Внеаудиторная самостоятельная работа № 4.

Тема: ***«***Моменты случайных величин».

Цель: познакомиться с понятиями: мода и медиана, моментами и коэффициентами случайных величин, научиться вычислять соответствующие характеристики.

Кроме математического ожидания и дисперсии, в теории вероятностей применяется еще ряд числовых характеристик, отражающих те или иные особенности распределения.

*Модой* д. с. в. X называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями, обознача­ется через *Mо(X).* Для н.с.в. *Mо(X)* - точка максимума плотности f(x).

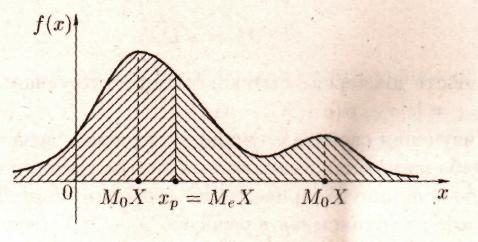
Если мода единственна, то распределение с. в. называется *унимо­дальным*, в противном случае – *полимодальным* (рис. 1).

Рис. 1

*Медианой* *Ме(Х)* н.с.в. X называется такое ее значение хр, для которого

, (1.1)

т. е. одинаково вероятно, окажется ли с. в. X меньше *хр* или больше *хр* (рис. 1).

С помощью функции распределения F(x) равенство (1.1) можно записать в виде   
F(*Ме(Х)*) = 1 – F(*Ме(Х)*). Отсюда F(*Ме(Х)*) = .

Для д.с.в. медиана обычно не определяется.

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случа­ями следующих более общих понятий – моментов с. в.

*Начальным моментом порядка k* с. в. X называется математическое ожидание k-й сте­пени этой величины, обозначается через .

Таким образом, по определению

.

Для д. с. в. начальный момент выражается суммой:

*,*

а для н. с. в. — интегралом:

.

В частности, = *M(X)*, т.е. начальный момент 1-го порядка есть математическое ожидание.

*Центральным моментом порядка k* с. в. X называется математическое ожидание вели­чины  
 , обозначается через .

Таким образом, по определению

.

В частности, , т. е. центральный момент 2-го порядка есть дисперсия;   
 (см. свойства *М(Х)*).

Для д.с.в.:

,

а для н. с. в.:

.

Центральные моменты могут быть выражены через начальные моменты. Так, (действительно: ); ;  
 и т. д.

Среди моментов высших порядков особое значение имеют цен­тральные моменты 3-го и 4-го порядков, называемых соответственно коэффициентами асимметрии и эксцесса.

*Коэффициентом асимметрии* («скошенности») А с.в. X называ­ется величина

Если А > О, то кривая распределения более полога справа от *Mо(X)* (рис. 2).

Если А < О, то кривая распределения более полога слева от *Mо(X)* (рис. 3).

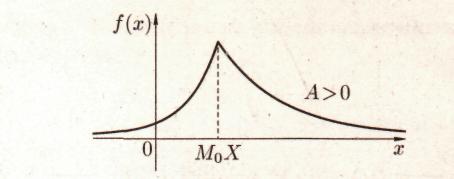
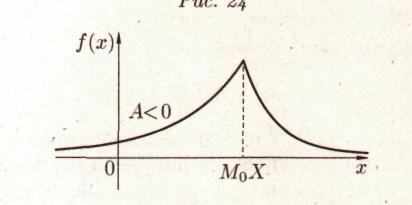
 

Рис. 2 Рис.3

*Коэффициентом эксцесса* («островершинности») Е с. в. X назы­вается величина

Величина Е характеризует островершинность или плосковершинность распределения. Для нормального закона распределения А = 0 и Е = 0; остальные распределения сравниваются с нор­мальным: если Е > 0 — более островершинные, а распределения «плос­ковершинные» имеют Е < 0 (рис. 4).

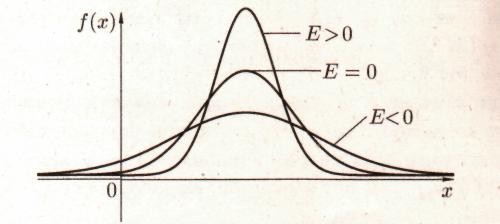


Рис. 4

Кроме рассмотренных выше числовых характеристик с.в., в при­ложениях используются так называемые квантили.

*Квантилем уровня q* (или *q-квантилем*) называется такое значение с. в. X , при котором функция ее распределения принимает значение, равное q, т. е.

Квантили имеют свои названия: *нижний квартиль, медиана (Ме(Х) =), верхний квартиль* соответственно. Они делят числовую прямую на 4 части, вероятности попадания в которые равны 0,25 (рис. 5).

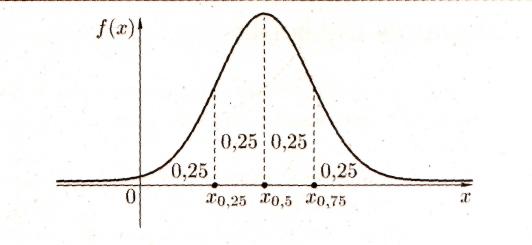


Рис. 5

**Составить конспект по плану:**

1. Дать определение моды д. с. в. *Х* и н. с. в. *Х*.
2. Показать графически унимодальное распределение с. в. *Х*.
3. Дать определение медианы с. в. *Х.*
4. Дать определение начального момента порядка k с. в. *Х.*
5. Дать определение центрального момента порядка k с. в. *Х.*
6. Дать определение коэффициента асимметрии с. в. *Х.*
7. Дать определение коэффициента эксцесса с. в. *Х.*
8. Привести пример вычисления коэффициентов асимметрии и эксцесса с. в. *Х,* заданной функцией распределения *.*
9. Дать определение квантиля уровня q с. в. *Х.*
10. Указать уровень нижнего квантиля, верхнего квантиля, медианы.