2; г) равно 1; д) равно -1.

124. Что это за число, если половина — треть его?

125. Сколько будет, если четыре разделить: а) на половину; б) наполовину.

126. Пройдите лабиринт. Начните с примера, помеченного звёздочкой. Какой пример будет следующим? Чему равен конечный результат?

$3 : 1\frac{1}{5}$	$3\frac{1}{18} \cdot 1\frac{4}{5}$ *	$7\frac{4}{7} \cdot 21$
$5{,}5 : 33$	$2{,}5 \cdot 3\frac{1}{35}$	$0{,}1(6) \cdot 18$

127. Заполните пропуски и составьте задачи по таблице.

Скорость (км/ч)	Время (ч)	Путь (км)
	$3\frac{1}{4}$	26
$\frac{2}{5}$	2	
	7	1
18		27

128. $\frac{1}{5}$ часть огорода засажена клубникой, а $\frac{3}{8}$ части огорода занято луком. Сколько квадратных метров занято посадками, если площадь огорода 120 м^2?

Проверьте себя 4

Вариант 1

1. Вычислите: а) $\frac{8}{15} : \frac{4}{5}$; б) $3 : \frac{6}{7}$; в) $\frac{6}{7} : 7$; г) $2\frac{1}{5} : 5\frac{1}{2}$.
2. За сколько минут маленький кролик съест два с половиной листа капусты, если за минуту он съедает треть листа?

Вариант 2

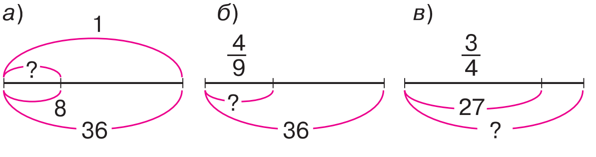
1. Вычислите: а) $2 : (4 : (8 : 10))$; б) $\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{4} : \left(\frac{1}{8} : \frac{1}{16}\right)\right)$.
2. Заполните пропуски: а) $* : \frac{3}{4} = 4$; б) $\frac{3}{4} : * = 4$; в) $4 : * = \frac{3}{4}$.

Вариант 3

Подготовьте сообщение о том, почему при делении положительного рационального числа на дробь получается число, большее делимого. Сопроводите сообщение иллюстрациями.

Нахождение части от числа и числа по его части

129. Соотнесите следующие вопросы с предложенными рисунками.



1) Какую часть от 36 задач составляет 8 задач?
2) Сколько задач составляет $\frac{4}{9}$ от 36 задач?
3) Сколько всего задач, если $\frac{3}{4}$ от их числа составляют 27 задач?

Ответьте на данные вопросы.

С помощью какого действия находится часть от числа; число по его части?

130. 1) Какую по счёту задачу решает ученик, если $\frac{2}{5}$ части задач им уже решено? (Всего в задачнике 250 задач.)

2) На сколько задач вы опережаете его? Какую часть составляют решённые вами задачи?

131. 1) Составьте и решите задачи по краткой записи:

а) 480 кг — $\frac{3}{5}$ груза; ? кг — весь груз.

б) 270 стр. — вся книга; 180 стр. — ?

в) 340 деталей — весь объём работы; ? дет. — $\frac{2}{5}$.

Сформулируйте задачи, обратные составленным. Как решаются они?

2) Составьте различные задачи, в которых нужно было бы вычислить: а) произведение $1\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{9}$; б) частное $34 : \frac{2}{3}$.

132. 1) Решите уравнения и сделайте проверку: а) $5x = 7$; б) $\frac{2}{3}a = \frac{8}{15}$.

2) Составьте задачи, которые решались бы с помощью этих уравнений.

133. Предлагается 20 задач. Выберите наиболее интересные для вас задачи и решите их.

1) 1 кг чая стоит 36 монет. Сколько стоят: а) $\frac{1}{4}$ кг чая; б) $\frac{1}{2}$ кг; в) $\frac{2}{4}$ кг; г) 3 кг?

2) Какую часть рубля составляют: а) 3 коп.; б) 75 коп.; в) 27 коп.?

3) Найдите: а) $\frac{3}{10}$ от 13; б) $\frac{5}{12}$ от 76; в) $\frac{1}{3}$ от $\frac{1}{3}$; г) 0,3 от 200; д) 0,46 от 24,03; е) 0,85 от $\frac{7}{50}$; ж) число, $\frac{6}{7}$ которого составляют $4\frac{1}{5}$; з) число, $\frac{4}{5}$ которого составляют $2\frac{4}{8}$; и) число, 0,2 которого составляют $3\frac{1}{5}$.

4) Что больше: $\frac{5}{9}$ от 180 руб. или $\frac{7}{13}$ от 195 руб.?

5) Сколько центнеров в: а) $\frac{2}{5}$ т; б) $\frac{3}{5}$ т; в) $17\frac{3}{4}$ кг?

6) Какую часть года составляет: а) 1 месяц; б) 7 месяцев; в) 1 квартал; г) 1 декада?

7) Сколько аров составляют: а) $\frac{3}{5}$ га; б) $\frac{7}{20}$ га; в) 55 м^2?

8) Определите диаметр окружности длиной в 66 м^2, если длина диаметра составляет (приблизительно) $\frac{7}{22}$ длины окружности. Исходя из того же соотношения, определите, чему равна длина окружности, если её диаметр равен 2 м; $1\frac{4}{5}$ м.

9) Дом имеет длину 60 м, ширину 20 м. Найдите площадь, занимаемую домом на плане, масштаб которого 1 : 500.

10) В школе учатся 480 человек: $\frac{3}{5}$ общего числа учащихся составляют мальчики. Сколько девочек в школе?

11) На занятиях присутствовало 28 человек, что составляет $\frac{7}{8}$ всего числа учащихся. Сколько всего учащихся в классе?

12) Сплав состоит из олова и сурьмы. Количество сурьмы в этом сплаве составляет $\frac{3}{17}$ количества олова. Сколько весит сплав, для приготовления которого взято $27\frac{1}{5}$ кг олова?

13) Колесо делает в среднем в минуту $27\frac{1}{5}$ оборота. Сколько раз оно обернётся: а) за 3 ч; б) за $1\frac{1}{4}$ ч; в) за $\frac{2}{3}$ ч?

14) Умножьте $\frac{2}{4}$ на $7\frac{1}{2}$, затем найдите $\frac{4}{6}$ полученного числа.

15) Каждый градус по шкале Цельсия равен $\frac{4}{5}$ градуса по шкале Реомюра. Какова температура по Реомюру, если по Цельсию она — $22\frac{1}{2}$ градуса?

16) Найдите площадь поверхности и объём куба, ребро которого равно: а) $\frac{3}{8}$ дм; б) $4\frac{1}{5}$ дм.

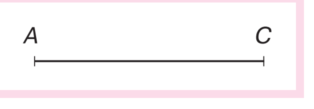
17) Высота окна 2 м, ширина составляет $\frac{2}{5}$ высоты. Найдите площадь этого окна.

18) Сколько тонн льда может поместиться в леднике размерами $3\frac{1}{2}$ м $\times$ 2 м $\times$ 1 м, если 1 дм^3 льда весит 0,9 кг?

19) Ширина зала равна $\frac{1}{50}$ км, длина его в $1\frac{1}{2}$ раза больше ширины, а высота составляет $\frac{1}{4}$ ширины. Сколько весит воздух, наполняющий зал, если 1 м^3 воздуха весит 1,3 кг (приблизительно)?

20) Трава после сушки потеряла $\frac{2}{3}$ своей массы. Сколько сена получится из $7\frac{1}{4}$ кг травы?

I **134.** Нарисуйте отрезок, от которого данный отрезок *AC* составляет $\frac{3}{4}$.



II **135.** 1) Из трёх равных прямоугольников вырежьте 3 разных прямоугольника, площадь каждого из которых составляет $\frac{3}{4}$ площади исходного прямоугольника.

2) Вырежьте такой прямоугольник, чтобы площадь исходного прямоугольника составляла $\frac{3}{4}$ площади вырезанного.

Проверьте себя 5

Вариант 1

1. Выполните действия: $\dfrac{5,5 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 3\frac{3}{5}}{2\frac{3}{4} \cdot (-4,6)}$.
2. Решите уравнение: $9{,}75 \cdot x = -7\frac{1}{11}$.
3. Выполните действия: $15 : \frac{5}{18} : 3\frac{3}{8}$.
4. Найдите число, $\frac{5}{9}$ которого составляют $2\ \frac{6}{7}$.
5. Уменьшите число 27 на $\frac{2}{9}$ этого числа.

Вариант 2

1. Сравните:

   а) $\frac{3}{4} : \frac{2}{9}$ и $\frac{2}{9} : \frac{3}{4}$; б) $\frac{10}{11} : \frac{5}{2}$ и $\frac{5}{2} : \frac{10}{11}$; в) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d} : \frac{a}{b}$.

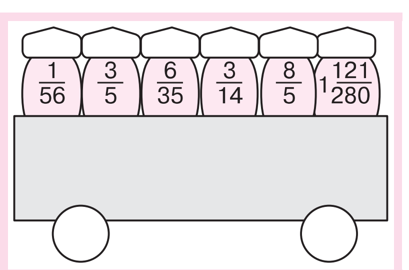
2. Найдите:

   а) четверть от одной сотой;
   б) одну десятую от четверти;
   в) число, одна сотая которого составляет четверть;
   г) число, четверть которого составляет одну десятую.

Вариант 3

Используя дробь $\frac{8}{12}$, составьте 3 задачи на нахождение части от числа, числа по его части.

Сложение рациональных чисел

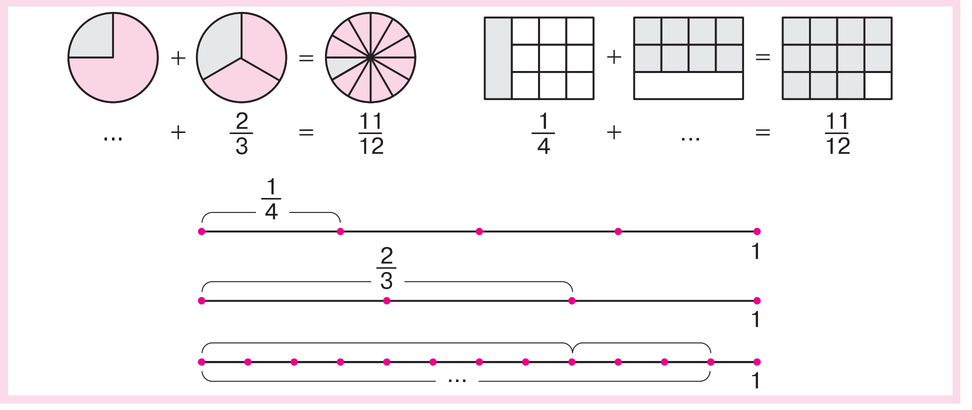


136. Сколько пудов загружено в тележку?

В каком порядке следует считать эту сумму, чтобы быстрее получить результат?

На сколько самый тяжёлый мешок тяжелее самого лёгкого? Сколько килограммов загружено в тележку (1 ц = 6,105 пуда)?

137. 1) Рассмотрите рисунки, заполните пропуски.



2) Проиллюстрируйте сложение рациональных чисел:

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$; б) $1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$.

138. Сколько будет: один да один, да полтора, да два, да два с половиной?

139. Найдите значение суммы устно. Назовите сначала те примеры, где значение суммы меньше единицы, затем те, где значение суммы больше единицы.

а) $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}$; б) $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$; в) $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}$; г) $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}$; д) $\frac{5}{341}+\frac{252}{341}$;
е) $\frac{11}{3}+\frac{2}{3}$; ж) $\frac{7}{11}+\frac{1}{11}+\frac{2}{11}$; з) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}$, $(a \neq 0)$; и) $\frac{c}{3}+\frac{d}{3}$.

Может ли быть сумма двух правильных дробей больше 2; равна 2?

140. Сложите устно:

а) $\frac{1}{9}+\frac{3}{9}$; б) $\frac{2}{9}+\frac{6}{9}$; в) $\frac{3}{8}+\frac{2}{16}$; г) $\frac{4}{7}+\frac{2}{14}+\frac{3}{14}$; д) $\frac{1}{4}+\frac{3}{12}+\frac{2}{8}$;
е) $\frac{2}{6}+\frac{3}{9}+\frac{12}{9}$.

Укажите те примеры, где сначала выгодно сократить дробь, а затем выполнить сложение.

141. Сложите устно:

а) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$; в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$; д) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$; е) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$;
ж) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$; з) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$; и) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$; к) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$; л) $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$; м) $\frac{23}{210}+\frac{9}{70}$.

142. Выполните сложение:

а) $\frac{7}{20}+\frac{3}{20}$; б) $\frac{7}{3}+\frac{7}{27}$; в) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$; г) $\frac{5}{24}+\frac{5}{36}$;
д) $\frac{27}{7}+\frac{9}{7}$; е) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$; ж) $\frac{3}{7}+\frac{5}{4}$; з) $\frac{17}{96}+\frac{41}{72}$;
и) $\frac{37}{24}+\frac{11}{24}$; к) $\frac{7}{9}+\frac{5}{18}$; л) $\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$; м) $\frac{10}{39}+\frac{15}{26}$;
н) $\frac{17}{12}+\frac{13}{12}$; о) $\frac{4}{13}+\frac{5}{26}$; п) $\frac{7}{15}+\frac{29}{28}$; р) $\frac{20}{25}+\frac{17}{30}$.

Какой из «столбиков» можно озаглавить:
«сложение дробей с одинаковыми знаменателями»;
«сложение дробей таких, что один знаменатель кратен другому»;
«сложение дробей с взаимно простыми знаменателями»;
«самый общий случай сложения дробей»?

143. Заполните пропуски.

а) $\frac{4}{9}+\frac{11}{15}=\frac{\overset{\backslash 5}{4}}{3\cdot 3}+\frac{\overset{\backslash 3}{11}}{3\cdot 5}=\frac{5\cdot 4+3\cdot 11}{45}=\ldots;$

б) $\frac{5}{12}+\frac{7}{84}=\frac{\overset{\backslash \ldots}{5}}{12}+\frac{\overset{\backslash \ldots}{7}}{12\cdot 7}=\frac{7\cdot 5+1\cdot 7}{\ldots}=\ldots=\frac{1}{2};$

в) $\frac{2}{32}+\frac{11}{48}=\ldots=\frac{2\cdot\ldots+11\cdot\ldots}{96}=\ldots;$

г) $\frac{1}{3}+\frac{4}{7}+\frac{3}{4}=\frac{1\cdot 28+4\cdot\ldots+3}{84}=\frac{139}{84}=\ldots;$

д) $\frac{7}{30}+\frac{\overset{\backslash 2}{2}}{15}+\frac{\overset{\backslash \ldots}{1}}{6}=\frac{7+4+\ldots}{\ldots}=\ldots.$

144. 1) Вычислите:

а) $\frac{7}{372}+\frac{22}{31}$; б) $\frac{2}{279}+\frac{101}{651}$; в) $\frac{77}{720}+\frac{67}{320}$; г) $\frac{10}{147}+\frac{5}{126}$; д) $\frac{3}{75}+\frac{13}{315}$.

2) Придумайте примеры на сложение дробей.

Пример.

$$\frac{\overset{\backslash 6}{10}}{147}+\frac{\overset{\backslash 7}{5}}{126}=\frac{10\cdot 6+5\cdot 7}{882}=\frac{95}{882}.$$

$$\begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array}$$

$147=3\cdot 7^2$; $126=2\cdot 3^2\cdot 7$; НОК$(147; 126)=2\cdot 3^2\cdot 7^2=882$;

$(2\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7):(3\cdot 7\cdot 7)=6$; $(2\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7):(2\cdot 3\cdot 3\cdot 7)=7$.

Ⅰ **145.** 1) Решите уравнения:

а) $\frac{x}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3}{2}$; б) $\frac{x}{5}+\frac{2}{5}=\frac{8}{10}$ в) $\frac{x}{5}+\frac{3}{5}=1$; г) $\frac{2}{3}+\frac{y}{9}=\frac{6}{9}$;

д) $\frac{3}{2}+\frac{y}{4}=\frac{10}{5}$; е) $\frac{4}{5}+\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$; ж) $\frac{x}{7}+\frac{2}{7}=1$; з) $\frac{x}{80}+\frac{2}{5}=\frac{3}{1}$.

2) Может ли сумма положительных дробей быть меньше:

а) одного из слагаемых;
б) хотя бы одного из слагаемых;
в) обоих слагаемых?

Ⅱ **146.** Подберите такую положительную дробь, чтобы неравенство были верным:

а) $\frac{3}{8}+x<1$; б) $\frac{5}{8}+x<1$; в) $\frac{29}{33}+x<1$;

г) $\frac{99}{100}+x<1$; д) $\frac{78}{77}+x<1$; е) $\frac{8}{9}+x<1$.

Сколько значений может принимать x в каждом случае? Во всех ли случаях вам удалось выполнить задание?

Ⅰ **147.** На основе каких законов сложения рациональных чисел выполнено сложение:

$$5\frac{2}{2}+8\frac{1}{3}=5+\frac{2}{3}+8+\frac{1}{3}=$$
$$=5+8+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=(5+8)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=13+1=14?$$

Ⅰ **148.** 1) Вычислите устно:

а) $\frac{17}{21}+7\frac{5}{8}+\frac{4}{21}$; б) $\frac{1}{8}+\frac{3}{5}+\frac{1}{8}+\frac{2}{5}$; в) $\frac{13}{99}+0{,}99+\frac{20}{99}+0{,}01$.

2) Придумайте сами такие примеры, в которых применение законов сложения облегчает вычисления.

Ⅰ **149.** 1) Запишите в виде смешанного числа:

а) $3+\frac{4}{5}$; б) $7+\frac{4}{7}$; в) $11+\frac{2}{3}$.

2) Представьте смешанное число в виде суммы:

а) $3\frac{1}{2}$; б) $5\frac{11}{15}$; в) $3\frac{8}{13}$.

Ⅰ **150.** Вычислите устно:

а) $6+7\frac{3}{4}$; б) $5\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+1\frac{4}{11}$; в) $2+2\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+1\frac{7}{12}$;

г) $3\frac{2}{5}+3+\frac{3}{5}$; д) $1\frac{21}{55}+2\frac{14}{55}+3\frac{9}{55}+4\frac{16}{55}$.

I **151.** Выберите из предложенных арифметических выражений такие, значения которых меньше 35, но больше 30. Проверьте себя вычислением.

а) $8\frac{5}{9}+2\frac{7}{18}+6\frac{11}{36}$; б) $13\frac{11}{25}+10\frac{7}{15}+9\frac{13}{18}$;

в) $4\frac{7}{45}+11\frac{4}{13}+8\frac{5}{26}+10\frac{2}{5}$; г) $4\frac{1}{7}+2\frac{4}{9}+12\frac{6}{7}+3\frac{3}{11}+10\frac{5}{9}+1\frac{6}{11}$;

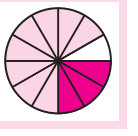
д) $27\frac{13}{15}+1\frac{7}{12}+5\frac{11}{20}$.

I **152.** Вычислите (устно):

а) $1-\frac{3}{5}$; б) $1-\frac{12}{13}$; в) $1+\frac{2}{7}$; г) $3+1\frac{1}{2}$; д) $3-\frac{1}{4}$; е) $3-2\frac{1}{4}$;

ж) $103\frac{3}{4}-90$; з) $21{,}6-10\frac{1}{2}$.

I **153.** Сложение каких чисел иллюстрирует рисунок?



а) $\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)$; б) $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$; в) $\frac{3}{12}+\frac{1}{12}$; г) $\frac{8}{12}+\frac{3}{12}$.

Может ли этот рисунок служить иллюстрацией для вычитания чисел? Если да, то назовите эти числа.

II **154.** Выполните вычитание «в столбик»:

а) $\begin{array}{r} 8\frac{1}{3} \\ -\;3 \\ \hline \end{array}$; б) $\begin{array}{r} 13{,}4 \\ -\;10{,}2 \\ \hline \end{array}$; в) $\begin{array}{r} 8\frac{5}{8} \\ -\;3\frac{3}{8} \\ \hline \end{array}$;

г) $\begin{array}{r} 7\frac{9}{11} \\ -\;7\frac{3}{11} \\ \hline \end{array}$; д) $\begin{array}{r} 9 \\ -\;0{,}6 \\ \hline \end{array}$; е) $\begin{array}{r} 5 \\ -\;\frac{2}{9} \\ \hline \end{array}$;

ж) $\begin{array}{r} 7 \\ -\;2\frac{2}{5} \\ \hline \end{array}$; з) $\begin{array}{r} 1 \\ -\;\frac{3}{7} \\ \hline \end{array}$; и) $\begin{array}{r} 6\frac{2}{7} \\ -\;3\frac{4}{7} \\ \hline \end{array}$;

к) $\begin{array}{r} 6\frac{2}{7} \\ -\;5\frac{5}{7} \\ \hline \end{array}$; л) $\begin{array}{r} 138\frac{11}{125} \\ -\;89\frac{108}{125} \\ \hline \end{array}$; м) $\begin{array}{r} 200\frac{3}{427} \\ -\;12\frac{163}{427} \\ \hline \end{array}$.

I **155.** Заполните пропуски:

а) $\frac{1}{3}+\frac{5}{7}>\frac{1}{3}+\ldots$; б) $\frac{1}{3}+\frac{13}{37}\ldots\frac{1}{3}+\frac{13}{14}$; в) $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}<\frac{1}{3}-\ldots$.

156. Найдите x:

1) а) $5 + x = 5$;
б) $-3 + x = -3$;
в) $-\frac{2}{3} + x = -\frac{2}{3}$;
г) $x + \frac{11}{7} = \frac{11}{7}$;
д) $-1 + x = -1$;
е) $x + 0 = 0$;
ж) $\frac{a}{b} + x = \frac{a}{b}$.

2) а) $-\frac{7}{2} + x = 0$;
б) $x + \left(-\frac{2}{5}\right) = 0$;
в) $x + 7 = 0$;
г) $1 + x = 0$;
д) $x + \frac{7}{3} = 0$;
е) $0 + x = 0$;
ж) $\frac{a}{b} + x = 0$.

157. Используя рациональные числа $-\frac{8}{12}$; $\frac{13}{15}$; $-\frac{1}{10}$, составьте три примера на сложение и решите их.

158. Для рациональных чисел $\frac{3}{4}$, $-\frac{35}{36}$, $\frac{5}{4}$, -1, $-\frac{1}{2}$, $+1$, $\frac{13}{20}$, 0 подберите такие числа, которые в сумме с каждым из данных составляют число: а) 1; б) -1; в) 0; г) 2.

159. Вставьте вместо пропусков одно, два или три слагаемых так, чтобы равенство сохранялось:

а) $\frac{3}{5} + \frac{8}{9} + \ldots = 2$; б) $\frac{3}{5} + \frac{8}{9} + \ldots = 2\frac{1}{9}$; в) $\frac{3}{5} + \frac{8}{9} + \ldots = -2\frac{1}{3}$.

160. Вычислите удобным способом:

а) $\frac{25}{21} + \left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{4}{21}\right)$; б) $-\frac{17}{25} + \frac{13}{12} + \left(-\frac{8}{25}\right)$;

в) $-\frac{35}{13} + \frac{15}{11} + \left(-\frac{4}{13}\right)$; г) $\frac{20}{7} + \left(-\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{13}{7}\right)$.

161. 1) Запишите в виде смешанного числа:

а) $2 + \frac{3}{5}$; б) $-2 + \left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $-3 + \frac{1}{2}$.

2) Запишите числа в виде суммы целой и дробной частей:

а) $3\frac{1}{2}$; б) $-3\frac{1}{2}$; в) $-5\frac{2}{5}$; г) $5\frac{2}{5}$.

Пример. $-3\frac{1}{2} = -\left(3 + \frac{1}{2}\right) = -3 - \frac{1}{2}$.

162. 1) Объясните, как выполнено сложение:

а) $3\frac{3}{11} - 5\frac{8}{9} = (3 + (-5)) + \left(\frac{3}{11} + \left(-\frac{8}{9}\right)\right) = -2 + \left(\frac{27}{99} + \left(-\frac{88}{99}\right)\right) = -2 - \frac{61}{99} = -2\frac{61}{99}$;

б) $-3\frac{3}{7} - \left(-6\frac{5}{14}\right) = -3\frac{3}{7} + 6\frac{5}{14} = 3 + \frac{-3 \cdot 2 + 5}{14} = 3 - \frac{1}{14} = 2\frac{13}{14}$.

2) На каких этапах были использованы: а) ассоциативный закон сложения; б) коммутативный закон сложения?

I **163.** Найдите значения выражений при заданном значении переменной:

a	2	-2	5	$\frac{1}{15}$	$-\frac{5}{8}$	$3\frac{13}{15}$	$-2\frac{8}{15}$
$-2+a$							
$-2\frac{23}{24}-a$							
$-3\frac{4}{25}-a$							

I **164.** Вычислите и объясните своё решение:

а) $12\frac{1}{25}-2\frac{11}{15}-13\frac{7}{75}$; б) $4\frac{1}{28}-2\frac{4}{21}+7\frac{3}{14}$;

в) $\frac{2}{7}-\frac{7}{8}+\frac{5}{9}$; г) $-2\frac{4}{9}+7\frac{7}{12}-3\frac{5}{9}-2\frac{7}{12}-2\frac{1}{6}$;

д) $-2\frac{2}{5}-\left(-3\frac{7}{8}-1\frac{2}{5}\right)$; е) $-3{,}75-\left(-3\frac{5}{24}+2\frac{1}{4}\right)$.

I **165.** Найдите среднее арифметическое чисел:

а) $7\frac{1}{12}$ и $9\frac{1}{9}$; б) $6\frac{1}{3}$; $8\frac{1}{2}$ и $5\frac{3}{4}$;

в) $14\frac{1}{2}$; $25\frac{3}{5}$; $19\frac{3}{4}$ и $20\frac{3}{10}$; г) $15\frac{1}{48}$; $11\frac{7}{60}$ и $9\frac{3}{64}$.

II **166.** 1) Отметьте на координатной прямой точки $A(1)$ и $B(8)$. Запишите координату середины C отрезка AB.

Отметьте на координатной прямой точку C_1, соответствующую среднему арифметическому чисел 1 и 8. Как расположены точки C и C_1 на отрезке AB?

Найдите точки C_2 и C_3, координаты которых являются средними арифметическими координат точек A и C, C и B. Что вы можете сказать о середине отрезка C_2C_3 ?

2) Пусть точка A имеет координату $\frac{a}{b}$, а точка B — координату $\frac{c}{d}$. Найдите среднее арифметическое чисел, являющихся координатами точек A и B. Найдите координату середины отрезка AB.

II **167.** Однородная железная пластинка имеет форму треугольника с вершинами A (a_1, a_2), B (b_1, b_2) и C (c_1, c_2). Центр тяжести пластинки находится в точке M (x, y), где

$$x=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \qquad y=\frac{a_2+b_2+c_2}{3}.$$

1) Найдите координаты центра тяжести пластинки, если:

а) $A(-2; 1)$, $B(2; 6)$, $C(5; 2)$;

б) $A\left(2\frac{1}{2};\ 0\right)$, $B\left(8\frac{1}{3};\ 8\frac{1}{3}\right)$, $C\left(-1\frac{1}{4};\ 5\right)$.

2) Задайте на плоскости систему координат, постройте $\triangle ABC$ и отметьте его центр тяжести.

II **168.** Египтяне все дроби старались записывать как суммы долей, то есть дробей вида $\frac{1}{n}$. Единственным исключением была дробь $\frac{2}{3}$. Например, вместо $\frac{8}{15}$ они писали $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$. Иногда это было удобно. В папирусе, написанном египетским писцом Ахмесом, есть задача: разделить 7 хлебов между восемью людьми.

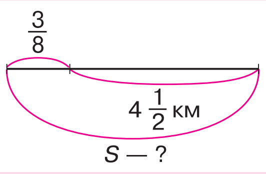
Если резать каждый хлеб на 8 частей, придётся сделать 49 разрезов. А египтяне эту задачу решали по-другому.

Дробь $\frac{7}{8}$ записывали в виде долей: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Теперь ясно, что надо 4 хлеба разрезать пополам, 2 хлеба на 4 части и только один хлеб на 8 частей (всего 17 разрезов).

Разделите 7 арбузов на 12 человек, сделав как можно меньше разрезов. Сколько получится разрезов?

I **169.** 1) После того, как путник прошёл $\frac{3}{8}$ всего расстояния, ему осталось пройти ещё $4\frac{1}{2}$ км. Найдите весь путь.

2) Из полной бочки отлили $\frac{2}{5}$, потом $\frac{1}{3}$ оставшейся в ней воды, после чего в бочке осталось 8 вёдер. Сколько было воды в бочке первоначально?

1.


2. $\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \text{— } \frac{2}{5} \text{ всего} \\ \text{II} & \text{— } \frac{1}{3} \text{ остатка} \\ \text{Ост. — 8 в.} & \end{array}\right\}?$

Сравните условия задач и их краткие записи. Что общего в постановке и решении этих задач?

II **170.** 1) Объясните способы сложения чисел:

а) $3\frac{2}{3} + 0{,}25 = 3\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = 3\frac{11}{12}$;

б) $3\frac{2}{3} + 0{,}25 = 3{,}(6) + 0{,}25 = 3{,}66(6) + 0{,}25 = 3{,}91(6)$.

2) Выполните сложение:

а) $-2{,}38+\frac{23}{25}$; б) $1\frac{16}{75}+2{,}46$; в) $0{,}025-4\frac{1}{12}$.

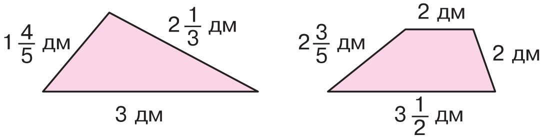
3) Выполните сложение рациональных чисел:

а) $\frac{2}{7}+2{,}7$; б) $\frac{9}{36}-0{,}21$; в) $7\frac{1}{5}+5{,}(3)$; г) $2{,}(1)+18{,}(3)$.

В каком случае вам удобнее было приводить слагаемые к обыкновенной дроби? к десятичной дроби?

4) Приведите свои примеры для случаев сложения.

I **171.** Найдите периметры изображённых фигур.

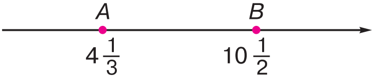


II **172.** 1) Поставьте вместо знака $*$ знак равенства или неравенства:

а) $1\cdot\frac{1}{2}*1-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}*\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; в) $6\cdot\frac{6}{7}*6-\frac{6}{7}$; г) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}*\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

2) Попробуйте составить аналогичный пример.

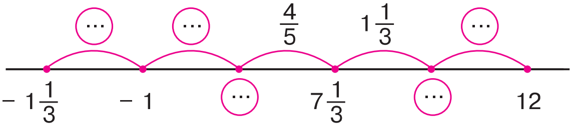
II **173.** 1) Найдите расстояние между точками A и B, если

а) 

б) $A\left(100\frac{3}{4}\right)$, $B(13,5)$, в) $A\left(-4\frac{2}{3}\right)$, $B\left(1\frac{1}{3}\right)$; г) $A(10)$, $B\left(-3\frac{1}{2}\right)$.

2) Укажите несколько пар точек на координатной прямой, расстояние между которыми $3\frac{1}{2}$.

I **174.** Заполните пропуски:



I **175.** В бидоне было $7\frac{1}{2}$ л воды. В него добавили $4\frac{3}{4}$ л воды, затем ещё 0,5 л, после чего отлили $3\frac{1}{5}$ л. Изменилось ли количество воды в ёмкости? Если да, то как?

176. Найдите значение алгебраического выражения при $a = 7$, $b = 6$, $c = 5$:

а) $\frac{a}{3} - \frac{a}{4}$; б) $\frac{3}{4a} - \frac{1}{3a}$; в) $\frac{2}{a} - \frac{2}{7a}$; г) $\frac{a}{4} - \frac{a}{8}$; д) $\frac{a}{7} + \frac{b}{3}$;
е) $\frac{2}{ab} - \frac{2}{cb}$; ж) $\frac{5}{ab} + \frac{3}{ac}$; з) $\frac{3}{4a} - \frac{1}{4b}$; и) $\frac{5}{8a} - \frac{3}{5b}$.

Составьте вопросы о сложении рациональных чисел так, чтобы среди них были и лёгкие вопросы, и вопросы, на которые нелегко ответить.

177. Я отпил $\frac{1}{6}$ часть кружки чая и долил кружку молоком. Затем выпил $\frac{1}{3}$ кружки и снова долил кружку молоком. Потом я выпил полкружки и долил молока. Наконец, я выпил полную кружку. Чего больше выпито: чая или молока?

178. Представьте дробь $\frac{8}{12}$ в виде суммы: а) двух дробей, одна из которых больше 1; б) двух дробей, знаменатель одной из которых 3; в) двух дробей, каждая из которых меньше 0; г) двух дробей, больших 1; д) трёх дробей; е) трёх дробей, две из которых больше 1; ж) двух дробей, модули которых больше 1; з) дробей вида $\frac{1}{n}$, где n — целое.

Проверьте себя 6

Вариант 1

Постарайтесь набрать как можно больше баллов.

1. Вычислите:

а) $-\frac{9}{28} + \frac{11}{35}$; б) $-1\frac{7}{15} - 3\frac{8}{45}$; в) $7\frac{2}{3} - 9\frac{8}{9}$;
г) $\frac{7}{15} - 2\frac{1}{5}$; д) $-\frac{9}{40} - \left(-\frac{7}{24}\right)$; е) $-6\frac{3}{7} - \left(-1\frac{4}{7}\right)$; | 3 б.

ж) $2\frac{3}{5} - 1\frac{5}{8} - \frac{3}{4} + 4,4$; з) $2\frac{7}{9} - 6\frac{5}{6} - \left(-3\frac{2}{9}\right)$. | 4 б.

2. Найдите значения выражений:

а) $8,28 + a$, если $a = -10\frac{4}{15}$;
б) $a - b$, если $a = -11,7$; $b = -9\frac{7}{8}$; | 4 б.

в) $a - b - c$, $a - (b + c)$, $a - b + c$,
если $a = 4,7$; $b = 15\frac{2}{9}$; $c = -2\frac{8}{15}$. | 5 б.

3. Решите уравнения:

а) $-\frac{3}{4}x - 7\frac{1}{3} = 9\frac{5}{6}$; б) $\frac{x}{4} = 211\frac{1}{4} - 210\frac{1}{2}$; | 4 б.

в) $x + 3\frac{4}{5} = 2$; г) $2x - 1\frac{3}{8} = 2\frac{5}{12}$. | 6 б.

4. Выполните действия, используя числовую ось:

а) $-2\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4}$; б) $-4 + 7\frac{1}{4}$. | 3 б.

5. На числовой оси отмечены точки $K(k)$ и $M(m)$:

О числах a, b и c известно, что $a = m + k$; $b = m - k$; $c = k - m$. Укажите наибольшее и наименьшее из чисел a, b, c. | 7 б.

6. Определите, какие из выражений имеют отрицательные значения, и найдите эти значения: | 7 б.

а) $\left(8\frac{3}{8} - 1{,}3 + \frac{5}{16}\right) - \left(-9\frac{7}{8} - 11{,}9\right)$;

б) $9\frac{7}{32} + \left(-8\frac{5}{18} - 6\frac{7}{12}\right) - \left(-13\frac{5}{12} + 7\frac{7}{32}\right)$;

в) $-9{,}5 - 3\frac{3}{4} - \left(-7\frac{5}{8} - 8 + 3{,}1\right)$.

Вариант 2

1. Может ли сумма двух несократимых дробей быть равной 1? Найдите условия, при которых сумма двух несократимых дробей равна целому числу.
2. Найдите условия, при которых разность двух дробей с одинаковыми числителями выразится дробью с тем же числителем. Приведите примеры.

Вариант 3

Продолжите рассказ дроби: «Когда я была суммой пяти дробей...»

Распределительный закон

179. Вычислите:

а) $7 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{9}{16} + \frac{9}{10}\right)$;

в) $\frac{7}{8} \cdot 16 - 3 \cdot \frac{7}{8}$; г) $\left(5 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5}$;

д) $\frac{2}{11} \cdot \frac{9}{25} + \frac{8}{11} \cdot \frac{9}{25}$; е) $24\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{12}\right)$;

ж) $\frac{4}{7} \cdot \frac{21}{6} - \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{32}$; з) $\frac{14}{15}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\right)$.

Что общего в числовых выражениях каждого столбца? Есть ли в столбце пример, который отличается от других? Что объединяет числовые выражения обоих столбцов?

180. Восстановите потерянные числа или знаки и найдите значения выражений:

а) $\frac{7}{8}\left(\frac{1}{4} + \ \ldots\right) = \ldots \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \ldots;$

б) $\left(\frac{4}{8} - \ \ldots\right) \cdot 2 = \frac{4}{8} \cdot 2 \ldots \frac{1}{8} \cdot \ldots = \ldots;$

в) $\left(-2\frac{1}{3} + \ \ldots\right) \cdot \frac{13}{2} = \ldots \cdot \frac{13}{2} + \frac{1}{3} \cdot \ldots = \ldots;$

г) $\ldots \cdot \left(8 - \frac{12}{5}\right) = \frac{5}{28} \cdot 8 - \frac{5}{28} \cdot \ldots = \ldots;$

д) $7 \cdot \frac{1}{3} + \ \ldots \cdot \frac{4}{3} = 7 \cdot \left(\frac{1}{3} \ldots \frac{4}{3}\right) = \ldots;$

е) $-\frac{11}{4} \cdot 5 - \frac{5}{4} \cdot \ldots = \left(\ldots - \frac{5}{4}\right) \cdot 5 = \ldots;$

ж) $\frac{13}{5} \cdot (-6) + \frac{2}{5} \cdot \ldots = \left(\frac{13}{5} + \frac{2}{5}\right) \cdot \ldots 6 = \ldots.$

181. Потребовалось кому-то умножить $3\frac{1}{2}$ на 4. Он сначала представил первое число в виде неправильной дроби, а затем выполнил умножение:

$$3\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{7}{2} \cdot 4 = \frac{28}{2} = 14.$$

Потом попробовал решить иначе и применил распределительный закон:

$$\left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 4 = 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 14.$$

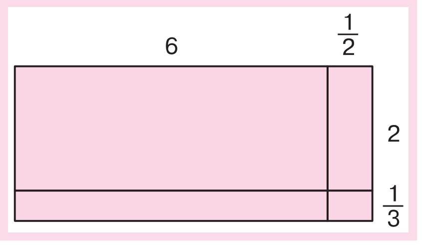
Ему это понравилось. Он записал ещё три похожих примера и быстро нашёл произведения:

$$6 \cdot 1\frac{1}{12}; \quad 4 \cdot 10\frac{2}{9}; \quad -1\frac{3}{5} \cdot 5.$$

Найдите эти произведения и придумайте аналогичные примеры.

182. 1) Задумался один ученик, а нельзя ли использовать распределительный закон при умножении смешанных дробей, например таких: $6\frac{1}{2}$ и $2\frac{1}{3}$. Вот его рассуждения:

$$6\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3} = 6\frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right) = 6\frac{1}{2} \cdot 2 + 6\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \left(6 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 + \left(6 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} =$$
$$= 6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 12 + 1 + 2 + \frac{1}{6} = 15\frac{1}{6}.$$



Потом он подумал, что можно и так рассуждать:

$$6\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{3}=\left(6+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{3}\right).$$

Как такое произведение найти? Сделав рисунок, он получил такое равенство:

$$6\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{3}=6\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2+6\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}.$$

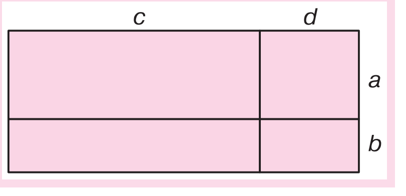
Повторите рассуждения этого ученика на примере умножения чисел $2\frac{1}{2}$ и $3\frac{4}{5}$. Обоснуйте сами, что

$$2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{4}{5}=2\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3+2\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}.$$

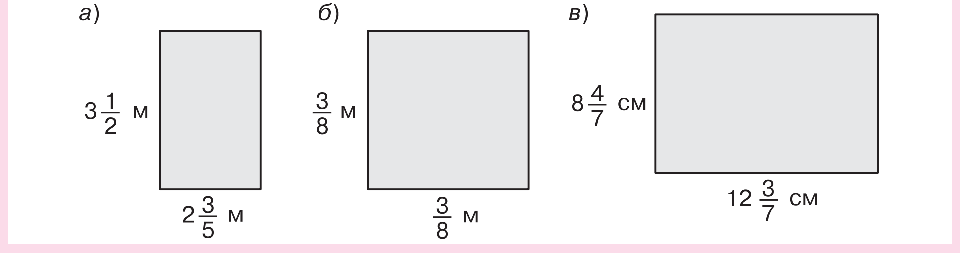
2) Рассмотрите ещё один прямоугольник.

Используя рисунок, покажите, что верно равенство

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$



183. Найдите площадь фигуры, если:



184. Заполните пропуски:

а) $12\cdot 3\frac{5}{7}=12\cdot\ldots+12\cdot\ldots=\ldots+\ldots=\ldots$;

б) $-35\cdot 2\frac{11}{14}=-35\cdot\ldots-35\cdot\ldots=\ldots-\ldots=-(\ldots+\ldots)=\ldots$;

в) $15\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}=15\cdot\ldots+\frac{5}{6}\cdot\ldots=\ldots+\ldots=\ldots$;

г) $-\frac{3}{8}\cdot\left(-16\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{8}\cdot 16\frac{2}{3}=\frac{3}{8}\cdot\ldots+\ldots\cdot\frac{2}{3}=\ldots+\ldots=\ldots.$

185. Найдите значение выражения:

а) $4 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{1}{7} + 11 \cdot \frac{1}{7}$; б) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3}$;

в) $5\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{22} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{22} + 4\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{22}$; г) $\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{13} \cdot \frac{6}{7} - \frac{6}{13} \cdot \frac{1}{7}$.

186. Найдите значения выражений:

а) $14a - 25a + 1\frac{5}{8}$, если $a = 1\frac{1}{3}$;

б) $-5\frac{4}{5}a + 8a - 0{,}2a$, если $a = -7\frac{1}{3}$;

в) $-2{,}8m - 8\frac{2}{3}n + 7\frac{5}{6}n - 3\frac{2}{5}m$, если $m = \frac{5}{52}$, $n = -\frac{18}{25}$;

г) $3\frac{1}{3} - (a - 6) - \left(0{,}8a - 5\frac{7}{8}\right)$, если $a = \frac{15}{16}$.

187. Приведите подобные слагаемые:

а) $5a - 2a + 7a$; б) $-3{,}2b - 5{,}4b + 7{,}2b$;

в) $4\frac{1}{3}a - 2\frac{2}{3}a$; г) $3\frac{4}{5}b - 2\frac{1}{6}b - 5\frac{1}{2}b + b$;

д) $4{,}25a - 2\frac{13}{18}b - 2\frac{1}{3}a - \frac{5}{12}$; е) $3{,}15p - 14\frac{1}{3}q + \frac{17}{20}p + 4$.

Пример:

$$\underline{4{,}25a} - \underline{\underline{2\frac{13}{18}b}} - \underline{2\frac{1}{2}a} - \underline{\underline{\underline{\frac{5}{12}}}} = \left(4{,}25a - 2\frac{1}{2}\right) - 2\frac{13}{18}b - \frac{5}{12} = 1{,}75a - 2\frac{13}{18}b - \frac{5}{12}.$$

188. Решите уравнения:

а) $5x + 3x - 15x = 12$; б) $x - 5{,}2 = 9{,}3 - 8x$; в) $\frac{3}{5}x + \frac{7}{4}x - x = \frac{1}{4}$;

г) $-5\frac{1}{5} + \frac{7}{5}x + 2\frac{1}{6} = \frac{1}{3}x$; д) $\frac{1}{4}x - \frac{10}{7} + \frac{2}{15} + \frac{5}{14}x - 1 = 0$;

е) $2(3x - 4) = 5(3x - 6)$; ж) $\frac{x}{3} + 2(4x + 1) = 2 - (x - 1)$.

189. Найдите такие значения a и b, при которых верно равенство:

а) $\frac{7}{8}a + \frac{11}{20}b + \frac{6}{5}a - \frac{1}{12}b = 0$; б) $5\frac{2}{3}a - \frac{13}{2}b - 7\frac{1}{3}a + 11\frac{1}{6}b = 0$.

190. Сосчитайте:

а) $\frac{5}{4} + 5\frac{2}{9} + 3\frac{5}{11} + \frac{7}{9} - 4\frac{1}{4}$; б) $2\frac{2}{9} - 3\frac{3}{4} + 5 - 2\frac{1}{4} + \frac{7}{9}$;

в) $10\frac{7}{15} - 3\frac{2}{5} - 4\frac{1}{2} + 12\frac{3}{5} - 6\frac{1}{5}$; г) $6 - \left(2\frac{1}{8} + 3\frac{3}{8}\right)$;

д) $\left(6\frac{5}{9} - (-2{,}4) - \left(-3\frac{3}{5}\right)\right) \cdot 9$; е) $\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{3}{4}$;

ж) $\left(\frac{4}{25} - \frac{7}{10} - \frac{11}{15}\right) \cdot \frac{5}{191}$; з) $11\frac{5}{9} \cdot 5\frac{2}{7} + 3\frac{5}{7} \cdot 11\frac{5}{9}$;

и) $3\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{12} + 1\frac{7}{12}\right)$; к) $5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{8} - 1\frac{3}{8}$.

Сосчитайте быстрее:

л) $\left(4\frac{1}{9} - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 2\frac{1}{4} + 2\frac{3}{4}$; м) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{3} : \frac{4}{3}$;

н) $11\frac{5}{9} \cdot 5\frac{2}{7} + 14\frac{6}{7} \cdot 2\frac{8}{9}$; о) $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) \cdot 10$; п) $11 \cdot \frac{3}{22}$;

р) $18 \cdot 5\frac{2}{3}$; с) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{14}{9}$; т) $\frac{17}{343} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{49}{68}$; у) $3\frac{3}{4} \cdot 4$.

Сосчитайте ещё быстрее:

ф) $13 \cdot 1\frac{7}{65}$; х) $8\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$; ц) $3\frac{5}{9} : (-4)$; ч) $-17 \cdot 2\frac{15}{68}$;

ш) $1\frac{7}{8} : 7$; щ) $196\frac{4}{5} : 4$.

II **191.** Продавала хозяйка на базаре яйца. Первому покупателю продала половину всех яиц и ещё пол-яйца, второму — половину всех оставшихся яиц и ещё пол-яйца, третьему — тоже половину всех оставшихся и ещё пол-яйца. И ничего у неё не осталось. Всем целые яйца достались. Сколько яиц продала хозяйка?

I **192.** Замените знак $*$ знаком равенства или неравенства так, чтобы полученное высказывание было верным:

а) $3 + \frac{1}{2} * 3 \cdot \frac{1}{2}$; б) $7 + 1\frac{1}{6} * 7 \cdot 1\frac{1}{6}$.

Составьте похожий пример.

II **193.** Вычислите:

а) $1\frac{1}{11} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)$; б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{11}$;

в) $2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$.

194. Найдите значение выражения «трижды три седьмых и семь».

195. Как изменится сумма двух чисел, если:

а) каждое из чисел умножить на $1\frac{1}{2}$;

б) из каждого числа вычесть $\frac{2}{3}$.

Проверьте себя 7

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\left(\frac{6}{7} - \frac{6}{11}\right) \cdot \frac{11}{12}$; б) $\left(5\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{2}{3}$;

в) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{13} \cdot \frac{6}{7} - \frac{6}{13} \cdot \frac{1}{7}$.

2. Найдите и исправьте ошибки:

а) $\frac{2}{5}\left(5 + \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5} \cdot 5 + \frac{3}{5}$; б) $\frac{2}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{7}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)$.

Вариант 2

Вычислите рационально:

1) $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35}$;

2) $3\frac{1}{115} \cdot 4\frac{1}{117} - 1\frac{1}{115} \cdot 5\frac{116}{117} - \frac{5}{117}$.

Вариант 3

Составьте три таких примера, в которых распределительный закон упрощает вычисления.

Все действия с рациональными числами

196. 1) Выполните действия:

а) $3\frac{1}{5} + 1\frac{4}{5} \cdot 5 - 2\frac{1}{5}$; б) $\left(3\frac{1}{5} + 1\frac{4}{5}\right) \cdot 5 - 2\frac{1}{5}$.

Что общего в этих примерах и чем они отличаются?
Расставьте в выражении $3\frac{1}{5} + 1\frac{4}{5} \cdot 5 - 2\frac{1}{5}$ скобки так, чтобы значение его: а) не изменилось; б) изменилось.

2) Расставьте в примерах скобки так, чтобы получились верные равенства:

а) $8 - 7\frac{1}{4} \cdot 10 - 8{,}5 = -56$; б) $8 - 7\frac{1}{4} \cdot 10 - 8{,}5 = -73$;

в) $8 - 7\frac{1}{4} \cdot 10 - 8{,}5 = \frac{9}{8}$.

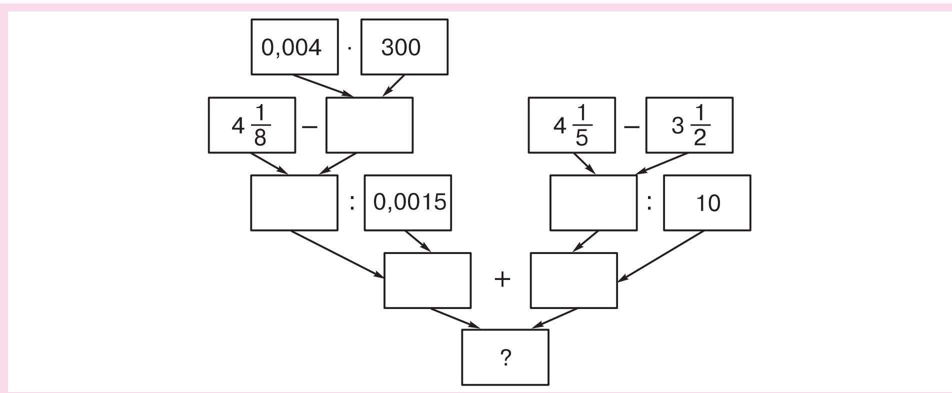
197. 1) *Если в выражении имеются только действия сложения и вычитания или только умножения и деления, то вычисления ведутся в порядке их записи, слева направо.*
Составьте два примера на это правило.

2) *Если в выражении имеются действия сложения, вычитания, умножения и деления, то сначала выполняются действия умножения и деления, а затем — сложения и вычитания (слева направо).*
Составьте два примера на это правило.

3) *Если в выражении имеются скобки, то в первую очередь выполняются действия в скобках.*

Составьте примеры.

198. 1) Дана схема вычислений.



Верно ли, что схема соответствует выражению

$$\left(4\frac{1}{8} - 0{,}004 \cdot 300\right) : 0{,}0015 + \left(4\frac{1}{5} - 3\frac{1}{2}\right) : 10\ ?$$

2) По выражению $1{,}456 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0{,}125 + 4\frac{1}{2} \cdot 0{,}8$ составьте схему и найдите значение этого выражения.

199. Решите примеры. Результаты промежуточных действий вы можете найти на плашке. Совпали ли они с вашими? Если нет, то найдите ошибки.

а) $\left(3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{6}\right) : 2\frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4} + 5\frac{1}{6}$;

$\frac{65}{12}$	$2\frac{1}{12}$	$5\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$

б) $\left(12 - 11\frac{4}{9}\right) \cdot 55{,}8 - 5\frac{4}{5} : (10 - 8{,}75)$;

31	1,25	26,36	$\frac{5}{9}$	4,64

в) $(204{,}02 : 40{,}4 - 3{,}2 \cdot 1{,}2) \cdot 6\frac{1}{2} + 7 : 2\frac{1}{3}$.

10,865	3,84	1,21	5,05	7,865	3

I **200.** Решите примеры:

а) $\left(\frac{1}{2} + 0{,}8 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(3 + 5\frac{8}{25} - 0{,}12\right)$;

б) $\left(2\frac{3}{4} + 0{,}15 - 1\frac{8}{25}\right) : \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} + 0{,}04\right)$;

в) $\left(2{,}314 - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{50} + \left(1\frac{11}{16} + 0{,}7125\right) : 3$.

Выпишите ответы всех примеров в строчку. Пользуясь ключом шифра, прочтите старинное русское слово.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ш	У	К	С	А	П	Ф	Л	Н	Ю

I **201.** Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}$; б) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$; в) $\dfrac{\frac{1}{2}}{5}$; г) $\dfrac{1}{\frac{2}{5}}$; д) $\dfrac{12}{\frac{4}{5}}$; е) $\dfrac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}}{\frac{3}{5}}$; ж) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3\frac{1}{2}}}$.

I **202.** Решите примеры, расположите ответы в порядке возрастания. Из соответствующих букв сложится слово. Так называлась в славянской азбуке-кириллице буква «Ф».

Т — $\left(-\frac{3}{8} - 2\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-1\frac{23}{25}\right)$;

Ф — $\left(5\frac{2}{3} - \left(-2\frac{1}{9}\right)\right) \cdot \left(-1\frac{7}{20}\right)$;

Е — $\left(-4\frac{3}{10} - \left(-5\frac{4}{15}\right)\right) \cdot \left(-2\frac{2}{29}\right)$;

Р — $\left(-7\frac{3}{16} - \left(-6\frac{5}{12}\right)\right) \cdot \left(-4\frac{4}{5}\right)$.

II **203.** Докажите, что значение выражения равно нулю:

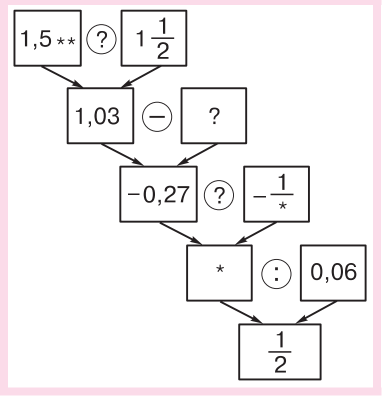
$$\frac{\left(1{,}24 - 1\frac{1}{25}\right) \cdot 2{,}5 - 0{,}5}{1{,}4 : 0{,}1 - 2}.$$

II 204. Выясните, имеет ли смысл выражение, и если да, то найдите значение этого выражения:

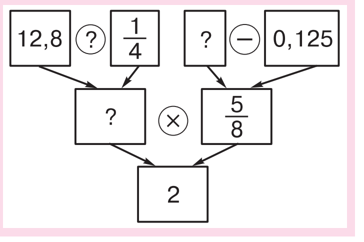
а) $\dfrac{14,5 \cdot 2,47}{\left(0,8-0,8 \cdot 2\frac{2}{3}\right) : 1,2+1\frac{1}{9}}$; б) $\dfrac{4,6 : 2-1}{\left(0,6-0,6 \cdot 1\frac{1}{6}\right) : 1\frac{1}{4}+0,008}$.

II 205. Восстановите пример, заполняя пропуски в схеме числами, знаками действий, цифрами. Числа и цифры внесите в прямоугольники, а знаки действий — в кружочки.

а)



б)



I 206. Найдите значения выражений:

а) $3a^2+\frac{1}{2}b$ при $a=-\frac{4}{5}$; $b=16\frac{4}{5}$; б) $\dfrac{2x-y}{x+3y}$ при $x=1\frac{1}{2}$; $y=-4\frac{2}{3}$.

II 207. Решите уравнения, подставляя вместо $*$ корень предыдущего уравнения:

а) $1\frac{1}{5}x-4=-4\frac{2}{5}$; б) $\dfrac{1,2}{x}=\dfrac{*}{3}$; в) $\dfrac{1,5}{x}=\dfrac{36}{*}$; г) $|3x+*|=0$;

д) $\frac{1}{2}a+2\frac{1}{60}+\frac{5}{6}a=*$; е) $0,08b+3\frac{1}{3}-*=4,08-\frac{b}{75}$;

ж) $2 \cdot \left(x-1\frac{1}{4}\right)+*=5 \cdot (x-0,5)$.

(Корнем последнего уравнения является число $-2\frac{1}{3}$.)

II 208. Вычислите:

а) $\left(\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{51}\right)\right) : 2\frac{16}{17}$;

б) $\left(\left(1,5-\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)\right) : 2\frac{4}{5}$;

в) $42\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4-17 \cdot 60$.

209. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $\dfrac{1{,}6 : \frac{1}{7} + 1\frac{1}{2} \cdot 7}{2\frac{7}{8} \cdot 14 + 4\frac{2}{3} \cdot 3}$;   б) $\dfrac{1\frac{43}{50} \cdot 3 - 58\frac{3}{5} \cdot 0{,}3}{8{,}62 \cdot \frac{3}{20} \cdot 8 - 7{,}62 \cdot 1{,}2}$.

210. 1) Докажите: $\dfrac{74 \cdot 147 - 73}{73 \cdot 147 + 74} = 1$.

2) Ученик начал решать предыдущую задачу так:

$$\frac{(73 + 1) \cdot 147 - 73}{73 \cdot 147 + 74} = \ldots .$$

Объясните и продолжите его решение.

3) Найдите значение выражения: $\dfrac{244 \cdot 395 - 151}{244 + 395 \cdot 243}$.

211. Докажите:

$$\left(17\frac{3535}{88375} - 16\frac{1001}{1365}\right) \cdot 3\frac{6}{23} + 3\frac{6}{23} : \left(5 - 1\frac{187}{253}\right) = 2.$$

212. Проверьте:

а) $\left(13\dfrac{6105}{11211} - 12\dfrac{9919}{18382}\right) : 1\dfrac{5}{1010 - 2\frac{6}{17}} \cdot \left(8 - 7\dfrac{2323}{4040}\right) = 0$;

б) $\dfrac{2\frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \left(1\frac{3}{4} + \frac{17 : 3125}{8 : 6250}\right)}{\left(2\frac{31}{42} + 1\frac{5}{16}\right) \cdot 6\frac{3}{43} + 5\frac{40}{43}} = 0$.

213. 1) Числитель дроби есть единица, а знаменатель — произведение двух последовательных натуральных чисел. Представьте эту дробь в виде разности двух дробей с числителями, равными единице.

2) Используя предыдущий результат, найдите сумму:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}.$$

3) Найдите сумму ста тысяч таких слагаемых:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{100000 \cdot 100001}.$$

4) Найдите сумму:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132}.$$

214. Вычислите:

а) $60 : \dfrac{(0{,}6 + 0{,}425 - 0{,}005) : 0{,}1}{6\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4} - 3\frac{1}{6} - 15\frac{1}{12}}$;

б) $\dfrac{\left(\frac{7}{2000}+0{,}0065\right):0{,}001}{\left(\frac{3}{3125}+0{,}00004\right)\cdot\frac{1}{0{,}0001}}$; в) $\frac{1}{3}:\dfrac{\left(\frac{1}{200}-0{,}425-\frac{3}{5}\right):0{,}01}{30{,}75+\frac{1}{12}+3\frac{1}{6}}:\frac{2}{3}$.

II **215.** Вычислите:

а) $\dfrac{3\frac{13}{15}:\frac{42}{45}+6\frac{53}{56}-2{,}375}{2{,}25+0{,}25\cdot 8\frac{3}{7}}\cdot\dfrac{6{,}5-2\frac{2}{3}-3\frac{5}{6}}{1\frac{1}{4}:3\frac{7}{12}\cdot 5\frac{1}{60}}$;

б) $\dfrac{\left(4\frac{4}{45}-5\frac{1}{15}\right)\cdot 30}{1\frac{1}{3}}-\dfrac{4{,}25:0{,}85+1:0{,}5}{(4{,}06-4{,}56):3}$.

Проверьте себя 8

Вариант 1

Вычислите:

1. $1,25:0,2+3\frac{3}{4}\cdot 5$;

2. $\dfrac{142,7\cdot 8\frac{1}{2}-4,27\cdot 85}{34\cdot 1\frac{47}{50}+3\frac{2}{5}\cdot 10\frac{3}{5}}$;

3. $\dfrac{24{,}8\cdot 0{,}7-5{,}48\cdot 7}{3,24\cdot 1{,}4+5{,}76\cdot 4\frac{2}{3}\cdot 0{,}3}$.

Можно решить три примера одним способом, а можно один пример — тремя способами. Каждое решение оценивается пятью баллами.

Вариант 2

1. Используя все десять цифр 0; 1;...; 9, составьте выражение, значение которого равно 1.
2. Расставьте знаки действий так, чтобы равенства были верными:

   а) $\frac{1}{2}\,\square\,\frac{2}{3}\,\square\,\frac{3}{4}=1$; б) $\frac{1}{2}\,\square\,\frac{2}{3}\,\square\,\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$;

   в) $\frac{1}{2}\,\square\,\frac{2}{3}\,\square\,\frac{3}{4}\,\square\,\frac{4}{5}\,\square\,\frac{5}{6}\,\square\,\frac{6}{7}\,\square\,\frac{7}{8}=1,5$.

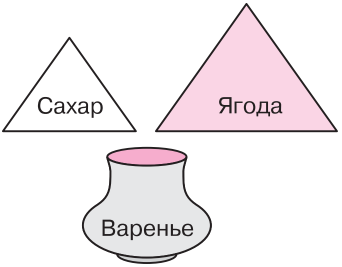
3. Найдите такие числа a и b, чтобы $a\cdot b=\frac{a}{b}=a+b$.

Вариант 3

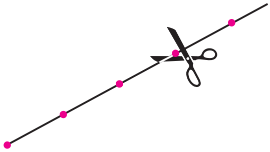
Составьте анкету, которая поможет понять, что общего у целых и рациональных чисел и чем они отличаются.

Отношения

216. 1) а)



б)



• каково отношение массы сахара к массе ягоды?

• каково отношение одного куска верёвки к другому куску?

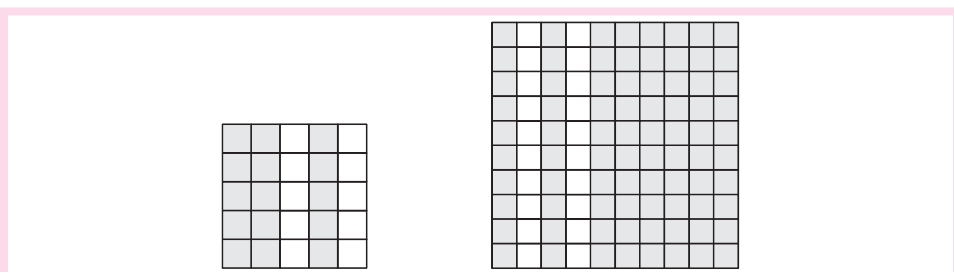
2) Изобразите отрезок, который разделён в соотношении: а) 1 : 3; б) 2 : 3; в) 3 : 4. Что означает на этих рисунках: $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{1}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$.

3) Найдите длину каждой части 12-метровой верёвки, которую разрезали на куски, находящиеся в отношении: а) 1 : 3; б) 3 : 7.

217. Размах крыльев альбатроса достигает 3 м, а размах крыльев одной из самых больших бабочек мира достигает 26 см. В каком отношении находятся размахи их крыльев?

218. Самый большой среди китов — синий кит — ежедневно съедает 4 т планктона. Найдите отношение массы съедаемого планктона к массе кита, если он весит 160 т. Ка-кую часть массы кита составляет съедаемый за неделю планктон?

219. 1) Верно ли, что на рисунке левый квадрат иллюстрирует отношение: а) 15 : 25; б) $\frac{3}{5}$?



2) Какие ещё отношения можно составить по данному рисунку?

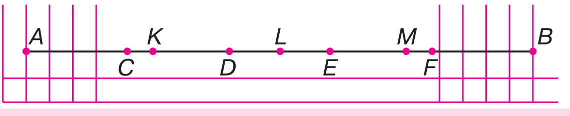
220. Для приготовления варенья взяли 3 кг сахара и 5 кг вишни. Найдите отношение массы сахара к массе вишни. Сколько сахара нужно взять для приготовления такого же варенья по этому рецепту из 15 кг вишни? Какие отношения можно записать по тексту задачи?

221. 1) Начертите отрезок AB. Отметьте на нем такую точку C, чтобы выполнялось условие:

а) $\frac{AC}{BC} = 1$; б) $\frac{AC}{BC} = 2$; в) $\frac{AC}{BC} < 1$; г) $\frac{AC}{BC} > 1$.

2) Отрезок AB разделён на части точками C, D, E, F, K, L, M так, что:

$$AC = CD = DE = EF = FB, \quad AK = KL = LM = MB.$$



Найдите отношения:

$$AC : AK, \quad AL : AM, \quad DL : DE, \quad CK : LM.$$

3) Назовите пары отрезков, про которые можно сказать, что: а) один составляет половину другого; б) один длиннее другого в 3 раза; в) один составляет от другого пятую часть; г) один содержится в другом 8 раз.

222. Начертите такой прямоугольник, чтобы:

а) длина прямоугольника относилась к ширине, как 5 : 2;

б) ширина прямоугольника составляла $\frac{5}{7}$ длины;

в) его длина была бы кратна ширине;

г) одна сторона прямоугольника была равна 2 см, а отношение полупериметра к этой стороне было равно $\frac{5}{4}$;

д) одна сторона прямоугольника была равна 2 см, а отношение полупериметра к другой стороне было равно $\frac{5}{3}$.

Всегда ли задача имеет единственное решение?

223. 1) Сплав состоит из меди и олова. Количество меди относится к количеству олова как 4 к 6. Покажите состав сплава на рисунке.

2) Нарисуйте два квадрата, стороны которых относятся как 3 : 1. Определите, как относятся их площади. А как относятся площади квадратов, стороны которых имеют отношение 2 : 5?

224. Укажите равные отношения. Обоснуйте выбор.

Группа А		Группа Б	
а) $48:32$;	ж) $2688:4480$;	1) $5:6$;	7) $9:2$;
б) $0{,}5:\frac{4}{8}$;	з) $0{,}3:9$;	2) $42:1$;	8) $65:72$;
в) $650:780$;	и) $\frac{5}{9}:\frac{8}{13}$;	3) $1:30$;	9) $3:2$;
г) $4\frac{1}{5}:\frac{1}{10}$;	к) $2{,}8:1{,}75$;	4) $3:5$;	10) $1:1$;
д) $\frac{3}{20}:\frac{7}{45}$;	л) $1{,}8:0{,}4$;	5) $27:7$;	11) $3:4$;
е) $6:7{,}9$;	м) $\frac{5}{14}:\frac{10}{21}$.	6) $60:79$;	12) $8:5$.

Пример 1. $0{,}3 : 9 = 3 : 90 = 1 : 30$.

Пример 2. $\frac{5}{14} : \frac{10}{21}$.

НОК$(14, 21) = 42$. $\left(\frac{5}{14} \cdot 42\right) : \left(\frac{10}{21} \cdot 42\right) = 15 : 20 = 3 : 4$.

225. Сделайте возможные упрощения в отношениях:

а) $1\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$; б) $3{,}6 : 0{,}12$; в) $1 : 0{,}008$; г) $\frac{8}{9} : \frac{4}{5}$; д) $8 : 2\frac{2}{3}$.

226. Отношение массы молока к массе содержащихся в нем сливок можно записать так: $25 : 1$, или $50 : 2$, или $100 : 4$. Что означают эти отношения?

227. 1) Напишите по три отношения, равных соответственно: 5; 6; $\frac{3}{4}$.

2) Для приготовления рассыпчатых каш жидкости берут примерно 1,5 л на 1 кг крупы. Для приготовления вязкой каши берут в среднем 3 л жидкости на 1 кг крупы. Какую кашу приготовили, если: а) на 0,5 кг риса взяли 1,5 л молока? б) на 2 кг гречки взяли 3 л воды? Какой вместимости нужно взять кастрюлю, чтобы сварить рассыпчатую кашу на 1,5 кг крупы?

228. В 6А классе из 24 учеников на оценку «4» и «5» выполнили задания 18 человек, а в 6Б классе из 28 учеников — 16 человек. Найдите в каждом классе отношение числа учеников, выполнивших задания на «4» и «5», к числу всех учеников. Сравните эти отношения.

229. Отношение числа мальчиков к числу девочек в классе равно $\frac{3}{4}$. Сколько в классе мальчиков, если: а) всего учащихся в классе 35 человек; б) девочек — 20; в) мальчиков меньше, чем девочек, на 5 человек? Составьте аналогичную задачу.

230. Всхожестью семян называется отношение количества проросших семян (давших всходы) к количеству посеянных.

1) Определите всхожесть семян, если из 400 семян проросло 320.
2) Для определения всхожести посеяли горох. Из 200 посеянных горошин взошло 170. Определите всхожесть гороха.
3) Огородник посеял все семена из пакетика, на котором было написано, что всхожесть семян составляет 0,8. Взошло 32 ростка. Надпись на пакетике подтвердилась в точности. Сколько семян было в пакетике?

231. Концентрацией раствора называется отношение растворённого вещества к количеству раствора. Например, для засолки огурцов в 2 л воды нужно растворить 50 г соли. Для того чтобы найти концентрацию соли в воде, необходимо найти отношение количества соли к количеству раствора соли. (Считать, что масса 1 л рассола равна 1 кг.)

Пример.

Количество раствора равно $2000 + 50 = 2050$ (г).

Концентрация раствора равна $\frac{50}{2050} = \frac{1}{41}$.

1) Сколько соли содержится в 4 л воды, если концентрация раствора соли равна $\frac{1}{20}$?
2) Найдите рецепт консервирования овощей и фруктов и узнайте, какая концентрация раствора соли должна получиться при использовании вашего рецепта.

232. Что означают записи $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{3}{1}$, если речь идёт: а) о результатах игры в хоккей с шайбой; б) о содержании веществ в растворе или сплаве?

Предложите свои ситуации для выяснения смысла этих записей.

233. Число 4800 разделите на такие две части, чтобы:

а) они находились в отношении $7 : 3$;
б) одна была меньше другой в 4 раза;
в) они относились бы между собой в отношении $\frac{2}{3} : 16$;
г) они находились в отношении, обратном отношению чисел 3 и 2;
д) одна равнялась $\frac{1}{5}$ другой.

При решении какой из этих задач можно использовать следующие записи:

$$(4800 : 10) \cdot 7 = 3360; \quad 3x + 7x = 4800?$$

234. Два числа находятся в отношении 7 : 3. Найдите оба числа, если известно, что: а) сумма этих чисел равна 90; б) разность этих чисел равна 36; в) первое число равно 35; г) второе число равно 21; д) одно число больше другого на 64.

235. Найдите числа, если известно, что:

а) два числа в сумме дают 105 и одно больше другого в $1\frac{1}{2}$ раза;

б) сумма двух чисел 36, а частное от деления большего числа на меньшее равно $3\frac{1}{2}$;

в) первое число больше второго на 25, а большее число относится к меньшему как $\frac{3}{2} : \frac{2}{3}$;

г) отношение двух чисел равно 5 : 8, второе число равно 40.

236. Два компаньона внесли в дело паевые деньги в отношении 5 : 9. Как им следует поделить выручку, составившую 70 тысяч рублей?

237. Начертите прямоугольники с периметром 24 см, чтобы их стороны относились как: а) 2 : 1; б) $\frac{3}{5}$; в) $2 : \frac{1}{2}$.

238. Для приготовления бронзы сплавляют медь, цинк и олово в отношении 17 : 2 : 1. Сколько каждого металла надо взять, чтобы получить 160 кг бронзы?

239. Участок земли площадью 280 га надо разделить на части так, чтобы одна из частей: а) составляла $\frac{2}{5}$ от другой; б) была в 3 раза больше другой; в) была на $\frac{1}{3}$ больше другой.

Какую площадь имеет каждый из получившихся участков?

240. В создании нового предприятия участвовали три коммерческие фирмы. При открытии каждая из них сделала определённый взнос:

- первая фирма — 750 тыс. рублей,
- вторая фирма — 500 тыс. рублей,
- третья фирма — 125 тыс. рублей.

Через некоторое время эта компания получила прибыль, и было решено распределить её между учредителями соответственно внесённому вкладу.

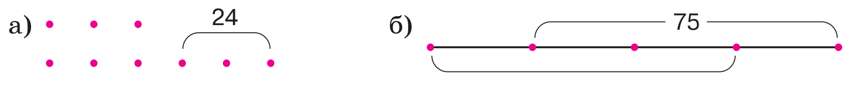
Выясните, сколько рублей получила каждая фирма, если прибыль предприятия составила 440 тыс. рублей.

241. Для приготовления 7 кг краски маляр смешал 3 части краски жёлтого цвета и 4 части краски синего цвета. Сколько килограммов краски каждого цвета потребовалось?

242. 1) Рукопись из 19 печатных листов отдали прочитать двум корректорам. Один из них прочёл 12 печатных листов, а другой — 7. За работу корректорам заплатили 4750 р. Сколько рублей получил каждый исполнитель?

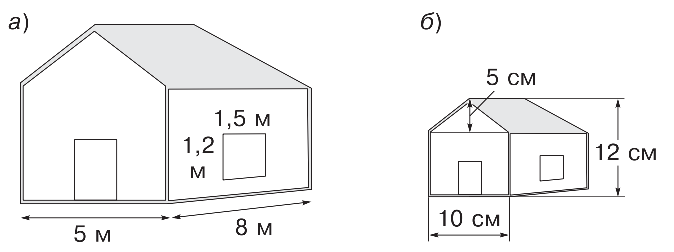
2) Отношение числа страниц, прочитанных первым корректором, к числу страниц, прочитанных вторым корректором, равно отношению 3 к 5. Сколько страниц прочитал первый корректор, если второй прочитал 225 страниц?

243. Придумайте задачу на пропорциональное распределение, чтобы при её решении можно было воспользоваться: 1) схемой а); 2) рисунком б); 3) уравнением $12x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x = 5585$.



Пропорции

244. На рисунке даны два макета одного и того же дома. На одном из них указаны его размеры в натуральную величину, а на другом — уменьшенные.



Ответьте на вопросы:

- какова высота дома на макете а)?
- какова длина дома на макете б)?
- каковы размеры окна дома на макете б)?
- каковы размеры мансарды дома на макете а)?

Выпишите отношения и пропорции, которые могут помочь решению задачи.

245. Запишите в виде пропорции: а) 12 так относится к 6, как 18 относится к 9; б) отношение 100 к 20 равно отношению 60 к 12; в) 0,2 составляет такую же часть от 10, какую 0,6 составляет от 30; г) 3,5 во столько же раз больше 2,5, во сколько раз 7 больше 5.

246. Прочтите пропорции разными способами:

а) $\frac{21}{7} = \frac{9}{3}$; б) $2 : 0{,}7 = 7 : 2{,}45$;

в) $10 : 100 = 0{,}01 : 0{,}1$; г) $18\frac{2}{7} : 2\frac{2}{7} = 72 : 9$.

247. Можно ли составить пропорцию из следующих пар отношений? Если можно, то составьте её. Укажите два способа поиска ответа на поставленный вопрос.

а) $16 : 4$ и $36 : 9$; б) $22 : 2$ и $121 : 11$; в) $1{,}2 : 4$ и $2{,}7 : 9$;

г) $1 : 0{,}2$ и $1{,}5 : 0{,}5$; д) $0{,}15 : 0{,}18$ и $0{,}1 : 0{,}12$;

е) $\frac{1}{3} : 4$ и $2{,}7 : 9$; ж) $\frac{3}{4} : \frac{3}{2}$ и $\frac{5}{6} : \frac{5}{3}$; з) $1\frac{1}{2} : 5$ и $\frac{3}{5} : 2$.

248. 1) Как бы вы ответили на вопрос: верно ли равенство

$$4{,}8 : 0{,}02 = 10{,}5 : 0{,}04375?$$

Сравните своё решение со следующими:

Решение 1.
$4{,}8 : 0{,}02 = 480 : 2 = 240$;
$10{,}5 : 0{,}04375 = 240$;
$240 = 240$, следовательно,
$4{,}8 : 0{,}02 = 10{,}5 : 0{,}04375$.

Решение 2.
$\frac{48}{0{,}02} = \frac{10{,}5}{0{,}04375}$;
$4{,}8 \cdot 0{,}04375 = 0{,}21$;
$10{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}21$, следовательно,
$4{,}8 : 0{,}02 = 10{,}5 : 0{,}04375$.

2) Придумайте и запишите своё верное равенство.

249. Составьте пропорции по условию:

а) крайние члены пропорции равны 12 и 7, а один из средних членов пропорции равен 21;
б) средние члены пропорции равны 10,5 и 12, а один из крайних членов равен 6.

250. К трём данным числам a, b, c подберите четвёртое число d так, чтобы выполнялась пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

а) $a = 20$, $b = 5$, $c = 7$; б) $a = 10$, $b = 16$, $c = 3$;

в) $a = 7\frac{1}{2}$, $b = 25\frac{1}{2}$, $c = 6$.

Ⅰ **251.** Даны три отрезка $a = 2$ см, $b = 2{,}6$ см, $c = 3$ см. Постройте такой четвёртый отрезок d, чтобы можно было составить пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ⅱ **252.** Дан прямоугольник со сторонами $a = 3$ см и $b = 4$ см. Постройте другой прямоугольник со сторонами c и d так, чтобы одна из его сторон была больше стороны b на 2 см и при этом выполнялась бы пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Сколько решений имеет задача?

Ⅰ **253.** Решите пропорции:

а) $75 : 9 = x : 9$; б) $3{,}1 : 0{,}3 = x : \frac{7}{9}$; в) $0{,}25 : 1{,}4 = 0{,}75 : x$;

г) $\frac{x}{75} = \frac{7}{3}$; д) $\frac{3{,}5}{8{,}4} = \frac{x}{4{,}5}$; е) $0{,}8 : 2{,}5 = x : 1{,}5$;

ж) $\frac{2}{x} = \frac{y}{6}$; з) $3 : x = x : 12$.

Ⅱ **254.** 1) Дана пропорция $16 : 8 = 130 : 65$. Выясните, получится ли вновь пропорция, если:

а) поменять местами средние члены данной пропорции;
б) поменять местами крайние члены этой пропорции;
в) переставить одновременно крайние и средние члены данной пропорции;
г) увеличить в три раза оба члена отношения, находящиеся в левой части данного равенства;
д) уменьшить в пять раз оба члена отношения, записанного в правой части данного равенства;
е) увеличить в два раза предыдущие члены обоих отношений;
ж) уменьшить в четыре раза последующие члены обоих отношений пропорции;
з) увеличить в полтора раза первый крайний и второй средний члены пропорции;
и) увеличить все члены пропорции в три раза.

Сформулируйте полученные результаты для пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

2) Верно ли, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$?

Ⅰ **255.** Составьте различные пропорции, используя равенство произведений:

а) $5 \cdot 14 = 35 \cdot 2$; б) $2{,}5 \cdot 0{,}018 = 0{,}15 \cdot 0{,}3$; в) $1\frac{1}{2} \cdot 8\frac{3}{4} = 3\frac{1}{3} \cdot 3\frac{15}{16}$.

256. Составьте различные пропорции, используя данные пропорции:

а) $\frac{8}{15} = \frac{4,8}{9}$; б) $\frac{7}{7} = \frac{5,25}{6}$; в) $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, или $3 : 4 = 15 : 20$.

257. Длина яхты равна 8 м, высота мачты — 12 м. Мальчик делает модель яхты длиной 40 см. Какой высоты мачту ему следует изготовить?

Отличается ли ваше решение от следующих?

Решение 1.

1) $800 : 40 = 20$ — во столько раз длина яхты больше длины модели яхты;
2) $1200 : 20 = 60$ (см) — высота мачты в модели яхты.

Решение 2.

Пусть x см — высота мачты модели яхты. Тогда условие задачи можно представить так:

800 см — 1200 см;
40 см — x см.

Отношение $\frac{800}{40}$ показывает, во сколько раз длина яхты больше длины модели яхты. Во столько же раз высота мачты яхты больше высоты мачты в модели яхты. Отношение этих высот: $\frac{1200}{x}$. Поэтому можно составить равенство отношений $\frac{800}{40}$ и $\frac{1200}{x}$. Получим пропорцию $\frac{800}{40} = \frac{1200}{x}$.

$800 \cdot x = 40 \cdot 1200$;
$x = 40 \cdot 1200 : 800$;
$x = 60$.

Ответ: высота мачты в модели яхты 60 см.

Можно ли было для решения задачи составить такую пропорцию: $\frac{800}{1200} = \frac{40}{x}$?

Если да, то обоснуйте эту пропорцию.

258. Диаметр глобуса равен 40 см, диаметр Земли — 12 000 км. Определите расстояние от Новосибирска до Москвы, если на глобусе эти города разделены расстоянием 10 см.

259. Чтобы получить голубую краску, маляр смешал 6 л синей и 14 л белой краски. Сколько синей краски нужно добавить к 35 л белой краски, чтобы получить голубую краску такого же оттенка?

260. Из 24 кг молока получается 3 кг сливок, из 20 кг сливок — 4 кг сливочного масла, а из 12 кг сливочного масла — 9 кг топлёного масла. Сколько килограммов топлёного масла можно получить из 2400 кг молока?

I **261.** Для покрытия пола требовалось 39 м линолеума шириной 0,9 м, но на складе линолеума такой ширины не оказалось. Было предложено взять линолеум на 0,25 м уже. Сколько метров узкого линолеума требуется для покрытия данного пола?

I **262.** Три комбайна могут за 10 ч убрать картофель с 12 га. За сколько часов 10 комбайнов уберут картофель с 60 га?

I **263.** Придумайте задачу, которая бы решалась с помощью пропорции. Предложите кому-нибудь решить её и проверьте правильность решения.

II **264.** Знакомо ли вам слово «масштаб»? Знаете ли вы, что оно означает? Предлагаем вам посмотреть словари, справочники, энциклопедии, школьные учебники по географии и математике и выписать разные сведения об этом понятии. Используя полученную информацию, подготовьте сообщение, или напишите реферат, или разработайте сценарий урока, который можно озаглавить так:

- «О дружбе двух понятий: «пропорция» и «масштаб».
- «Где встречаются вместе пропорция и масштаб».
- «Тема «Масштаб» в школьном учебнике математики».
- «Пропорция и масштаб в архитектуре».
- «Когда не обойтись без масштаба и пропорций».

Можно предложить и защитить любые другие темы, посвящённые изучению пропорций.

I **265.** Прочтите задачи:

1) Какой путь проедет поезд за 2 ч 40 мин, если, двигаясь с постоянной скоростью, он проезжает 240 км за 1 ч 20 мин?
2) Стоимость подписной цены на газету за 2 месяца — 32 р., а за 6 месяцев — 96 р. Найдите стоимость подписки за год.
3) Для варки варенья из жимолости на 5 кг ягод берут 7,5 кг сахара. Сколько килограммов сахара потребуется на 7 кг ягод?
4) Дюжина тюльпанов стоит 360 рублей. Сколько нужно заплатить за 15 тюльпанов?
5) Некто получил за работу, выполненную им за 6 ч, 600 р. Сколько он получит за сорокачасовую рабочую неделю?
6) Поезд, скорость которого 60 км/ч, затратил на некоторый отрезок пути 3,5 ч. За сколько часов проедет этот же путь поезд, скорость которого 70 км/ч?

7) Оркестр, состоящий из 120 музыкантов, играет симфонию в течение 40 мин. Сколько минут будут играть эту же симфонию 40 музыкантов?
8) На 60 р. некто решил купить несколько бутылок минеральной воды. Как зависит количество бутылок, которое он сможет купить, от цены одной бутылки минеральной воды?

Назовите величины, которые встречаются в каждой из приведённых выше задач. Попытайтесь описать зависимость между ними, используя выражения:

↑↑ чем больше ..., тем больше;
↑↓ чем больше ..., тем меньше;
↓↓ чем меньше ..., тем меньше;
↓↑ чем меньше ..., тем больше.

Что у вас получилось?

Две величины называются прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Две величины называются обратно пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая уменьшается во столько же раз.

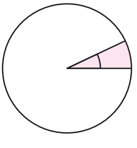
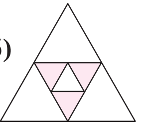
Решите сформулированные задачи, составляя пропорции, и укажите, о каких величинах — прямо пропорциональных или обратно пропорциональных — идёт речь в этих задачах.

II **266.** Предлагаем вам составить несколько задач на использование прямо пропорциональных и обратно пропорциональных величин.

Проверьте себя 9

Вариант 1

1. Каково отношение закрашенной площади фигуры к незакрашенной?

а)  б) 

2. Выберите отношения, из которых можно составить пропорции:

$$\frac{36}{18};\quad \frac{1}{3}:\frac{1}{2};\quad \frac{0{,}08}{0{,}12};\quad 2:\frac{1}{2};\quad \frac{30}{20}.$$

3. Дан прямоугольник со сторонами 10 см и 12 см. Постройте прямоугольники, стороны которых пропорциональны сторонам данного прямоугольника, если одна из сторон равна 8 см.

Вариант 2

Используя числа 3, 8, 6, 16 и знаки действий, составьте не менее 20 пропорций (например, $\frac{3+8}{3-8} = \frac{6+16}{6-16}$).

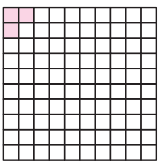
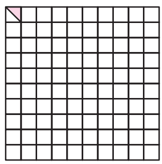
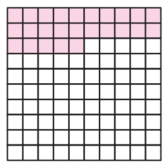
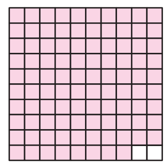
Составьте правила получения новых пропорций, исходя из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Вариант 3

Подготовьте иллюстрации на тему «Пропорции».

Проценты

267. Рассмотрите модели:

а)  б)  в)  г) 

Изучите образец заполнения таблицы.

Модель	**Дроби**		**Отношение**	**Процент закрашенной фигуры**
	обыкновенные	**десятичные**		
а)	$\frac{3}{100}$	0,03	3 : 100	3%

Продолжите таблицу для моделей б) в) г) и случаев, когда закрашенная часть составляет от всей площади: д) 75%; е) $\frac{2}{5}$; ж) 2,5; з) 3 : 20. Предложите свои примеры.

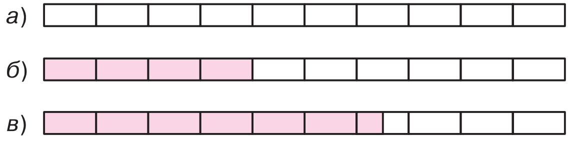
268. Постройте отрезок длиной 10 см. Изобразите отрезок, составляющий:

а) 50%; б) 25%; в) 75%; г) 40%; д) 10%;

е) 5%; ж) 100%; з) 120% от данного.

Как вы можете проверить правильность проведённых построений?

269. Сколько процентов полоски закрашено? Сколько процентов полоски не закрашено?



270. 1) 6 р. от 100 р. составляют 6%, так как $6 : 100 = 0{,}06 = 6\%$. Найдите, сколько процентов составляют:

а) 15 р. от 100 р.; 90 р. от 100 р.;
б) 5 м от 100 м; 14 м от 100 м.

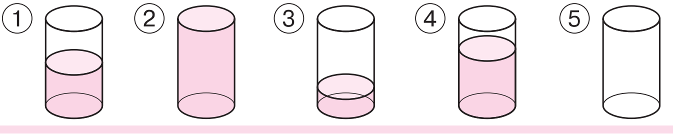
2) 6 р. от 200 р. составляют 3%, так как $\frac{6}{200} = \frac{3}{100} = 3\%$. Сколько процентов составляют:

а) 10 р. от 200 р.; 4,8 р. от 200 р.;
б) 4 км от 800 км; 1 м от 1 км?

3) 1% от 100 р. составляет 1 р., так как $\frac{100\text{ р.}}{100} = 1$ р.
5% от 100 р. составляют 5 р., так как $1\text{ р.} \cdot 5 = 5$ р.
1% от 125 р. составляет 1,25 р., так как $\frac{125\text{ р.}}{100} = 1{,}25$ р.

а) Сколько составит 1% от: 200 р., 75 р., 5 р., 250 р., 20 р., 1 р.; 1 м, 3 м, 1 км, 30 см, 43 м; 360°?
б) Сколько составят 3% от: 200 р.; 1000 р.; 20 р.?
в) Сколько составят 12% от: 200 р.; 1000 р.; 40 р.?
г) Сколько составят 4% от: 8 м; 1 км; 5 дм?

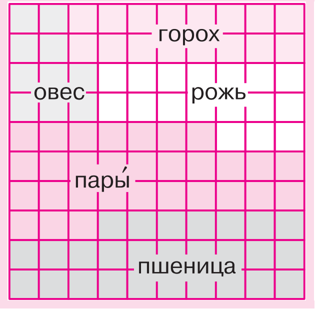
271. Установите соответствие между рисунками и подписями к ним и заполните таблицу:



а) стакан заполнен наполовину; б) стакан заполнен на три четверти; в) стакан полный; г) стакан заполнен на четверть; д) стакан пустой; е) стакан заполнен на 100%; ж) стакан заполнен на 25%; з) стакан заполнен на 50%; и) стакан заполнен на 75%; к) стакан заполнен на 0%.

Стакан	Обыкновенная дробь	Проценты
1	$\frac{1}{2}$	50%
2		
3		
4		
5		

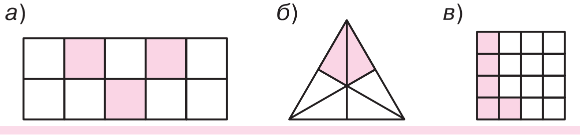
272. Сколько процентов от одного часа составляют: а) 30 мин; б) 15 мин; в) 1 мин; г) 42 мин; д) 57 мин; е) 30 мин; ж) 2 ч; з) 100 мин?



273. 1) Запишите, какую часть от площади всего участка составляет площадь каждого поля, используя: а) десятичные дроби; б) обыкновенные дроби; в) проценты.
Какой процент составляет площадь поля, засеянного овсом, от площади поля, засеянного горохом?

2) $\frac{1}{2}$ поля засеяна пшеницей; 3% поля засеяно горохом; 0,12% — овсом; 30% — рожью. Какая культура занимает самую большую площадь?

274. Определите, какая часть фигуры закрашена:



Запишите ответ, используя проценты.

275. 1) Рассмотрите примеры представления процентов в виде десятичных дробей и обыкновенных дробей:

а) $45\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$; б) $45\% = 45 : 100 = 0{,}45$;

в) $45\% = 45 \cdot 0{,}01 = 0{,}45$;

г) $\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3} : 100 = \frac{1}{300}$; д) $\frac{1}{3}\% = 0{,}00(3)$.

2) Представьте проценты в виде обыкновенных дробей и десятичных дробей:

а) 8%; 12%; 47%; б) 100%; 200%; 350%;

в) 0,1%; 0,5%; 0,82%; г) 45,62%; 50,445%;

д) $\frac{1}{2}$%; $\frac{3}{4}$%; $\frac{6}{5}$%.

3) Представьте проценты в виде отношений:

а) 69%; 98%; 684%; 1010%; 0,84%;

б) 0,991%; 700,4%; $3\frac{5}{8}$%; $36\frac{7}{9}$%.

4) Сформулируйте правила представления процентов в виде дробей и отношений. Были ли среди правил такие:
- чтобы выразить проценты в виде дроби, нужно число процентов разделить на 100;
- чтобы выразить проценты в виде десятичной дроби, достаточно число процентов умножить на 0,01;
- чтобы выразить проценты в виде отношения, нужно составить отношение, где предыдущим членом является число процентов, а последующий член равен 100.

I **276.** Рассмотрите представление дробей в виде процентов и объясните предложенные решения.

1) $\frac{2}{25}$: а) $\frac{2}{25} = \frac{2 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{8}{100}$, $\frac{2}{25} = 8\%$;

б) $\frac{2}{25} = 2 : 25 = 0{,}08$, $0{,}08 : 0{,}01 = 0{,}08 \cdot 100 = 8$, $\frac{2}{25} = 8\%$;

в) $\frac{2}{25} = \frac{n}{100}$, $25n = 200$, $n = 8$, $\frac{2}{25} = 8\%$.

2) $1\frac{7}{20}$: а) $1\frac{7}{20} = \frac{27 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{135}{100}$, $1\frac{7}{20} = 135\%$;

б) $1\frac{7}{20} = 1 + \frac{7}{20}$, $1 = 100\%$,

$\frac{7}{20} = 35\%$, $1\frac{7}{20} = 100\% + 35\% = 135\%$;

в) $1\frac{7}{20} = 27 : 20 = 1{,}35$, $1\frac{7}{20} = 135\%$;

г) $\frac{27}{20} = \frac{n}{100}$, $20n = 2700$, $n = 135$, $1\frac{7}{20} = 135\%$.

3) 0,17: а) 0,17 = 17 сотых = 17%;

б) $0{,}17 \cdot 100 = 17\%$;

в) 0,1 = 0,10 = 10%.

4) Запишите обыкновенные дроби в виде процентов:

а) $\frac{1}{20}$; б) $\frac{3}{25}$; в) $\frac{17}{5}$; г) $\frac{3}{4}$;

д) $\frac{111}{100}$; е) $\frac{27}{900}$; ж) $\frac{22}{200}$; з) $\frac{7}{125}$.

5) Запишите десятичные дроби в виде процентов:

а) 0,45; 0,07; 0,35; 0,76; 0,94;

б) 0,1; 0,3; 0,6; 0,8; 0,9;

в) 1; 1,06; 2,3; 5,63; 12,87;

г) 0,134; 1,583; 3,1414; 7,0757; 75,0004.

6) Запишите смешанные числа в виде процентов: а) $1\frac{1}{2}$; б) $2\frac{3}{4}$; в) $6\frac{1}{3}$; г) $13\frac{3}{5}$.

Сформулируйте правила перевода десятичных и обыкновенных дробей в проценты. Сравните их со следующим:

Чтобы дробь выразить в процентах, нужно эту дробь умножить на 100 и приписать знак «%».

I **277.** 1) Проверьте записи, если имеются ошибки, то исправьте их:

а) $26\% = \frac{1}{26}$; б) $0{,}21 = 21\%$; в) $\frac{4}{5} = 80\%$; г) $45\% = 0{,}45$;

д) $\frac{34}{100} = 34\%$; е) $\frac{1}{4} = 2{,}5\%$; ж) $120\% = 240$; з) $\frac{12}{100} = 1{,}2\%$;

и) $\frac{41}{10} = 41\%$; к) $20\% = \frac{7}{35}$; л) $57\% = 0{,}57$; м) $35\% = 3{,}5$;

н) $36\% = 0{,}036$; о) $10 : 20 = 60\%$; п) $7 : 35 = 20\%$; р) $40\% = 32 : 8$.

Какие ошибки могут появиться при переводе процентов в дроби и дробей в проценты? Почему могут возникнуть эти ошибки? Как их предотвратить?

2) Представьте отношения в виде процентов: а) 1 : 2; б) 3 : 2; в) 1 : 1; г) 3 : 4; д) 1 : 10.

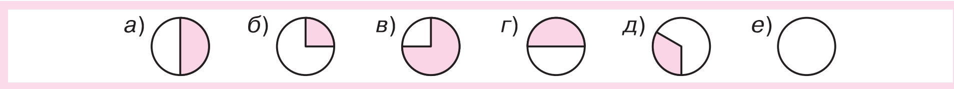
I **278.** Расположите в порядке возрастания:

а) 5%; б) 1,2; в) $\frac{10}{25}$; г) 130%; д) $\frac{3}{10}$;

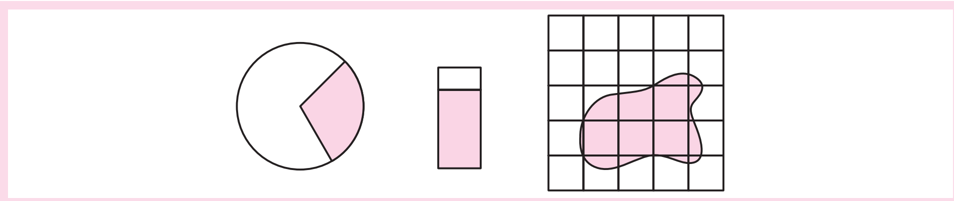
е) 50%; ж) 0,1; з) $\frac{1}{4}$; и) 0,3%; к) 97.

I **279.** Изобразите: а) 25% круга; б) 75% прямоугольника; в) 100% квадрата; г) 50% угла; д) 33% прямоугольника; е) $\frac{3}{4}$ круга; ж) 125% квадрата.

II **280.** 1) Какая часть круга закрашена? Подпишите рисунки с использованием процентов.



2) Определите, какой примерно процент площади фигуры закрашен.



3) Сделайте иллюстрации к записям: а) ≈49%; б) ≈30%; в) ≈97%; г) ≈152%.

II **281.** Рассмотрите шахматную доску и определите, сколько процентов составляют чёрные клетки. Можно ли определить «вес» одной клетки шахматной доски в процентах?

I **282.** В 6А классе из 30 человек задание выполнили 24 человека, а в 6Б из 28 человек задание выполнил 21 человек. Каков процент учащихся, выполнивших задание, в каждом классе?

I **283.** Нарисуйте квадрат 10×10. Закрасьте 24% синим цветом, 27% красным, 35% зелёным и 14% чёрным. Остались ли незакрашенные участки квадрата?

I **284.** Ответьте на следующие вопросы, если возможно:

1) Папа получил премию, 60% которой он потратил на подарок маме, 40% — на подарки детям. Остались ли у папы деньги от премии?
2) 25% учащихся школы соревновались в беге, а 73% учащихся школы пришли за них болеть. Сколько процентов учащихся школы было на соревнованиях? Можно ли сказать, что на соревнованиях была вся школа?
3) Сколько учащихся сдавало зачёт, если положительные оценки получили 82% сдававших?
4) Можно ли считать, что фразы «Яблоки при сушке теряют 74% веса» и «Яблоки при сушке сохраняют 26% веса» описывают одну и ту же ситуацию?

I **285.** За первый день работы ученики на пришкольном участке выполнили 22% недельного задания. Справятся ли они с недельным заданием при той же производительности труда: а) за 5 дней; б) за 4 дня?

II **286.** Чему равно число, составляющее 100%, если: а) 1% его составляет 7; б) 1% его составляет 4,1; в) 1% его составляет 320; г) 1% его составляет $\frac{4}{5}$; д) 1% его составляет $8\frac{2}{3}$; е) 1% его составляет 0,00037; ж) 50% его составляют 28; з) 20% его составляют 16,2; и) 60% его составляют 48; к) 150% его составляют 450; л) 200% его составляют 3500; м) 300% его составляют 39; н) 1000% его составляет 400; о) 500% его составляют 250?

I **287.** Рассмотрите задачи и выясните, какие из них содержат недостающие данные; противоречивые данные.

1) Туристы были в походе 3 дня. В первый день они прошли 40% всего намеченного пути, во второй — $\frac{1}{4}$ пути.

Сколько процентов всего пути осталось пройти туристам в третий день?

2) Туристы были в походе 3 дня. В первый день они преодолели 63% всего намеченного пути, в третий день — 0,37 пути. Сколько процентов всего пути прошли туристы во второй день? Каков весь путь, проделанный туристами?

3) Туристы проехали 150 км. Электричкой они проехали 70% всего пути, автобусом — $\frac{2}{3}$ оставшегося, а по озеру проплыли 20 км. Сколько километров проехали туристы автобусом?

4) Площадь леса 420 га. Сосны занимают 63,5%, ели — 29%. Сколько процентов занимают деревья других пород?

5) Командам, занявшим призовые места, выдали премию в 500 р. Команда, занявшая I место, получила 60% премии, команда, занявшая II место, получила 125 р., а команда, занявшая III место, получила оставшиеся 20% премии. Сколько денег получила команда, занявшая III место?

I **288.** Скорость велосипедиста на 100% больше скорости пешехода. Скорость пешехода 5 км/ч. Какова скорость велосипедиста?

I **289.** 1) Цена снизилась в два раза. На сколько процентов снизилась цена? Сделайте рисунок.

2) Цена возросла вдвое. Сколько процентов составляет новая цена от старой? На сколько процентов возросла цена? Сделайте рисунок.

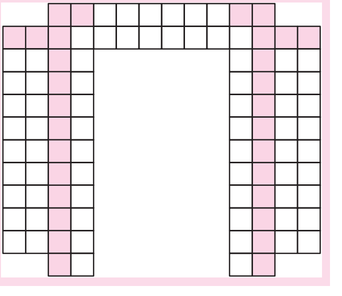
290. Во сколько раз уменьшилась стоимость товара, если она понизилась на: а) 80%; б) 75%; в) 60%?

291. Известно, что число a больше числа b в 2 раза. Сколько процентов составляет число a от числа b? Сколько процентов составляет число b от числа a? Какую величину вы обозначите за 100% в каждом случае?

292. Представьте себе, что вы оказались в стране, где жители не пользуются процентами. Стали бы вы объяснять, что такое процент? Если да, то как бы вы стали это делать?

Проверьте себя 10

Вариант 1

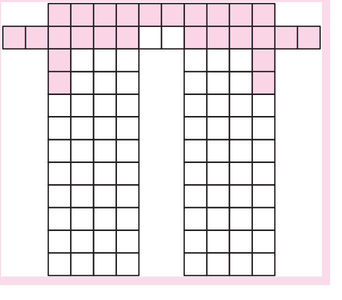


1. Сколько процентов от фигуры составляют закрашенные квадратики? Сколько квадратиков ещё нужно закрасить, чтобы можно было сказать: «Закрашено 50% фигуры»?
2. Расположите в порядке возрастания:
   $\frac{1}{3}$; 110%; 0,16%; 1%; $\frac{3}{7}$; $1\frac{1}{2}$; 44%.

Вариант 2

1. Сочините рассказ на тему «Проценты в нашей жизни».
2. Придумайте задачи на проценты с использованием следующих данных: $\frac{3}{5}$ всего поля засеяли кукурузой.

Вариант 3



1. Что нужно сделать с рисунком, чтобы закрашенная часть уменьшилась на 50%?
2. Сравните числа A, B и C, если: а) 100% числа A равны 208; б) 25% числа B равны 57; в) 119% числа C равны 238.
3. Во время весенней распродажи кассет в одном магазине обещали скидку в 20%, в другом магазине обещали каждую вторую кассету продавать в 2 раза дешевле. В каком магазине выгоднее купить 2 кассеты, если до распродажи они стоили одинаково?

Решение задач на процентные расчёты

Проценты широко используются в современной жизни для сравнения различных величин (качество успеваемости, уровень заболеваемости гриппом, налоги, банковские кредиты, повышение и понижение цен и так далее). В этих ситуациях возникают разнообразные задачи, связанные с процентными расчётами

Поговорим о самых простых типах таких задач. Их всего три:

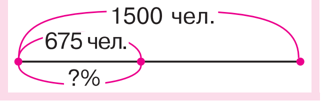
- нахождение процентного отношения двух чисел;
- нахождение процентов данного числа;
- нахождение числа по его процентам.

Задача о нахождении процентного отношения двух чисел

«В некоторой школе 1500 учеников. Из них 675 учатся на «4» и «5». Найди отношение числа учеников, которые учатся на «4» и «5», к числу всех учеников школы. Вырази это отношение в процентах».

Отношение числа a к числу b, выраженное в процентах, называют **процентным отношением чисел a и b.**

Значит, вопрос задачи можно сформулировать так: «Найди процентное отношение числа учеников, которые учатся на «4» и «5», к числу всех учеников школы».



Другими словами: «Сколько процентов составляют школьники, которые учатся на «4» и «5», от всех учащихся школы?»

Эту задачу можно решить по-разному.

Способ 1.

$1500:100 = 15$ (чел.) — столько учащихся, приходится на 1% всех учащихся школы.

$675:15 = 45(\%)$ — столько процентов школьников учится на «4»и «5».

Способ 2.

$\frac{675}{1500}$ — отношение хорошо успевающих учащихся ко всем учащимся школы.

$\frac{675}{1500} \cdot 100\% = 45(\%)$ — процентное отношение тех, кто учится на «4»и «5»,ко всем учащимся школы.

Способ 3.

675 чел. — $p\%$,

1500 чел. — 100%.

Составим пропорцию и найдём её неизвестный член:

$$\frac{675}{1500} = \frac{p}{100};$$

$$p = \frac{675 \cdot 100}{150} = 45\%.$$

Ответ: 45% школьников учится на «4»и «5».

Какой способ выбрать для решения такого типа задач — дело самого решающего.

Теперь разберитесь с ещё одной задачей:

«Из 4100 рублей было удержано в качестве подоходного налога 533 рубля. Какой процент от заработанной суммы составляет подоходный налог?»

Ответьте на следующие вопросы о способах решения задач.

- Находили ли вы, решая задачу, один процент от заданного количества? Если да, то объясните, в чем вы видите пользу такого шага в решении?
- Составляли вы, решая задачу, отношение и выражали его в процентах?
- Какую часть составляет подоходный налог от всей заработанной суммы?
- Использовали вы пропорцию? Если да, то какие отношения вы при этом составляли?

В задаче о школьной успеваемости возникло отношение $\frac{675}{1500}$ — отношение количества учащихся, которые учатся на «4» и «5», к количеству всех учащихся школы. Оно показывает, какую часть число 675 составляет от числа 1500.

Продолжи фразы:

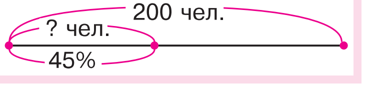
«В задаче о подоходном налоге возникло отношение $\frac{533}{4100}$ — отношение... Оно показывает...»

Составьте задачу о нахождении процентного отношения двух чисел и решите её.

Запишите выражение для нахождения отношения числа a к числу b в процентах.

Задача о нахождении процентов от числа

«В школе 200 учеников, из них 45% учатся на «4» и «5». Сколько школьников учатся на «4» и «5»?»



Объясните предложенные способы решения данной задачи:

Способ 1.

1) $200 : 100 = 2$ (ученика); 2) $2 \cdot 45 = 90$ (школьников).

Способ 2.

1) $45\% = \frac{45}{100}$; 2) $200 \cdot \frac{45}{100} = 90$ (школьников).

Способ 3.

a чел. — 45%;

200 чел. — 100%;

$$\frac{a}{200} = \frac{45}{100};$$

$$a = \frac{45 \cdot 200}{100} = 90.$$

Ответ: 90 школьников учатся на «4» и «5».

Составьте задачу о нахождении процентов от данного числа.

Запишите выражение для нахождения $p\%$ от данного количества a.

Задача о нахождении числа по его процентам

«В школе 120 учеников принимают участие в математической игре «Кенгуру», что составляет 60% от числа всех учащихся школы. Сколько школьников учится в этой школе?»

Продолжите начатые решения данной задачи:

Способ 1.

1) $120 : 60 = 2$ (ученика); 2) ...

Способ 2.

1) $60\% = \frac{60}{100}$; 2) $120 : \ldots = \ldots$ (учеников).

Способ 3.

1) 120 чел. — 60%; b — 100%.

2) Составим пропорцию и найдём её неизвестный член:

$$\frac{120}{b} = \frac{60}{100}; \quad b = \ldots$$

Способ 4.

x учеников — учатся в школе;

$0{,}6x$ учеников — участвуют в игре «Кенгуру».

По условию задачи это количество равно 120 учащимся. Составим уравнение:

$$\ldots$$

$$x = 200.$$

Ответ: В данной школе учатся 200 учеников.

Составьте задачу, в которой нужно найти число по данным его процентам.

Запишите выражение для нахождения числа по данным его процентам.

Обобщим решения основных трёх типов задач на процентные расчёты.

- Можно ли по условию каждой из рассмотренных задач составить равенство:

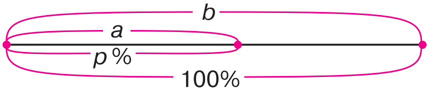
$$\frac{a}{b} = \frac{p}{100}?$$

Если да, то что означают буквы a, b, p для каждого типа задач? Выразите из этого равенства a, b, p. Расскажите, как связаны полученные формулы с решениями задач.

- Соотнесите формулы

$$p = \frac{a \cdot 100}{b}; \quad a = \frac{b \cdot p}{100}; \quad b = \frac{a \cdot 100}{p}$$

с типами задач на процентные расчёты.



- Составьте 6 задач на процентные расчёты.

I **293.** Куриное яйцо весит 60 г, а его скорлупа — 3 г. Напишите отношение веса скорлупы к весу всего яйца. Выразите это отношение в процентах.

I **294.** На шоколадке написано, что 100 г продукта содержит: белков 9,1 г; жиров 35,7 г; углеводов 47,0 г. Каково процентное содержание каждого из этих веществ в 100 г? Сколько процентов белков содержится в такой же шоколадке массой 50 г?

I **295.** В магазине конструктор стоил 170 р. После объявления распродажи его цена уменьшилась до 119 р. Сколько процентов составляет новая цена от первоначальной?

I **296.** Подсчитайте, сколько процентов от суток вы: а) тратите на сон; б) разговариваете по телефону; в) обедаете; г) готовите домашнее задание; д) смотрите телевизор.

II **297.** Число a может принимать значения: 1; 2; 4; 5; 8; 10; 14; 16; 20. Число b равно 8. При каких a отношение a к b: а) меньше 100%; б) равно 100%; в) равно 200%; г) больше 100%; д) равно 50%?

Придумайте свои задачи, в которых требуется найти процентное отношение.

298. 1) В стакане чая (200 г) содержится 12 г сахара. Какова концентрация[1] сахара в чае?

Решение.

$$\frac{12}{200} \cdot 100\% = 6\%.$$

2) Какова концентрация сахара в чае, если в стакан чая (200 г) добавили 1 чайную ложку сахара (5 г)? Ответ округлите до сотых.

Решение.

$$5 + 200 = 205 \text{ (г)};$$

$$\frac{5}{205} \cdot 100\% = 2{,}44\%.$$

В чем различия в условиях и решениях этих задач? Какую концентрацию сахара в чае предпочитаете вы и ваши родные?

299. Для приготовления компресса к 119 г воды добавили 21 г соли. Сколько процентов соли содержится в полученном растворе?

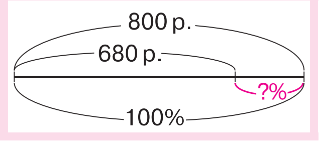
300. Имеются два раствора массой 80 г и 120 г. В первом растворе содержится 12 г соли, во втором — 15 г. Какова концентрация соли в каждом растворе? Какова концентрация раствора, получившегося после смешивания этих растворов в одном сосуде?

Выберите среди приведённых ответов верные:

10%; 12,5%; 13,5%; 15%; 17,5%; 20%; 22,5%; 25%; 27,5%.

Верно ли, что концентрация смеси равна сумме концентраций данных растворов?

301. Сколько граммов соли нужно взять, чтобы приготовить 3 литра 2,5%-го рассола для засолки огурцов? Какой концентрации рассол готовит мама во время домашнего консервирования? (Будем считать, что 1 л рассола весит 1 кг.)



302. 1) Обувной магазин устроил распродажу. Пара туфель, которая стоила раньше 800 р., стала стоить 680 р. На сколько процентов снизилась цена туфель?

[1] Концентрация раствора — отношение массы вещества в растворе к массе всего раствора.

Сравните своё решение со следующими:

Решение 1.

$800 - 680 = 120$ (р.) — на столько рублей снизилась цена туфель.

$\frac{120}{800} = \frac{3}{20}$; $\frac{3}{20} = 15\%$ — на столько процентов снизилась цена туфель.

Решение 2.

$\frac{680}{800} = \frac{17}{20} = 85\%$ — процентное отношение новой цены к старой.

$100\% - 85\% = 15\%$ — на столько процентов снизилась цена туфель.

Ответ: цена туфель снизилась на 15%.

2) Заработная плата Натальи повысилась с 6400 р. в неделю до 7680 р. На сколько процентов повысилась зарплата?

Решение 1.

$7680 - 6400 = 1280$ (р.);

$\frac{1280}{6400} = 20\%$.

Решение 2.

$\frac{7680}{6400} = 120\%$;

$120\% - 100\% = 20\%$.

Ответ: зарплата повысилась на 20%.

Поясните каждое действие. В чем сходство и в чем разница в решении этих задач?

3) Магазин понизил цену на товар с a р. до b р. На сколько процентов понизилась цена?

4) Магазин повысил цену на товар с a р. до b р. На сколько процентов повысилась цена?

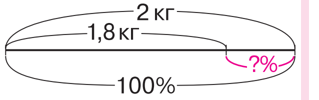
I **303.** 1) Сделайте краткие записи к задачам и решите их.

а) Рост мальчика увеличился со 132 см до 140 см. На сколько процентов вырос мальчик?

б) Платье стоило 960 р. Через некоторое время стало стоить 816 р. На сколько процентов снизили цену на платье?

в) Вклад в банке за год увеличился с 25 000 до 28 000 р. На сколько процентов увеличился вклад?

2) По краткой записи восстановите условие задачи:



«Прибор вместе с футляром имеет массу ... кг. Масса прибора ... кг. Сколько процентов от массы прибора с футляром составляет масса футляра?»

II **304.** 1) Масса сушёных яблок составляет 16% массы свежих яблок. Сколько получится сушёных яблок из 20 кг свежих?

2) В Кремле стоят Царь-пушка и Царь-колокол, отлитые русскими мастерами. Вес колокола 200 т, а вес пушки составляет 20% веса колокола. Сколько весит Царь-пушка?

I **305.** Найдите: а) 5% от 75; б) 25% от 90; в) 37,5% от 64; г) $33\frac{1}{3}$% от 240; д) 75% от 8; е) $83\frac{1}{2}$% от 12; ж) 62,5% от 160; з) 70% от 30.

I **306.** 1) Сколько килограммов составляют: а) 1% от центнера; б) 13,2% от тонны; в) 15% от центнера?

2) Сколько квадратных метров составляют: а) 47,5% от 1 гектара; б) 60% от 1 квадратного километра; в) 5% от 1 сотки?

II **307.** Найдите 35% от 65 и 65% от 35, 25% от 40 и 40% от 25. Сделайте выводы и попробуйте их обосновать.

I **308.** За 3 дня было продано 250 кг фруктов. В первый день — 36%, во второй — 34% всех фруктов. Сколько килограммов фруктов было продано в третий день?

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I день} & — 36\% \\ \text{II день} & — 34\% \\ \text{III день} & — ? \end{array}\right\} 100\% — 250 \text{ кг}$$

Предложены шаги решения:

1) $100 - (36 + 34) = 30$ (%); 2) $250 : 100 = 2{,}5$ (кг); 3) $2{,}5 \cdot 30 = 75$ (кг).

Составьте вопросы к каждому действию или сделайте пояснения. Можно ли решить эту задачу иначе? Если да, то предложите решение.

I **309.** Показ спектакля по телевизору занял 120 мин. Из этого времени 15% ушло на рекламу. Сколько минут длился сам спектакль?

Продолжите начатое решение и сделайте пояснения к каждому действию.

Решение 1. $15\% = \frac{15}{100}$; $120 \cdot \frac{15}{100} = 18$ (мин); ...

Решение 2. $100\% - 15\% = 85\%$; ...

I **310.** 1) Проездной билет стоил 80 р. В следующем месяце его цена стала больше на 15%. На сколько рублей изменилась цена проездного билета? Какова стала его цена? Сделайте пояснения к каждому действию, выполненному в решениях.

Решение 1. $15\% = 0{,}15$; $80 \cdot 0{,}15 = 12$ (р.); $80 + 12 = 92$ (р.).

Решение 2. $100\% + 15\% = 115\%$; $115\% = \frac{115}{100}$; $80 \cdot \frac{115}{100} = 92$ (р.).

2) Как изменится решение задачи, если цена проездного билета будет другой, например: а) 50 р.; б) 120 р.?

3) Как изменится решение задачи, если будет сказано, что цена проездного билета увеличилась: а) на 10%; б) на 20%?

4) Как изменится решение задачи, если будет сказано, что цена билета уменьшилась: а) на 15%; б) на 20%?

I **311.** 1) Мясо при варке теряет 40% своего веса. Сколько варёного мяса получится из 3 кг свежего?

2) Сколько сухой ромашки получится из 40 кг свежей, если при сушке она теряет 84% своего веса?

3) Мокрая верёвка короче сухой на 0,6%. Какова длина мокрой верёвки, если длина сухой равна: а) 100 м; б) 50 м; в) 35 м?

4) Магазин в праздничные дни снижает цены на 12%. Какова цена товара в праздничный день, если известно, что в обычные дни он стоил 225 р.? Какой процент новая цена составляет от старой?

I **312.** Заработная плата Алексея составляет 8420 р., а Антона — 7560 р. Алексею повысили зарплату на 22%, а Антону — на 35%. Кто после повышения зарабатывает больше и на сколько?

I **313.** Проиллюстрируйте с помощью рисунка: а) увеличение на 10%; б) уменьшение на 20%; в) увеличение в 1,5 раза; г) увеличение на 50%; д) уменьшение на 50%; е) увеличение на 100%; ж) увеличение в 2 раза; з) уменьшение на 100%.

I **314.** На складе было 8,5 т крупы — овсяной, перловой и гречневой, причём масса гречневой составляет 36%, а перловой — 28% от массы всей крупы. Найдите массы гречневой и перловой круп.

II **315.** Какие высказывания означают одно и то же: а) зарплата повысилась на $\frac{1}{3}$; б) зарплата увеличилась на 30 р.; в) зарплата повысилась на 30%; г) новая зарплата составляет 130% от старой; д) зарплата увеличилась в 1,3 раза?

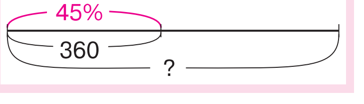
I **316.** Составьте несколько задач, в которых нужно найти проценты от заданного числа.

I **317.** 1) На уроке отсутствовали 4 человека, что составляет 12,5% от всех учащихся класса. Сколько учащихся в классе?

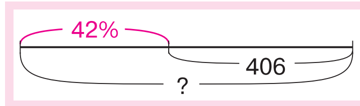
2) В топливном баке автомобиля было 33 л бензина. После того как долили ещё 19 л, бак оказался заполненным на 65%. Определите вместимость бака.

I **318.** Найдите число, если: а) 8% его равны 2,4; б) 1% его равен 40; в) 30% его равны 2,7; г) 210% его равны 4,2; д) 40% его равны 1; е) 0,2% его равны 2,8.

I **319.** 1) В начальных классах учится 45% всех учащихся школы, что составляет 360 человек. Сколько учеников в школе?



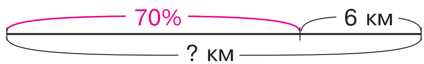
2) В начальных классах учится 42% от всех учащихся школы, в остальных классах 406 учеников. Сколько учеников в школе?



Продолжите начатое решение данной задачи:

100% − 42% = 58% — в остальных классах школы учатся 58% учащихся, что составляет 406 учеников...

3) Составьте задачу по рисунку:



I **320.** 1) Мясо теряет при варке 40% своей массы. Сколько нужно взять сырого мяса, чтобы получить 510 г варёного?

2) Из бочки вылили 40% находящегося там керосина. Сколько литров керосина было в бочке, если: а) из неё вылили 60 л; б) в ней осталось 60 л?

3) Найдите массу тела, если известно, что $p\%$ от неё равны a кг.

I **321.** 1) Бизнесмен положил в банк 800 тыс. р., что составляет 4% имеющихся у него денег. Сколько денег у бизнесмена?

2) Рабочие заасфальтировали 83% дороги, после чего осталось заасфальтировать ещё 51 км. Найдите длину всей дороги.

3) На полке стоят книги. 12 из них являются детективами. Это составляет 40% Всех книг. Сколько всего книг стоит на полке?

4) Свая возвышается над водой на 1,5 м, что составляет 30% длины всей сваи. Какова длина сваи?

5) Цех выпустил 360 приборов, что составляет 120% месячной нормы. Какова месячная норма выпуска приборов?

II **322.** Магазин продал 37,5% полученных со склада пар лыж, после чего в магазине осталось 120 пар. 1) Сколько пар лыж было получено магазином? 2) Сколько пар лыж было продано? 3) Сколько процентов составляют непроданные лыжи?

II **323.** При сдаче норм по стрельбе норму выполнили только 82% сдававших. Сколько человек сдавало нормы по стрельбе? Достаточно ли данных для ответа на вопрос? Если нет, то переформулируйте задачу так, чтобы её можно было решить.

II **324.** Составьте несколько задач на нахождение числа по его процентам.

II **325.** 1) Торговая фирма покупает товар по 425 р. и продаёт его в розницу с наценкой 12%. Какова розничная цена товара?

2) Торговая фирма покупает товар по 215 р. и продаёт его в розницу по 249 р. 40 к. Сколько процентов составляет торговая надбавка?

3) В магазине торговая надбавка составляет 18%. Сколько рублей стоит товар на базе, если в магазине его продают по 755 р. 20 к.?

I **326.** 1) Зарплата работника составляет 3200 р. Сколько рублей он получит после уплаты налогов и кредита, которые составляют 28%?

2) Какой должна быть зарплата, чтобы после уплаты налогов и кредита, которые составляют 28%, получать 2790 р.?

3) Зарплата работника составляет 3800 р. После уплаты налогов и кредита он получает на руки 2888 р. Сколько процентов от зарплаты получает работник на руки?

II **327.** В субботу и воскресенье скидка на ткани составляет 10%.

1) Сколько стоит в субботу 1 м ткани, если в среду он стоит 140 р.?

2) Сколько стоит во вторник 1 м ткани, если в субботу он стоит 315 р.?

3) Сколько процентов от цены в четверг составляет цена ткани в субботу?

4) Сколько процентов составляет цена в понедельник от цены ткани в воскресенье?

II **328.** Если цену на игру «Конструктор» увеличить на 25%, то она составит 437,5 р. Сколько будет стоить игра, если цену увеличить на 16%?

II **329.** 1) Джинсы стоили 730 р. Цену на них сначала подняли на 15%, а затем снизили на 10%. Сколько стали стоить джинсы? На сколько процентов увеличилась цена джинсов по сравнению с первоначальной?

2) Джинсы стоили 900 р. Цену на них сначала увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Изменилась ли цена джинсов, а если изменилась, то как?

3) Джинсы стоили 650 р. Цену на них увеличили на 25%. На сколько процентов нужно уменьшить новую цену, чтобы вернуть её к первоначальной?

II **330.** 1) Одну сторону квадрата увеличили на 10%, а другую уменьшили на 10%. Отличается ли периметр полученного прямоугольника от периметра квадрата? Отличается ли площадь полученного прямоугольника от площади квадрата? Ответы обоснуйте.

2) Одну сторону квадрата увеличили в 2 раза, а другую уменьшили в 2 раза. Отличаются ли периметр и площадь полученного прямоугольника от периметра и площади квадрата? Ответ обоснуйте.

3) Одну сторону квадрата увеличили на 25%, а другую уменьшили на 20%. Как изменятся периметр и площадь полученного прямоугольника?

II **331.** 1) Число 200 увеличили в полтора раза. На сколько процентов увеличили число?

2) Число 300 увеличили на величину, равную $\frac{2}{3}$ этого числа. На сколько процентов увеличили число? Сколько процентов «старое» число составляет от «нового»?

3) Составьте аналогичные задания, заменив слово «увеличили» на слово «уменьшили». Выполните составленные задания.

I **332.** Из 5,4 ц семян подсолнечника получили 1,62 ц масла. Каково процентное содержание масла в семенах подсолнечника?

Определив процентное содержание масла в семенах подсолнечника, составьте задачу с вопросом: а) сколько семян подсолнечника нужно взять...; б) сколько центнеров масла получили ...?

II **333.** Ниже приведены равенства. Придумайте задачи на проценты, которые можно решить с их помощью:

а) $\frac{12}{32} = \frac{b}{100}$; б) $\frac{b}{56,5} = \frac{35}{100}$; в) $\frac{23,5}{a} = \frac{74,6}{100}$.

I **334.** Миша прошёл 80% пути за 15 мин. Успеет ли Миша в школу, если до начала занятий осталось 5 мин?

I **335.** За половину рабочего дня скосили 24% площади луга. Скосят ли этот луг за 2 дня при тех же темпах работы?

I **336.** Рассмотрите три задачи:

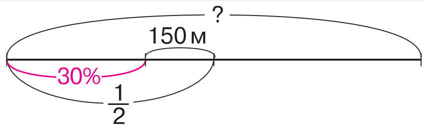
1) Когда Костя прошёл 30% пути от дома до школы, ему ещё осталось пройти до середины пути 150 м. Какова длина пути от дома Кости до школы?

2) Костя прошёл 30% пути от дома до школы, длина которого составляет 750 м. Сколько метров осталось Косте пройти до середины пути?

3) Длина пути от дома Кости до школы равна 750 м. Какой процент пути от дома до школы прошёл Костя к тому моменту, когда до середины пути ему осталось пройти 150 м?

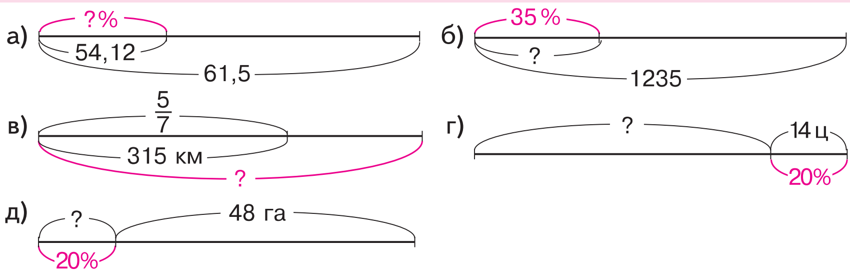
Укажите, к какой из этих задач может быть сделана такая краткая запись:

а) 150 м — 20%
x м — 100%

б) 

Придумайте сами аналогичные задачи.

337. Составьте задачи по схемам:



338. Составьте задачи, используя данные:

1) При весенней распродаже зимних вещей уценка составила в среднем 30%.

2) Из 1 т сахарной свёклы вырабатывают в среднем 0,16 т сахара.

3) После сушки остаётся 0,1 массы сырых грибов.

4) Из 1 т семян подсолнечника получают 0,52 т масла.

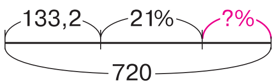
5) Во время сезонной распродажи цена товара понизилась с 6000 до 5000 р.

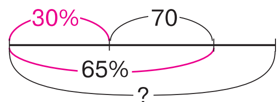
6) Железнодорожный билет подорожал с 780 до 830 р.

Проверьте себя 11

1. (1 балл) Найдите проценты от числа: а) 13% от 64; б) 124% от 38,5.
2. (1 балл) Число 26,22 составляет 69% от числа a. Найдите число a.
3. (3 балла) Некоторую величину увеличили в 3 раза. На сколько процентов увеличилась эта величина?

4. (1 балл) Ученикам дали задание: «Найдите 95% от числа 1814». Получили ответы: а) 1437,8; б) 1938,2; в) 1723,3. Не выполняя вычислений (на глазок), определите неверные ответы.
5. (1 балл) Из 250 проверенных деталей 185 оказались первого сорта. Определите, какой процент от проверенных деталей составляют детали первого сорта.
6. (2 балла) За первые сутки турист прошёл 58% маршрута, а за вторые — оставшиеся 31,5 км. Найдите длину маршрута.
7. (2 балла) При передаче тепловой энергии потери составляют 12%. Сколько энергии дошло до потребителей, если было выработано 170 000 кВт?
8. (3 балла) При засолке огурцов хозяйка использовала 3 кг 850 г соли. Сколько рассола приготовила хозяйка, если содержание соли в нем составляет 2,2%?
9. (3 балла) Число 63 разделите на две части так, чтобы одна составляла 40% от другой.
10. (1 балл) В каком случае процентное отношение больше: 8 из 43 или 13 из 70?
11. Составьте задачи по схемам:

а) (2 балла) 

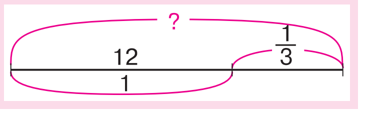
б) (2 балла) 

12. (3 балла) После подорожания на 35% туфли стали стоить 756 р. Сколько стоили бы туфли, если бы их цена увеличилась на 30%?
13. (3 балла) Цену на молоко увеличили на 10%, а затем ещё на 5%. Сколько стоит 1 л молока после двух наценок, если ранее он стоил 12 р.? На сколько процентов изменилась цена молока?
14. (3 балла) Весной картофель подорожал на 25%, а осенью подешевел на 20%. Сколько будет стоить 1 кг картофеля осенью, если ранней весной он стоил 8 р. На сколько процентов изменится цена картофеля?
15. (3 балла) Первый множитель увеличили на 30%, а второй уменьшили на 30%. Как изменилось произведение?
16. (6 баллов) В расколотом арбузе содержалось 99% воды. После его усыхания содержание воды стало составлять 98%. Во сколько раз усох арбуз?

Решаем задачи
Особая задача

Это место для задачи, которую ты сам должен сочинить. Задача, понятное дело, интересной должна быть, а решение её — действиями да приёмами богато.

339. Увеличьте число 12 на $\frac{1}{3}$ этого числа. Запишите результат.



Сверьте своё решение со следующими двумя решениями.

Решение 1.

1) $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ — число, на которое требуется увеличить данное число;
2) $12 + 4 = 16$ — новое число.

Решение 2. Примем данное число за единицу (одну целую часть) и найдём, какую часть составляет новое число от старого.

1) $1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Найдём само новое число:

2) $12 \cdot 1\frac{1}{3} = 12 \cdot \frac{4}{3} = 16$ — новое число.

340. Уменьшите число 12 на $\frac{2}{3}$ этого числа. Решите задачу двумя способами.

341. 1) Площадь участка была увеличена на $\frac{1}{5}$. Найдите новую площадь участка.

2) Площадь участка 100 кв. м. Её увеличили на 35 кв. м, что составило $\frac{7}{20}$ площади. Найдите новую площадь.

3) В какой из задач лишние данные, а в какой — данных недостаточно?

342. Число увеличили на треть и получили 32. Найдите первоначальное число. Сделайте рисунок по условию задачи. Составьте уравнение для решения задачи. Решите задачу, не используя уравнения.

343. Число равно 25 да ещё $\frac{5}{6}$ от самого себя. Найдите это число. Для решения задачи составлено уравнение, но некоторые его члены пропущены:

$$25 + \ldots = x.$$

Заполните пропуски. Решите эту же задачу, не используя уравнения.

I **344.** Известно, что $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ некоторого числа в сумме составляют 94. Какое это число?

I **345.** Из числа вычли сначала $\frac{2}{5}$ числа, потом $\frac{1}{3}$ этого же числа. После этого осталось 8. Найдите это число.

1) Для решения этой задачи было предложено несколько уравнений. Какие из них дают возможность решить задачу:

а) $x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}x = 8$; б) $x = \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x + 8$; в) $x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}x + 8 = x$?

2) Ученик решил эту задачу арифметически:

а) $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{15 - 6 - 5}{15} = \frac{4}{15}$; б) $8 : \frac{4}{15} = \frac{8 \cdot 15}{4} = 30$.

Правильно ли данное решение? Если данное решение верно, то сформулируйте вопросы к каждому действию.

I **346.** Разность между неизвестным числом и его $\frac{5}{19}$ равна 518. Найдите это число.

II **347.** Если к числу прибавить ещё столько же, да ещё $\frac{2}{9}$ этого числа, то получится 3400. Чему равно число?

I **348.** Одно число составляет от другого $3\frac{1}{7}$, а сумма обоих чисел равна 58. Найдите оба числа.

I **349.** Сумма трёх чисел составляет 120. Первое число равно $\frac{3}{8}$ суммы, второе — $\frac{2}{5}$ суммы. Найдите третье число.

I **350.** Из некоторого числа сначала вычли 0,3 его, затем 0,4 остатка, затем 0,5 следующего остатка. Получили 105. Найдите это число. Составьте уравнение для данной задачи.

I **351.** Первое число равно 760, второе составляет $\frac{3}{4}$ от первого числа, третье — $\frac{4}{19}$ первого. Найдите сумму трёх чисел.

I **352.** За 3 дня израсходовали 450 кг краски. В первый день израсходовали $\frac{4}{15}$ всей краски, во второй день $\frac{5}{8}$ того количества краски, которое израсходовали в первый день. Сколько килограммов краски израсходовали в третий день?

I **353.** За 3 дня продали 280 кг яблок. В первый день продали $\frac{5}{16}$ всех яблок, во второй — $\frac{3}{5}$ остатка. Сколько килограммов яблок продали в третий день?

I **354.** На покупку карандашей Ира истратила $\frac{2}{7}$ имевшихся у неё денег, а на покупку красок — 80% оставшихся денег. Сколько денег истратила Ира на покупку красок, если у неё было 210 р.? Хватит ли у Иры денег на покупку альбома, если он стоит 40 р.?

I **355.** В первый час своего движения автобус прошёл всего пути, во второй — всего пути, а в третий — остальную часть. Какое расстояние прошёл автобус за три часа, если за третий час он прошёл на 20 км меньше, чем за первый.

1 ч — $\frac{2}{5}$ всего

2 ч — $\frac{1}{3}$ всего

3 ч — остаток; на 20 км меньше

1) Рассмотрите решение этой задачи и поставьте вопросы к каждому действию.

а) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{11}{15}$, б) $1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$, в) $\frac{2}{5}-\frac{4}{15}=\frac{2}{15}$, г) $20:\frac{2}{15}=\frac{20\cdot 15}{2}=150$.

Проверка.

В первый час пройдено $\frac{150\cdot 2}{5}=60$ (км);

во второй час пройдено $\frac{150\cdot 1}{3}=50$ (км);

в третий час пройдено $150-(60+50)=40$ (км);

$60-40=20$ (км).

Ответ: 150 км автобус прошёл за три часа.

2) Можно ли было эту задачу решить с помощью уравнения

$$x-\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}x\right)=\frac{2}{5}x-20?$$

Если да, то что означает:

а) x; б) $\frac{2}{5}x$; в) $\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}x$; г) $x-\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}x\right)$; д) $\frac{2}{5}x-20$?

3) Изменится ли ход решения задачи, если будет сказано, что: а) за третий час автобус прошёл на 10 км меньше; на 20 км больше; б) за третий час он прошёл 100 км; в) за третий час он прошёл столько же, сколько за первые два часа вместе?

Решите задачу с новыми условиями, если это возможно.

I **356.** Путешественник должен пересечь пустыню. Его путь составляет 80 км. В первые два дня он прошёл 40% всего пути, в третий день — $\frac{5}{8}$ пройденного пути. Определите: а) сколько километров ему осталось преодолеть? б) сколько процентов составляет длина непройденного участка пути от всего пути? в) сколько процентов всего пути путешественник прошёл за три дня?

Решите задачу несколькими способами. Как можно проверить правильность решения этой задачи?

Практикум

I **357.** Составьте задачу по краткой записи и решите её.

I — 80
II — всего в 1,5 раза больше
III — 20% от

Верно ли, что среднее арифметическое данных чисел равно 80?

I **358.** В первый день на мельнице смололи $\frac{2}{7}$ всего зерна, во второй день — $\frac{1}{4}$ всего зерна, в третий — остальные 2886 кг. Сколько всего зерна завезли на мельницу ?

I **359.** Прочтите задачу и заполните пропуски в краткой записи, составленной по её условию, и в уравнении, позволяющем решить задачу.

В трёх сосудах 32 л машинного масла. Масса масла во втором сосуде составляет 35% массы масла первого сосуда, а масса масла в третьем сосуде составляет $\frac{5}{7}$ массы масла второго сосуда.

Сколько литров масла в каждом сосуде?

$$\left.\begin{array}{l}\text{I} — \ldots \\ \text{II} — 35\% \text{ от} \\ \text{III} — \ldots\end{array}\right\} 32 \text{ л}$$

Уравнение: $x + 0{,}35x + \ldots = 32$.

I **360.** Садовник выращивал саженцы деревьев различных пород. Саженцы яблони составляли $\frac{1}{3}$ всего количества, саженцы вишни — $\frac{3}{4}$ остатка, а саженцы декоративных деревьев — остальные 4290 штук. Сколько всего саженцев выращивал садовник?

Заполните пропуски в уравнении, приводящем к решению задачи:

$$\ldots + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}x + \ldots = x.$$

Чем эта задача отличается от предыдущей?

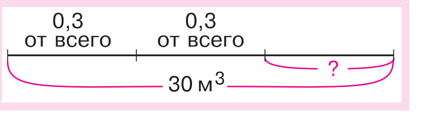
II **361.** По путёвке в Псков отправлялась группа ребят. Первоначально предполагалось, что девочек будет 25% от числа мальчиков. Но одна девочка не пришла, в результате число девочек составило только 20% от числа мальчиков.

Сколько девочек и мальчиков участвовало в поездке?

II **362.** В первую неделю рабочий сделал 20% месячной нормы, во вторую — 1,1 того, что было выполнено в первую неделю, в третью — $\frac{2}{3}$ того, что было сделано за 2 недели, остальные 120 деталей он выточил за четвёртую неделю.

Сколько деталей рабочий выточил за месяц?

363. 1) Составьте задачу по рисунку и решите её.



2) Сравните составленную задачу со следующей:

В первый день каменщик уложил 0,2, а во второй день 0,45 всей кладки; в третий остальные 35 м^3. Сколько кубических метров кладки уложил каменщик за три дня?

364. Составьте по кратким записям задачи и решите их:

а) I — 800 г
II — ?0,75 от

б) I — 800 г
II — 0,75 от
На сколько тяжелее ... ?

в) I — ?
II — 0,75 от
} 1400

г) всего — ?
I — 53% от
II — 847 тетрадей
III — 40% от

365. Задание, с которым один работник справляется за 2 ч, другой выполняет за 3 ч. За сколько часов будет выполнено задание при совместной работе?

Для решения задачи составлена таблица. Объём всей выполненной работы принят за 1.

	Производительность (ед./ч)	**Время (ч)**	**Объём работы (ед.)**
1-й рабочий		2	1
2-й рабочий		3	1
Вместе		?	1

1) Заполните таблицу и решите задачу.

2) Как изменится таблица, если задание будет состоять в том, чтобы изготовить 60 деталей?

366. Один работник может покрасить забор за 12 ч 30 мин. Второй работник делает 0,03 этой работы за 1 ч 30 мин. За сколько часов сделают они всю работу, работая вместе?

367. Две бригады, работая вместе, могут выполнить задание за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, оставшуюся работу вторая бригада выполнила за 7 дней. За сколько дней выполнила бы всю работу каждая бригада?

1) Один ученик, решая эту задачу, задавал вопросы; в задачнике эти вопросы перепутались:

а) Какую часть задания выполнили две бригады вместе за 8 дней?
б) Какую часть задания выполнила вторая бригада за 7 дней?
в) Какова совместная производительность бригад?
г) Какова производительность 1-й бригады?
д) Сколько дней потребовалось бы 2-й бригаде для выполнения всего задания?
е) Какова производительность 2-й бригады?
ж) Сколько дней потребовалось бы 1-й бригаде для выполнения всего задания?

Восстановите последовательность вопросов.

2) Другой ученик для решения задачи составил таблицу и начал её заполнять. Продолжите его работу:

	Производительность (ед./дн.)	**Время (дн.)**	**Объём работы (ед.)**
I			1
II			1
I + II			1
I + II		8	
II		7	1 – ...

368. 5 девочек могут съесть торт за 12 мин, а 5 мальчиков — за 10 мин. Какую часть торта съедят дети за 1 мин? За 2 мин? За 3 мин?

369. Трое дружных медвежат очень любят обедать. Первый и второй могут съесть миску похлёбки за 6 мин, первый и третий — за 8 мин, второй и третий — за 12 мин. За сколько минут медвежата втроём съедят всю похлёбку? За сколько времени пообедает первый медвежонок, если будет есть один?

Проверьте себя 13

Вы сможете заполнить пропуски (...), если решите задачи.[1)]

Ворон может прожить ...	Попугай может прожить ...
Вес колибри ...	Мышка-норушка весит ...
Вес барана ...	Ослу ... лет.
Вес свиньи ...	Предельный возраст кукушки ...
Вес бурого медведя ...	Яйцо страуса весит ...
Вес волка ...	Рост гориллы ...
Вес слона ...	Высота жирафа ...
Вес носорога ...	Белуга весила ...
Вес китёнка ...	Королёк весит ...
Длина африканской лягушки ...	Длина акулы ...

1. Ворона спросила старого ворона: «До скольких лет ты можешь прожить?» Ворон ответил: «Я могу прожить 25 лет и ещё $\frac{5}{6}$ того, что прожил». Ответил и умер. Сколько лет было ворону?
2. Вес воробья составляет 0,0008 веса страуса, а вес самой маленькой птички — колибри — составляет $\frac{1}{30}$ веса воробья. Какой вес имеет колибри, если известно, что вес страуса достигает 75 кг?
3. Свинья, баран да бурый медведь весят вместе 880 кг. Вес свиньи составляет $\frac{3}{4}$ веса медведя и в $1\frac{2}{3}$ раза больше веса барана. Определить вес каждого животного.
4. Вес волка составляет $\frac{1}{10}$ веса медведя. Свинья в 1,6 раза легче медведя и в 16 раз легче слона. Бык в $1\frac{1}{3}$ раза легче слона и в $1\frac{2}{3}$ раза легче носорога, вес которого 2000 кг. Вычислить вес указанных животных.
5. Вес новорождённого китёнка равен весу 27 взрослых львов или 15 бурых медведей. Найти вес китёнка, если известно, что бурый медведь весит больше льва на 150 кг.
6. Длина африканской лягушки-голиафа на 7 см больше длины американской жабы-ага и на 12 см — лягушки-быка. Опре-

[1)] Задачи взяты из книги Е. А. Дышинского «Игротека математического кружка». (М.: Просвещение, 1972) делить длину каждой лягушки, если известно, что длина лягушки-быка составляет $\frac{5}{8}$ длины лягушки-голиафа.

7. Ворон может прожить больше попугая на 10 лет, попугай — больше орла на 60 лет, орёл — больше страуса на 40 лет. Сколько может прожить попугай, если известно, что ворон может прожить больше страуса в $3\frac{3}{4}$ раза?
8. Встретила ласка землеройную крошку мышку-норушку и спрашивает: «Сколько же ты весишь, крошка?» — «А вот посчитай! Если к весу моих сорока сестёр ты прибавишь $\frac{1}{10}$ твоего веса да ещё 10 г, получишь свой вес. А вообще, я в 50 раз легче тебя». Посчитайте и вы!
9. Встретил старый волк старого осла и спрашивает: «Сколько тебе лет?» — «А тебе сколько?» — «Мне 15.» — «Тогда я в три раза старше тебя да ещё на одну треть.» Сколько лет ослу?
10. Предельный возраст соловья составляет $\frac{9}{16}$ возраста кукушки, $\frac{9}{50}$ возраста лебедя и $\frac{3}{50}$ возраста вороны. Определить предельный возраст кукушки, вороны и лебедя, если предельный возраст соловья 18 лет.
11. 3 яйца африканского страуса и 60 куриных весят 9 кг. Найти вес яйца страуса, если известно, что оно тяжелее куриного в 20 раз.
12. Длина тела карликовой игрунки (самая маленькая обезьянка) 16 см, что составляет 0,08 длины гориллы. Определить рост гориллы.
13. Высота африканского страуса 2,75 м, что составляет $\frac{11}{14}$ высоты слона. Определите высоту жирафа, который выше слона на 2,5 м.
14. Продавца спросили: «Сколько весит лежащая на прилавке белуга?». Он ответил: «Четвёртую часть тонны и ещё $\frac{3}{4}$ своего веса». Сколько весила белуга?
15. Самая крупная птица России — дрофа — весит 16 кг. Вес самой маленькой обитательницы уральских лесов — королька — составляет $\frac{1}{3200}$ веса дрофы. Сколько весит королёк?
16. Длина кобры составляет $\frac{3}{20}$ длины удава, а удав в 1,5 раза короче акулы. Определить длину акулы, если длина кобры 1,5 м.

ОТВЕТЫ

19. 1) а) $\frac{1}{60}$; б) 2) а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{72}$; 3) а) 30 мин; 45 мин; 60 мин; 90 мин; б) 12 ч; 18 ч; 24 ч; 36 ч. **21.** 2) $\frac{5}{15}$; 4) $\frac{33}{30}$. **23.** 2) а) $\frac{5}{6}$; 60; б) $\frac{1}{6}$; 12; в) $\frac{5}{3}$; 120. **27.** $\frac{43}{129} = \frac{27}{81} = \frac{1}{33} = \frac{1}{3}$. **63.** а) например, $3 = \frac{6}{2}$; $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; б) например, $4 > \frac{5}{2}$; $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$; в) например, $2 < \frac{7}{2}$; $\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$. **67.** 1) $\frac{16 \cdot 3}{21} = \frac{48}{21}$; $\frac{16}{21 : 3} = \frac{16}{7}$. **71.** а) $\frac{12}{13} < \frac{37}{38}$; б) например, $\frac{100}{107} > \frac{1}{33}$. **76.** 1) а) $a = 4$; 5; 6; 7; в) например, $a = 5$ или $a = 3$; 2) б) например, $b = -1$; г) например, $b = -2$. **88.** б) -1; г) -1; ж) $\frac{20}{103}$; к) 0. **90.** 1) б) например, $\frac{1}{3}$; г) $\frac{35}{488}$; 2) а) нет; б) да; в) нет. **92.** 1) б) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{17}{3}$; е) $\frac{35}{9}$. **98.** а) 7; в) 9; д) -21; ж) -6; и) 5; м) 4. **101.** 1) $\frac{9}{10}$ км^2. **104.** $\approx$ 312 дюймов = 792,48 см = 7,9248 м. **105.** $\frac{1}{256}$; $\frac{1}{256}$; $\frac{1}{192}$; $\frac{1}{192}$. **114.** а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8}$; б) $3\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{4}$; в) $\frac{9}{32} : \frac{3}{8}$; г) $3 + \frac{2}{5}$. **118.** 1) а) например, $a = 2$; в) например, $a = 1$; д) t — любое число, большее 1; ж) например, $z = \frac{1}{2}$; и) x — любое положительное число; л) x — любое положительное число. **130.** 1) 101. **133.** 10) 192; 11) 32; 12) 32 кг; 13) а) 4896; в) 1088; 15) 18°R; 18) 6,3 т. **144.** 1) а) $\frac{271}{372}$; в) $\frac{911}{2880}$. **145.** 1) а) 1; в) 2; д) 2; ж) 5. **146.** а) например, $x = \frac{1}{8}$; в) например, $x = \frac{1}{33}$; д) такой положительной дроби нет. **155.** а) например, $\frac{1}{2}$; в) например, $\frac{1}{10}$. **165.** а) $8\frac{7}{72}$; в) $20\frac{3}{20}$. **167.** 1) а) $M\left(1\frac{2}{3}; 3\right)$; б) $M\left(3\frac{7}{36}; 4\frac{4}{9}\right)$. **168.** 12 разрезов. **169.** 1) $7\frac{1}{5}$ км; 2) 20 вёдер. **173.** 1) б) $87\frac{1}{4}$; г) $13\frac{1}{2}$; 2) Например, $A(2)$; $B\left(-1\frac{1}{2}\right)$. **176.** б) $\frac{5}{84}$; г) $\frac{7}{8}$; е) $-\frac{2}{105}$; з) $\frac{11}{168}$. **177.** Одинаково. **186.** а) $-13\frac{1}{24}$; в) $\frac{1}{260}$; **187.** б) $-1{,}4b$; г) $-2\frac{13}{15}b$; е) $4p - 14\frac{1}{3}q + 4$. **188.** б) $1\frac{11}{18}$;

г) $2\frac{27}{32}$; е) $2\frac{4}{9}$. **190.** а) $6\frac{5}{11}$; в) $8\frac{29}{30}$; д) 113; ж) $-\frac{1}{30}$; и) $7\frac{1}{5}$. **191.** 7 яиц. **193.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{1}{11}$; в) $2\frac{1}{3}$. **196.** 1) а) 10; б) $22\frac{4}{5}$; 2) а) $8-\left(7\frac{1}{4}\cdot 10-8{,}5\right)=-56$; в) $\left(8-7\frac{1}{4}\right)\cdot(10-8{,}5)=\frac{9}{8}$. **201.** а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{10}$; г) $\frac{5}{2}$; д) 15; е) $1\frac{1}{24}$; ж) $6\frac{1}{8}$. **204.** . а) не имеет смысла; б) $-18\frac{1}{18}$. **205.** а) $\left(12{,}8\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot(0{,}75-0{,}125)$. **206.** а) $10\frac{8}{25}$; б) $-\frac{46}{75}$. **208.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{8}$; в) 170. **209.** а) $\frac{2}{5}$; б) -10. **213.** 1) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$; 3) $\frac{1}{100\,001}=\frac{100\,000}{100\,001}$; 4) *Указание*: представьте знаменатель каждой дроби в виде произведения двух последовательных натуральных чисел. **228.** $\frac{3}{4}>\frac{4}{7}$. **229.** а) 15; б) 15; в) 15. **230.** з) 40. **235.** а) 63; 42. **238.** 136 кг меди; 16 кг цинка; 8 кг олова. **240.** 240 тыс. руб.; 160 тыс. руб.; 40 тыс. руб. **242.** 2) 135 страниц. **253.** б) $\frac{217}{27}$; е) 0,48. **254.** 2) Верно, если $a\neq 0$. **259.** 15 кг. **260.** 45 кг. **262.** 15 часов. **282.** 80%; 75%. **289.** 1) 50%; 2) 200%; на 100%. **291.** a — 200% от b; b — 50% от a. **295.** 70%. **301.** 75 г. **304.** 1) 3,2 кг; 2) 40 т. **311.** 1) 1,8 кг; 2) 6,4 кг. **317.** 2) 80 л. **318.** а) 30; г) 2. **320.** 1) 850 г; 2) а) 150 л; б) 100 л. **321.** 1) 20 000 000 руб.; 2) 300 км; 3) 30 книг; 4) 5 м; 5) 300 штук. **326.** 1) 2304 руб.; 2) 3875 руб.; 3) 76%. **328.** 406 руб. **329.** 1) 755,55 руб.; увеличилась на 3,5%; 3) 20%. **331.** 1) 50%; 2) на $66\frac{2}{3}$%; 60%. **340.** 4. **341.** 3) В задаче 1 недостаточно данных, в задаче 2 — лишние данные. **342.** 24. **343.** 150. **344.** 120. **345.** 30; 1) а) и б). **346.** 703. **347.** 1530. **348.** 14; 44. **349.** 27. **350.** 500. **351.** 1490. **352.** 255 кг. **353.** 77 кг. **354.** 120 руб.; не хватит. **356.** а) 28 км; б) 35%; в) 65%. **357.** Верно. **358.** 6216 кг. **359.** 20 л; 7 л; 5 л. **360.** 26 740 саженцев. **361.** 20 мальчиков, 4 девочки. **362.** 400 деталей. **363.** 1) 10,5 $м^2$ **365.** 1 ч 12 мин. **366.** за 10 часов. **367.** за 28 дней; за 21 день. **368.** $\frac{11}{60}$; $\frac{11}{30}$; $\frac{11}{20}$. **369.** за 5 мин 20 с; за 9 мин 36 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ