УРОК АЛГЕБРЫ В 10 КЛАССЕ

ТЕМА: Методы решения тригонометрических уравнений

> Метод решения хорош, если с самого начала
> мы можем предвидеть – и в последствии
> подтвердить это, - что, следуя этому методу,
> мы достигнем цели.
>
> Лейбниц.

ЦЕЛИ УРОКА: 1. Систематизировать, обобщить, расширить знания и умения учащихся, связанные с применением методов решения тригонометрических уравнений.
2. Содействовать развитию математического мышления учащихся.
3. Побуждать учащихся к преодолению трудностей в процессе умственной деятельности.

ОБОРУДОВАНИЕ: набор карточек для сбора на магнитной доске;
карточки для учащихся с заданием теста;
таблицы со списком уравнений;
графики самоанализа деятельности.

ВВОДНАЯ БЕСЕДА.

Сегодня мы поговорим о методах решения тригонометрических уравнений. Мы знаем, что правильно выбранный метод часто позволяет существенно упростить решение, поэтому все изученные методы всегда нужно держать в зоне своего внимания, чтобы решать конкретные задачи наиболее подходящим методом.

ДАВАЙТЕ ВСПОМНИМ ИЗВЕСТНЫЕ НАМ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Задание 1 **Вам предложен ряд тригонометрических уравнений. Распределите все уравнения в зависимости от метода, которым каждое уравнение можно решить :**

1. $\sin\frac{x}{3} - \cos 6x = 2$

2. $5 \sin x - 2 \cos x = 1$

3. $\sin 3x \cos 2x = 1$

4. $\cos 2x = 2 (\cos x - \sin x)$

5. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$

6. $\cos 3x = \sin x$

7. $4 - \cos x = 4 \sin x$

8. $tg\, 3x\, tg\, (5x + \frac{n}{3}) = 1$

9. $2 tg\frac{x}{2} - \cos x = 2$

10. $\sin 3x - \sin 5x = 0$

В быстром темпе обсуждается сделанная работа и выясняется, что уравнение № 9 можно решить наибольшим количеством методов. Первые три метода наиболее распространенные. Последний метод встречается реже, поэтому на нем остановимся подробнее :
Для этого решим уравнение № 1 из таблицы:

Покажем общее решение на тригонометрической окружности. Решение первого уравнения системы обозначим □ , а второго – точкой и найдем их общее решение.

Ответ $: \frac{3п}{2} + 6 пм$, м Z

Вспомним суть метода использования условия равенства одноименных тригонометрических функций:

Sin f (x) = sin g (x) **f (x) = g (x) + 2пk** **f (x) = п – g (x) + 2пm** **k Z m Z**	**Cos f (x) = cos g (x)** **f (x) = g (x) + 2пk** **f (x) = - g (x) + 2пm** **k Z m Z**	**tg f (x) = tg g (x)** **f (x) = g (x) + пk** **g (x) = $\frac{п}{2}$ + пm** **k Z m Z**

Три ученика у доски решают уравнения № 10, 6, 8.
Остальные ученики работают по вариантам, согласно рядам, на которых они сидят.

№ 10 Sin 3x – sin 5x = 0	№ 6 Cos 3x = sin x	№ 8 tg 3x tg (5x +n\3) = 1
На основании условий равенства двух синусов имеем : 5x = 3x + 2nk, K Z 5x = n – 3x + 2nm m Z 2x = 2nk k Z 8x = (2m+1)n m Z X = nk k Z X = (2m+1) $\frac{n}{8}$ m Z *Ответ :* x = nk k Z; X= (2m+1) $\frac{n}{8}$ m Z	Cos 3x = cos (n\2 – x) *Воспользуемся равенством косинусов двух углов, имеем :* 3x = n\2- x + 2nk 3x = - (n\2 –x) +2nm 3x+x = n\2 + 2nk 3x-x = 2nm – n\2 4x = (4k+1) n\2 2x = (4m-1) n\2 X = (4k +1) n\8 X = (4m – 1) n\4 *Ответ :* x= (4k+1) n\8; X= (4m-1) n\4 K Z m Z	*Делим обе части уравнения на tg 3x. Это допустимо, т.к. tg 3x не может равняться 0.* Tg(5x+n\3)= 1\ tg 3x Tg (5x+ n\3) = ctg 3x $\boxed{\text{Tg (5x+ n\3) = tg (n\2–3x)}}$ *На основании условия равенства тангенсов имеем:* 5x +n\3 = n\2-3x =nk 5x+3x + n\3 – n\2 = nk 8x – n\6 = nk 8x = n\6 + nk X= n\48 +nk\ 8 или X= (6k=1) n\48, к Z *При каждом значении x из этой совокупности каждая из частей уравнения* *Существует.*

А ТЕПЕРЬ РАССМОТРИМ УРАВНЕНИЕ SIN X + COS X = 1
КАК ВЫ ДУМАЕТЕ, СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ МОЖНО РЕШИТЬ ЭТО УРАВНЕНИЕ? (Я ДУМАЮ, ЧТО ТАКИХ СПОСОБОВ 6) . ДАВАЙТЕ ПОПРОБУЕМ ОТЫСКАТЬ ИХ ВСЕ ВМЕСТЕ.

1.*__СВЕДЕНИЕ К ОДНОРОДНОМУ УРАВНЕНИЮ.__*
ВЫРАЗИМ СИНУС И КОСИНУС ЧЕРЕЗ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА:
2sin x\2cos x\2 + cos x\2- sin x\2 = sin x\2 + cos x\2
2 sin x\2cos x\2 – 2 sin x\2 = 0 : 2 cos x\2
Tg x\2 – tg x\2 = 0
Tg x\2 (1 – tg x\2) = 0
Если tg x\2 = 0, то x\2 = nk , x = 2nk k Z
Если tg x\2 = 1, то x\2 = n\4 +nm m Z x = n\2 + 2nm
Ответ : x=2nk k Z x= n\2 + 2nm m Z

2.ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Выразим cos x через sin (n\2 – x).

Получим sin x + sin (n\2 – x)= 1

X + n\2 –x   x- n\2 + x

2 sin   2   cos   2   = 1

2 sin n\4 cos (x-n\4) = 1

2 cos (x- n\4) =1   cos (x – n\4) = 2 \ 2

X – n\4 = ± arccos 2\2 + 2nk   k   Z

X = n\4 ± n\4 + 2nk   k   Z

Ответ : x= 2nk   x = n\2 + 2nm   k   Z m   Z

3. ВВЕДЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УГЛА.

Разделим обе части уравнения на 2 :

Sin x + cos x = 1 : 2 1\ 2 sin x + 1\ 2 cos x = 1\ 2   cos n\4 sin x +sin n\4cos x=1

Sin (n\4 + x) = 2 \ 2   x+ n\4 = (-1) arcsin 2 \2 + nk   k   Z

X = -n\4 + (-1) n\4 +nk   k   Z

Ответ : x= -n\4 + (-1) n\4 + nk k   Z

4. ВВЕДЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ SIN A И COSA ЧЕРЕЗ TG A\2 ПО ФОРМУЛАМ

2TG A\2   1 – TG A\2

SINA =   COS A =   (1)

1 + TG A\2   1 + TG A\2

*ТАКОЙ СПОСОБ НАЗЫВАЕТСЯ **МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ**, Т.К. ПОСЛЕ ПОДСТАНОВКИ ПОЛУЧАЕТСЯ РАЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НОВОГО НЕИЗВЕСТНОГО.*

ИТАК. ИМЕЕМ :

2tg x\2   1 – tg x\2

+   = 1   2tg x\2 +1 – tg x\2 = 1 + tg x\2

1+tg   x\2   1+tg x\2

2tg x\2 – 2 tg x\2 =0 :2   tg x\2 (1 – tg x\2) = 0

Tg x\2 = 0 или tg x\2 = 1

Если tg x\2 =0, то x \2 = nk k Z и тогда x = 2nk k   Z

Если tg x\2 = 1, то x\2 = n\4 + nm m   Z, или x= n\2 + 2nm

Ответ : x = 2nk k   Z x = n\2 + 2nm m   Z

5. ЗАМЕНА COS ВЫРАЖЕНИЕМ $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

$\sin x + \sqrt{1-\sin^2 x} = 1$

$\pm\sqrt{1-\sin x^2} = 1-\sin x$

$1-\sin^2 x = (1-\sin x)^2$

$(1-\sin x)(1+\sin x) - (1-\sin x) = 0$

$(1-\sin x)(1+\sin x-1+\sin x) = 0$

$2(1-\sin x)\sin x = 0$

$\sin x = 1$ или $\sin x = 0$

Если $\sin x = 1$, то $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k\in Z$

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi m$, $m\in Z$

Из серии $x=\pi m$ решением является только $x=2\pi m$

Ответ : $x=\pi/2+2\pi k$, $x= 2\pi m$, $k,m\in Z$

6.ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ $\sin x + \cos x=\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)$

Исходное уравнение примет вид :

$\sqrt{2}\sin(x+\pi/4) = 1 \quad :\sqrt{2}$

$\sin(x+\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

$x+\pi/4 = (-1)^k \arcsin 1/\sqrt{2} + \pi k$, $k\in Z$

Ответ : $x= -\pi/4 + (-1)^k\pi/4 + \pi k$, $k\in Z$

Все решения показываем на тригонометрическом круге цветными точками, отмечаем их совпадение.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ

1 ВАРИАНТ	2 ВАРИАНТ
№ 4	№7

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ : РЕШИТЬ ИЗ ТАБЛИЦЫ УРАВНЕНИЕ №2 НЕСКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ

ДОПОЛНИТЕЛЬНО (ДЛЯ ЖЕЛАЮЩИХ) $\cos^{2002} x + \sin^{2003} x = 1$

ИТОГ УРОКА