Благовещенский финансово-экономического колледж - филиал федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ПЦК «Прикладная информатика»

**Сборник задач и упражнений по теории вероятностей**

Благовещенск, 2015 г.

*Составитель:*

*Ладоня О.В., преподаватель*

***Цель составления и использования:***

Сборник задач и упражнений по теории вероятностей предназначен для закрепления практических навыков по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика».

В пособие разобраны решения типовых задач по основным разделам теории вероятности, также имеются задачи для самостоятельного решения. Представлена необходимая для решения практических задач теоретическая справка.

Пособие может быть использовано студентами для самостоятельной подготовки к занятиям и к текущему контролю. Рекомендуется преподавателям для подготовки и проведения практических занятий по дисциплине.

Рассмотрено и одобрено

на заседании ПЦК «Прикладная информатика»

«­­\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2015 г.

Протокол № \_\_\_

Председатель ПЦК \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Е.И.Шпакова

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

В данное пособие включены теоретические вопросы, разобранные типовые задачи и задачи для самостоятельного решения по следующим разделам дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»:

* Случайные события
* Дискретные случайные величины
* Непрерывные случайные величины

Данное пособие предназначено для студентов очного отделения для специальности «Прикладная информатика (по отраслям)»

**Содержание**

[Тема 1. Случайные события 5](#_Toc430349617)

[Краткая теоретическая справка 5](#_Toc430349618)

[Примеры решения задач 7](#_Toc430349619)

[Задачи для самостоятельного решения 15](#_Toc430349620)

[Тема 2.Дискретные случайные величины 18](#_Toc430349621)

[Краткая теоретическая справка 18](#_Toc430349622)

[Примеры решения задач 19](#_Toc430349623)

[Задачи для самостоятельного решения 23](#_Toc430349624)

[Тема 3. Непрерывные случайные величины 24](#_Toc430349625)

[Краткая теоретическая справка 24](#_Toc430349626)

[Примеры решения задач 25](#_Toc430349627)

[Задачи для самостоятельного решения 30](#_Toc430349628)

[Список использованной литературы 31](#_Toc430349629)

# Тема 1. Случайные события

## Краткая теоретическая справка

*Правило суммы:*

Если элемент *x* можно выбрать *n* способами, а элемент *y − m* способами, причем ни один способ выбора элемента *x* не совпадает с каким-либо способом выбора элемента *y*, то выбор “ *x или y* ” можно сделать *n + m* способами. Или: Если два взаимно исключающие друг друга действия могут выполняться *m* и *n* способами, то выполнить одно любое из этих действий можно *m + n* способами.

*Правило произведения:*

Пусть даны два множества *X* и *Y*, состоящие соответственно из *n* и *m* элементов. Если элемент *x* можно выбрать *n* способами, а элемент *y* − *m* способами, то пару (*x*, *y*) (″*x и* *y*″) можно выбрать *nm* способами.

Или: Если требуется выполнить одно за другим какие-то *k* действий, которые можно выполнять соответственно способами, то все *k* действий вместе (одновременно) могут быть выполнены способами .

*Факториалом* натурального числа *n* называется произведение первых *n* натуральных чисел:

Пусть дано множество *N*, состоящее из *n* объектов.

Всевозможные последовательности из всех *n* объектов называют *перестановками*.

Две перестановки отличаются друг от друга только *порядком* следования элементов (при одном и том же составе).

Общее *число перестановок из n элементов* (без повторений) равно: .

*Сочетаниями из n элементов по m* называют неупорядоченные *m –*элементные подмножества *n –* элементного множества *N*. Два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (т.е. составом элементов).

Общее *число* *сочетаний из n элементов по m (без повторений)*, т. е. число способов, сколькими можно из данного *n –* элементного множества выбрать подмножество, состоящее из *m* различных элементов, равно: .

*Число сочетаний из n элементов по m (с повторениями)* равно: .

Свойства сочетаний:

* если , то ;
*

*Размещениями из n элементов по m* называют упорядоченные *m –* элементные подмножества данного *n –* элементного множества *N*. Размещения отличаются составом элементов и/или порядком их следования.

Общее *число размещений из n элементов по m* *(без повторений)*:

*Число размещений из n элементов по m (с повторениями):* .

Свойства размещений:

* при *m = n*: .

*Случайным событием* или просто *событием* называется любое подмножество пространства элементарных событий. События обозначают прописными буквами латинского алфавита *A, B, C, . .* .

Свойства элементарных событий:

* элементарные события являются взаимно исключающими друг друга;
* в результате опыта обязательно происходит одно из элементарных событий;
* каково бы ни было случайное событие *А*, по наступившему элементарному событию можно сказать о том, произошло или не произошло событие *А*.

*Вероятность* события характеризует степень объективной возможности этого события.

*Классическое определение вероятности* , где *m* – число элементарных событий, входящих в *А*, *n* – все элементарные события.

*Условной вероятностью*  называют вероятность события *А*, вычисленную в предположении, что событие *В* уже наступило.

События *А* и *В* – называются *независимыми*, если выполняется равенство .

*Теорема сложения.*

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: *p(А+В) = p(А) + p(В) – p(АВ).*

Если события *А* и *В* несовместны, то *p(А+В) = p(А) + p(В).*

*Теорема умножения.*

Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что первое событие наступило: .

Если события *А* и *В* независимы, то .

Если событие *А* может наступить только при появлении одного из несовместных событий (*гипотез*) , то вероятность события *А* вычисляется *по формуле полной вероятности:* , где − вероятность гипотезы ; − условная вероятность события *А* при этой гипотезе; и .

Если до опыта вероятности гипотез были , а в результате опыта появилось событие *А*, то с учетом этого события “новые”, т.е. условные, вероятности гипотез вычисляются по *формуле Байеса*:

Если в n ипытаниях успех наступит *m* раз, то вероятность наступления такого события выражается *формулой Бернулли*:

где *р* – вероятность появления успеха в каждом испытании; – вероятность неудачи.

Вероятность события, заключающегося в том, что при *n* испытаниях событие *А* появится не менее  и не более  раз, равна: .

Число наступлений события в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *р*, называют *наивероятнейшим* и обозначают , если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число определяют из двойного неравенства:

*Формула Пуассона.* При достаточно большом *n* и малом *p* () хорошее приближение для формулы Бернулли дает формула Пуассона: , где .

Формула Пуассона используется в задачах, относящихся к редким событиям (с вероятностью *p* << 1) при достаточно большом числе повторений ().

Вероятность события, заключающегося в том, что оно появится не более *k* раз, вычисляется по формуле: .

*Локальная и интегральная формулы Муавра – Лапласа.*

При достаточно большом *n* и не слишком малых *p* и *q* формула Пуассона дает значительную погрешность и тогда применяется другое приближение – формула Муавра – Лапласа.

*Локальная формула*. Вероятность того, что в *n* независимых испытаниях успех наступит ровно *m* раз, равна

*Интегральная формула.* Вероятность того, что в *n* независимых испытаниях число успехов *m* находится между и , равна

## Примеры решения задач

1. Ребенок имеет на руках 6 кубиков с буквами: О, О, О, Л, М, К. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово «молоко»?

Решение.

Событие А – получилось слово «молоко».

Число всех возможных исходов (перестановок кубиков) равно числу перестановок

Но буква О повторяется 3 раза и не важно какой именно кубик с О стоит на определенном месте, поэтому число исходов (слов, которые могут получиться у ребенка) уменьшается в 3! раз:

Число исходов, благоприятных событию А, (буква М, Л, К могут стоять только на одном месте, каждая из букв О занимает одно из 3 мест в слове).

По формуле классической вероятности вероятность события А равна

2. Заданное слово «СТОХАСТИЧНОСТЬ» составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что буквы вынимаются в порядке написания заданного слова.

Решение.

Данное слово состоит из 3 букв С, 3 букв Т, 2 букв О, 1 буквы Х, 1 буквы А, 1 буквы И, 1 буквы Ч, 1 буквы Н, 1 буквы Ь. Всего 14 карточек с буквами.

Переставить 14 карточек можно способами.

Переставить букву С можно способами, букву Т – способами, букву О – способами.

Поэтому, число случаев, при которых будет составлено данное слово, по правилу произведения .

По формуле классической вероятности вероятность того, что буквы вынимаются в порядке написания заданного слова

3. Из букв слова ВЕЧНОСТЬ составляют трехбуквенные слова. Найти вероятность того, что при случайном выборе последовательно трех букв составят слово СОН.

Решение.

Составить трехбуквенные слова из восьми предложенных букв слова ВЕЧНОСТЬ можно способами.

Составить слово СОН можно только способом.

По формуле классической вероятности вероятность того, что при случайном выборе последовательно трех букв составят слово СОН, равна

4. Из колоды в 36 карт наугад выбирают три карты. Какова вероятность того, что среди них окажется два туза?

Решение.

Выбрать 3 карты из 36 можно способами.

Выбрать 2 туза из четырех имеющихся и 1 карту из оставшихся 32 можно способами.

Тогда вероятность того, что среди выбранных трех карт окажется два туза

5. В вазе стоят 8 белых, 7 розовых и 5 красных гвоздик. Наугад берут 4 цветка. Найти вероятность, что все взятые гвоздики красные.

Решение.

Выбрать 4 цветка из 8+7+5=20 возможных можно способами.

Выбрать 4 красных гвоздики из 5 красных гвоздик можно способами.

По формуле классической вероятности вероятность, что все взятые гвоздики красные

6. В двух ящиках находятся горные породы. В первом – 10 пород, из них 3 минерального происхождения, во втором – 15 пород, из них 6 минерального происхождения. Из каждого ящика наудачу вынимается по 2 породы. Найти вероятность того, что вынутые породы – минерального происхождения.

Решение.

Вероятность события А (2 вынутые породы из первого ящика – минерального происхождения)

p

Вероятность события В (2 вынутые породы из второго ящика – минерального происхождения)

p.

События А и В независимые.

Cобытие С – 4 вынутые породы минерального происхождения – есть произведение событий А и В, так как они должны произойти одновременно. Тогда вероятность события С

7. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,9. Найти вероятность поражения цели.

Решение.

Вероятности попадания стрелками в цель р1 = 0,8, р2 = 0,9, вероятности промахов – q1 = 1 – p1 = 0.2, q2 = 1 – p2 = 0.1.

Цель будет поражена (событие B), если хотя бы один из стрелков в нее попадет. Данное событие противоположно для события А «Стрелки в цель не попали».

Тогда вероятность поражения цели

8. В партии из 10 изделий 4 изделия имеют скрытый дефект. Какова вероятность того, что из взятых наугад 3 изделий 2 изделия являются дефектными?

Решение.

Выбрать 3 изделия из 10 можно способами.

Выбрать 2 изделия из 4 дефектных и 1 изделий из 6 не дефектных можно способами.

Тогда по формуле классической вероятности вероятность того, что из взятых наугад 3 изделий 2 изделия являются дефектными

9. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два вопроса; в) только один вопрос экзаменационного билета.

Решение.

Вероятность того, что студент знает ответ на вопрос . Вероятность противоположного события .

Событие А – студент знает ответ на первый вопрос:

Событие B – студент знает ответ на второй вопрос:

Событие C – студент знает ответ на третий вопрос:

Вероятность того, что студент знает все три вопроса

Вероятность того, что студент знает только два вопроса

Вероятность того, что студент знает только один вопрос экзаменационного билета

10. Вероятность того, что в течение года в радиоприемнике выйдет из строя лампа № 1, равна 0,25. Вероятности выхода из строя ламп №2 и №3 равны, соответственно, 0,15 и 0,1. Найти вероятность того, что вышедший из строя радиоприемник не работает из-за неисправности: а) только одной лампы; б) двух ламп; в) по крайней мере, одной лампы.

Решение.

Из условия известно, что р1 = 0.25, р2 = 0.15, р3 = 0.1.

Значит, вероятности противоположных событий q1 = 1 – р1 = 0.75, q2 = 1 – р2 = 0.85, q3 = 1 – р3 = 0.9.

а) Вероятность того, что вышедший из строя радиоприемник не работает из-за неисправности только одной лампы

б) Вероятность того, что вышедший из строя радиоприемник не работает из-за неисправности двух ламп

в) Вероятность того, что вышедший из строя радиоприемник не работает из-за неисправности, по крайней мере, одной лампы

11. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Зная, что клиент банка не вернул полученный кредит, найти вероятность того, что наблюдается экономический кризис.

Решение.

Событие А – клиент банка не вернул полученный кредит.

Гипотеза Н1 – начнется период экономического роста: р(Н1) = 0,65.

Гипотеза Н2 – начнется период экономического кризиса: р(Н2) = 1–0,65=0,35.

Тогда p(A|H1)=0.04, p(A|H2)=0.13.

По формуле полной вероятности вероятность того, что клиент банка не вернет полученный кредит

р(А) = р(Н1) p(A|H1) + р(Н2) p(A|H2) = 0,65\*0,04 + 0,35\*0,13 = 0,026 + 0,0455 = 0,0715.

По формуле Байеса вероятность того, что наблюдается экономический кризис при условии, что клиент банка не вернул полученный кредит

p(H2|A) = р(Н2)p(A|H2) / р(А) = 0,0455 / 0,0715 = 0,636.

12. В первой урне находятся 5 шаров белого и 1 шар черного цвета, во второй – 4 белого и 3 синего, в третьей – 4 белого и 4 красного цвета. Из первой и второй урны наудачу извлекают по одному шару и кладут в третью. После этого из третьей вынимают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

Решение.

Событие А – из третьей урны вытащили белый шар после всех перекладываний.

Гипотеза Н1 – переложенный шар из первой урны белый, из второй – белый: р(Н1) =.

Гипотеза Н2 – переложенный шар из первой урны цветной, из второй – белый: р(Н2) =.

Гипотеза Н3 – переложенный шар из первой урны белый, из второй – цветной: р(Н3) =.

Гипотеза Н4 – переложенный шар из первой урны цветной, из второй – цветной: р(Н4) =.

Тогда р(A|H1) = , р(A|H2) =, р(A|H3) =, р(A|H2) =.

По формуле полной вероятности

р(А) = р(Н1) р(A|H1) + р(Н2) р(A|H2) + р(Н3) р(A|H3) + р(Н4) р(A|H4) =

.

13. В ящике находятся 3 шара. Сначала в ящик положили белый шар, а затем извлекли один шар. Найти вероятность того, что извлеченный из ящика шар оказался белым, если равновероятны возможные предположения о количестве белых шаров, изначально находившихся в ящике.

Решение.

Событие А – извлекли белый шар.

Гипотеза Н1 – в ящике не было белых шаров:

Гипотеза Н2 – в ящике был один белый шар:

Гипотеза Н3 – в ящике было два белых шара:

Гипотеза Н4 – в ящике было три белых шара:

По формуле полной вероятности вероятность того, что извлеченный из ящика шар оказался белым, равна

14. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: n1 = 18 с первого завода, n2 = 32 со второго, n3 = 30 с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе р1 = 0,9, на втором р2 = 0,8, на третьем р3 = 0,7. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

Решение.

Всего поступило на предприятие 18 + 32 + 30 = 80 комплектующих.

Событие А – изделие качественное.

Гипотеза Н1 – изделия с первого завода: .

Гипотеза Н2 – изделия со второго завода: .

Гипотеза Н2 – изделия с третьего завода: .

Тогда вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе , на втором – , на третьем – .

По формуле полной вероятности вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным

.

15. Среди студентов академии 30% - первокурсники, 35% студентов учатся на втором курсе; на третьем и четвертом курсах их 20% и 15%, соответственно. По данным деканатов известно, что на первом курсе 20% студентов сдали сессию только на "отлично"; на втором - 30%, на третьем - 35%, на четвертом - 40% отличников. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Чему равна вероятность того, что он первокурсник.

Решение.

Событие А – студент сдал сессию на «отлично».

Гипотеза Н1 – студент первокурсник: р(Н1) = 0,3, р(А|H1) = 0.2.

Гипотеза Н2 – студент второкурсник: р(Н2) = 0,35, р(А|H2) = 0.3.

Гипотеза Н3 – студент третьекурсник: р(Н3) = 0,2, р(А|H3) = 0.35.

Гипотеза Н4 – студент четверокурсник: р(Н4) = 0,15, р(А|H4) = 0.4.

По формуле Байеса вероятность того, что вызванный отличник – первокурсник

.

16. Монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не менее трех раз (использовать схему Бернулли).

Решение.

Вероятность выпадения гербы при каждом испытании равна р = 0,5, вероятность выпадения решки q = 0,5.

Воспользуемся формулой Бернулли

Вероятность того, что герб выпадет не менее трех раз, равна

17. Вероятность попадания стрелка в мишень при одном выстреле равна 2/3. Производится 5 выстрелов. Найти вероятность того, что он промахнется не более 2 раз.

Решение.

Событие А «Стрелок промахнется не более 2 раз» равнозначно событию «Стрелок не промахнется, или промахнется 1 или 2 раза».

Воспользуемся формулой Бернулли:

Из условия известно, что n = 5, p = 2/3, q = 1 – p = 1/3.

Вероятность того, что он промахнется не более 2 раз

18. В каждом из 600 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что событие A происходит: 1) ровно 165 раз; 2) от 165 раз до 255 раз; 3) не менее 195 раз.

Решение.

Из условия известно, что n = 600, p = 0.3, тогда q = 1 – p = 0.7.

1) Воспользуемся локальной теоремой Лапласа

Вероятность того, что событие A происходит ровно 165 раз

2) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа

Вероятность того, что событие A происходит от 165 раз до 255 раз

3)

Вероятность того, что событие A происходит не менее 195 раз

19. Завод изготавливает шарики для подшипников. Диаметр шарика является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 20 см и средним квадратическим отклонением 2 см. В каких границах с вероятностью 0,9216 можно гарантировать размер диаметра шарика?

Решение.

Из условия известно, что *а* = 20, σ = 2, γ= 0,9216.

Воспользуемся формулой

Получаем, что границы, в которых с вероятностью 0,9216 можно гарантировать размер диаметра шарика

20. Каждый избиратель независимо от остальных избирателей, отдает свой голос за кандидата А с вероятностью 0,4 и за кандидата В – с вероятностью 0,6. Оценить вероятность того, что в результате голосования на избирательном участке (5000 избирателей) один из кандидатов опередит другого:

а) ровно на 1900 голосов;

б) не менее, чем на 1900 голосов.

Решение.

Из условия задачи известно, что p = 0.4, q = 0.6, n = 5000.

Вычислим .

Пусть хА – число проголосовавших за кандидата А.

а)

Воспользуемся локальной теоремой Лапласа

б) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа

## Задачи для самостоятельного решения

1. В 3 из 10 составленных бухгалтером отчетах имеются ошибки. Ревизор решил проверить наудачу 6 отчетов. Какова вероятность, что а) ошибки не будут обнаружены; б) будет обнаружена хотя бы одна ошибка.

2. Магазин получает товар партиями по 200 штук. Если пять взятых наудачу образцов соответствуют стандартам, партия товара поступает на реализацию. В очередной партии 6 единиц товара с дефектом. Найти вероятность того, что товар поступит на реализацию.

3. В ящике 20 деталей, 6 из них с дефектом. Наудачу извлекают 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) две дефектных; б) хотя бы одна с дефектом.

4. На складе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

5. На курсах повышения квалификации бухгалтеров учат определять правильность оформления накладной. Для проверки преподаватель предлагает проверить 15 накладных, 3 из которых содержат ошибки. Наудачу выбирают 4 накладных. Найти вероятность того, что а) из 4 накладных одна с ошибками; б) хотя бы одна с ошибками.

6. Данное предприятие в среднем выпускает 25 % продукции высшего сорта и 60 % первого сорта. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта.

7. Совет директоров состоит из 2 бухгалтеров, 4 менеджеров и 3 инженеров. Планируется создать подкомитет из трех его членов. Найти вероятность того, что в подкомитет войдут: а) два бухгалтера и менеджер; б) бухгалтер, менеджер и инженер; в) хотя бы один бухгалтер.

8. В группе 15 студентов, среди которых 10 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

9. Среди 20 компьютеров, поступивших в ремонт в мастерскую, 15 на гарантийном обслуживании. Мастер наудачу берет 2 компьютера для ремонта. Найти вероятность того, что а) оба компьютера находятся на гарантийном обслуживании; б) хотя бы один на гарантии.

10. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

11. Два бухгалтера обрабатывают равное количество счетов. Вероятность того, что первый бухгалтер допустит ошибку, равна 0,004, для второго эта вероятность равна 0,005. При проверке счетов была найдена ошибка. Найти вероятность того, что ее допустил первый бухгалтер.

12. Вероятности получения прибыли с акций компаний А, В и С для акционера соответственно равны 0,65; 0,72; 0,5. Найти вероятность того, что а) только один вид акций составит прибыль акционера, б) хотя бы один вид акций принесет доход их обладателю.

13. Надежность первого банка – 0,93; для второго – 0,7; для третьего – 0,95. Предприниматель совершил вклад во все три банка. Найти вероятность того, что предпринимателю вернут вклад: а) два банка; б) хотя бы один банк.

14. Станок работает при условии одновременного функционирования узлов А, В, С, которые работают независимо друг от друга. Вероятность поломки этих узлов 0,3; 0,4; 0,05 соответственно. Какова вероятность того, что станок выйдет из строя?

15. Вероятность того, что в определенный день торговой базе потребуется двухтонная машина, равна 0,8, пятитонная – 0,6. Определить вероятность того, что торговой базе потребуется хотя бы одна автомашина.

16. Вероятность своевременного возвращения кредитов каждым из трех заемщиков банку независимы и соответственно равны: 0,6; 0,9; 0,7. Найти вероятность следующих событий:

 а) только два заемщика возвратят кредит своевременно;

 б) хотя бы один из заемщиков возвратит кредит своевременно.

17. Заводом послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,93, на второй – 0,91, на третьей – 0,8, на четвертой – 0,65. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

18. Вероятность того, что налоговая инспекция предъявит штраф первому предприятию – 0,2, второму – 0,3, третьему – 0,15. Найти вероятность того, что будут оштрафованы: а) три предприятия; б) два предприятия.

19. Технологический процесс состоит из нескольких операций. Вероятность того, что во время первой операции изделие получит повреждение, равна 0,1, а во время второй операции – 0,05. Какова вероятность того, что после двух операций изделие окажется поврежденным?

20. Банк может выдать кредит одному из трех клиентов с вероятностью 0,3; 0,3; 0,4 соответственно. Найти вероятность того, что кредит получит только один клиент.

21. Вероятность того, что фирма, проведя рекламную кампанию, продаст единицу своей продукции, составляет 0,85. Найти вероятность того, что из 100 изделий фирма реализует не менее 82.

22. Вероятность своевременной поставки продукции для каждого из пяти поставщиков постоянна и равна 0,85. Найти вероятность того, что своевременно поставят продукцию от двух до четырех поставщиков.

23. На 200 предприятиях края была произведена аудиторская проверка деятельности. Найти вероятность того, что у 70 предприятий были выявлены серьезные нарушения, если вероятность подобных нарушений для каждого объекта составляет 0,25.

24. Вероятность производственной травмы в течение года равна 0,0005. Какова вероятность того, что из 10 000 рабочих пострадает 4 человека? Каково наивероятнейшее число пострадавших?

25. Вероятность того, что случайно выбранный лицевой счет клиента отделения сбербанка содержит ошибки равна 0,07. Если при выборочной проверке счетов обнаружится, что не менее 8 % отобранных счетов содержат ошибки, то оператор увольняется с работы. Найти вероятность того, что оператор будет уволен, если ревизор проверит 600 счетов.

26. Необходимо перевезти 500 единиц товара грузовым автомобилем, но определенное количество товара может получить в дороге повреждение. Вероятность повреждения единицы товара равна 0,2. Необходимо найти наивероятнейшее число поврежденного товара, чтобы отправить сразу такое количество товара, которое могло бы гарантировать, что необходимую партию товара довезут.

27. В автобусном парке имеется 100 машин. Вероятность выхода автобуса на линию равна 0,95. Для обеспечения нормальной работы маршрутов необходимо иметь на линиях не менее 80 машин. Определить вероятность нормального функционирования автобусных маршрутов.

28. Фотолаборатория взяла на себя обязательство выполнить 150 заказов для клиента, с вероятностью выполнения одного заказа 0,9. Найти вероятность того, что фотолаборатория выполнит 120 заказов.

29. Вероятность того, что посетитель магазина совершит покупку, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 8 посетителей покупку сделает: а) не более двух человек, б) не менее двух человек.

30. 90 % изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Найти вероятность того, что из 650 приобретенных Вами изделии первого сорта будет от 450 до 550.

# Тема 2.Дискретные случайные величины

## Краткая теоретическая справка

*Случайной* называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

В зависимости от вида множества возможных значений все случайные величины (СВ) можно разбить на два класса: *дискретные* и *непрерывные*.

*Дискретной* называют СВ, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Множество возможных значений дискретной СВ может быть или конечным, или счетным.

*Законом распределения дискретной СВ* называется правило, по которому каждому возможному значению случайной величины  ставится в соответствие вероятность , с которой СВ может принять это значение.

Поскольку в результате опыта СВ может принять одно и только одно из возможных значений, то события, заключающиеся в том, что примет значения , попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие. Откуда следует, что .

Дискретные СВ и называются *независимыми*, если независимы события и при любых .

Для любой случайной величины можно ввести *функцию распределения* , равную вероятности того, что случайная величина примет значение, меньшее *x*: .

Свойства функции распределения:

1) ;

2) ;

3) ;

4) Функция распределения − неубывающая функция, т.е. если , то .

Характеристикой *среднего значения случайной величины* служит *математическое ожидание*.

*Математическим ожиданием* *дискретной случайной величины* называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

Свойства математического ожидания:

1. , где *С* – константа;
2. ;
3. , где и − независимые случайные величины.

Следствие:

*Характеристиками рассеяния* возможных значений случайной величины относительно математического ожидания служат, в частности, *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*.

*Дисперсией* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: .

Для вычисления дисперсии часто оказывается удобной формула

Свойства дисперсии:

1. , где *С* – константа;
2. ;
3. , где и − независимые случайные величины.

Следствие:

Размерность дисперсии случайной величины равна квадрату размерности самой случайной величины, поэтому в ряде случаев удобно пользоваться квадратным корнем из дисперсии. Эта характеристика имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, и ее называют *средним квадратическим отклонением случайной величины*: .

## Примеры решения задач

1. Задан закон распределения дискретной случайной величины.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 |
| р | 0,2 | 0,3 | 0,25 | 0,15 | 0,1 |

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение.

Математическое ожидание

M(X) = 11\*0.2 + 14\*0.3 + 17\*0.25 + 20\*0.15 + 23\*0.1 = 2.2 + 4.2 + 4.25 + 3 + 2.3 = 15.95.

Дисперсия

D(X) = 112\*0.2 + 142\*0.3 + 172\*0.25 + 202\*0.15 + 232\*0.1 – 15.952 = 24.2 + 58.8 + 72.25 + 60 + 52.9 – 254.4025 = 13.7475.

Среднее квадратическое отклонение

2. Дискретная случайная величина Х, принимающая значения xi, задана таблицей распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 0 | 2 | 6 |
| pi | 0.3 | 0.6 | 0.1 |

Требуется вычислить:.

Решение.

3. Закон распределения дискретной случайной величины X задан рядом распределения вида:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Xi | -1 | 3 | 5 |
| Pi | P1 | 0,3 | P3 |

Найти значения P1 и P3, если математическое ожидание MX = 1,1. Определить дисперсию DX..

Решение.

Сумма вероятностей полной группы событий равна 1, поэтому 0,3 + р1 + р3 = 1

Математическое ожидание

-1\* р1 + 3\*0,3 + 5\*р3 = 1,1.

Сведем оба уравнения в систему и решим ее:

4. А партии из 11 деталей имеется 7 стандартных. Наугад берутся 3 детали. Составить ряд распределения числа стандартных деталей среди трех выбранных. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение.

Случайная величина Х (число стандартных деталей в выборке) может принимать значения 0, 1, 2, 3.

Вероятность выбрать стандартную деталь , вероятность противоположного события .

Воспользуемся формулой Бернулли

Получаем ряд распределения случайной величины Х:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi | 0 | 1 | 2 | 3 |
| pi | 0.0481 | 0.2524 | 0.4418 | 0.2577 |

Проверка: 0,0481 + 0,2524 + 0,4418 + 0,2577 = 1.

Математическое ожидание

M(X) = 0\*0,0481 + 1\*0,2524 + 2\*0,4418 + 3\*0,2577 = 0,2524 + 0,8836 + 0,7731 = 1,9091 ≈ 2.

Дисперсия

D(X) = 02\*0,0481 + 12\*0,2524 + 22\*0,4418 + 32\*0,2577 – 1,90912 = 0,2524 + 1,7672 + 2,3193 – 3,6447 = 0,6942.

5. Монету подбрасывают 4 раза. Составить закон распределения случайной величины Х – числа выпадения герба. Найти числовые характеристики МХ, DX, . Составить функцию распределения случайной величины F(x), построить ее график.

Решение.

Случайная величина Х может принимать значения: 0, 1, 2, 3, 4.

Воспользуемся формулой Бернулли

Вероятность выпадения герба равна р = 0,5, вероятность выпадения решки q = 0,5.

Получаем закон распределения случайной величины Х:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| p | 0,0625 | 0,25 | 0,375 | 0,25 | 0,0625 |

Проверка: 0,0625+0,25+0,375+0,25+0,0625=1.

Выполним дополнительные вычисления:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Сумма |
| p | 0,0625 | 0,25 | 0,375 | 0,25 | 0,0625 | 1 |
| xp | 0 | 0,25 | 0,75 | 0,75 | 0,25 | 2 |
| x2p | 0 | 0,25 | 1,5 | 2,25 | 1 | 5 |

Математическое ожидание

Дисперсия

Среднее квадратическое отклонение

Составим функцию распределения F(x):

при

при

при

при

при

при

6. Закон распределения дискретной случайной величины Х имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi | -2 | -1 | 0 | 3 | 4 |
| pi | 0,2 | 0,1 | 0,2 | р4 | р5 |

Найти вероятности р4, р5 и дисперсию D(X), если математическое ожидание М(Х) = 1,1.

Решение.

Сумма вероятностей полной группы событий равна 1, поэтому

0,2 + 0,1 + 0,2 + р4 + р5 = 1

Математическое ожидание

-2\*0,2 – 1\*0,1 + 0\*0,2 +3р4 + 4р5 = 1,1.

Сведем оба уравнения в систему и решим ее:

D(X) = (-2)2\*0.2 + (-1)2\*0.1 + 02\*0.2 + 32\*0.4 + 42\*0.1 – 1,12 =0,8 + 0,1 + 0 + 3,6 + 1,6 – 1,21 = 4,89.

7. Производится четыре выстрела с вероятностями попадания в цель р1 = 0,6; р2 = 0,4; р3 = 0,54 р4 = 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию общего числа попаданий.

Решение.

Имеем случайную величину Х – число попаданий в цель. Она может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Запишем вероятности промахов для каждого выстрела:

q1 = 1 – p1 = 1 – 0.6 = 0.4

q2 = 1 – p2 = 1 – 0.4 = 0.6

q3 = 1 – p3 = 1 – 0.5 = 0.5

q4 = 1 – p4 = 1 – 0.7 = 0.3

Вероятность того, что цель не будет поражена, т.е. Х = 0:

Вероятность того, что цель поражена 1 раз, т.е. Х = 1:

Вероятность того, что цель поражена 2 раза, т.е. Х = 2:

Вероятность того, что цель поражена 3 раза, т.е. Х = 3:

Вероятность того, что цель поражена 4 раза, т.е. Х = 4:

Получаем ряд распределения случайной величины Х:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| pi | 0.036 | 0.198 | 0.38 | 0.302 | 0.084 |

Проверка: 0,036 + 0,198 + 0,38 + 0,302 + 0,084 = 1

Математическое ожидание

M(X) = 0 \* 0.036 + 1\*0.198 + 2\*0.38 + 3\*0.302 + 4\*0.084 = 0 + 0.198 + 0.76 + 0.906 + 0.336 = 2.2

Дисперсия

D(X) = 02 \* 0.036 + 12\*0.198 + 22\*0.38 + 32\*0.302 + 42\*0.084 – 2.22 = 0 + 0.198 + 1.52 + 2.718 + 1.344 – 4.84 = 0.94.

## Задачи для самостоятельного решения

1. Известно, что 25 % амурчан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Составить закон распределения числа людей, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом, среди отобранных. Составить функцию распределения, построить ее график.

2. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету – 0,1. Составить закон распределения случайного числа выигрышных билетов среди пяти купленных. Составить функцию распределения, построить ее график.

3. Торговый агент в среднем контактирует с 6 потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенциальный покупатель совершит покупку, равна 0,1. Составить закон распределения ежедневного числа продаж для агента. Составить функцию распределения, построить ее график.

4. Практика показывает, что 7 % накладных, проходящих проверку в бухгалтерии, оказываются неправильно оформленными. Наугад отобраны пять накладных. Составить закон распределения случайного числа накладных, не содержащих ошибки. Составить функцию распределения, построить ее график.

5. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки бухгалтерских проводок счетов. Известно, что служащие компании при обработке входящих счетов допускают 5 % ошибок. Аудитор случайно отбирает 3 входящих документа. Составить закон распределения числа ошибок, выявленных аудитором. Составить функцию распределения, построить ее график.

6. Контролер проверяет на соответствие стандарту 5 изделий. Вероятность того, что каждое из изделий будет признано годным, равна 0,9. Составить закон распределения числа стандартных изделий среди проверенных. Составить функцию распределения, построить ее график.

7. В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает 5 счетов. Известно, что 3 % счетов содержат ошибки. Составить закон распределения правильных счетов. Составить функцию распределения, построить ее график.

8. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y. Составить закон распределения случайной величины Z. Найти числовые характеристики случайной величины Z.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 3 | 6 | 9 |  | Y | 5 | 15 | 25 |
| P | 0.6 | 0.3 | 0.1 |  | P | 0.9 | 0.05 | 0.05 |

# Тема 3. Непрерывные случайные величины

## Краткая теоретическая справка

*Непрерывной* называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины – бесконечно.

Распределение вероятностей непрерывной СВ можно задать либо функцией распределения , либо ее производной , называемой *плотностью распределения вероятности* или *плотностью вероятности*.

В точках, где производная не определена, будем считать, что .

Свойства плотности распределения вероятности:

1) – свойство неотрицательности;

2) – свойство нормированности;

3) ,

4)

Характеристикой *среднего значения случайной величины* служит *математическое ожидание*.

*Математическое ожидание непрерывной случайной величины*, возможные значения которой принадлежат всей оси 0*x*, определяется равенством , где − плотность распределения случайной величины. Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (*a*, *b*), то .

Свойства математического ожидания:

1. , где *С* – константа;
2. ;
3. , где и − независимые случайные величины.

Следствие:

*Характеристиками рассеяния* возможных значений случайной величины относительно математического ожидания служат, в частности, *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*.

*Дисперсией* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: .

Для вычисления дисперсии часто оказывается удобной формула

Свойства дисперсии:

1. , где *С* – константа;
2. ;
3. , где и − независимые случайные величины.

Следствие:

Для непрерывной случайной величины:

Если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу (*a*, *b*), то

.

Свойства дисперсии:

1. , где *С* – константа;
2. ;
3. , где и − независимые случайные величины.

Следствие:

Размерность дисперсии случайной величины равна квадрату размерности самой случайной величины, поэтому в ряде случаев удобно пользоваться квадратным корнем из дисперсии. Эта характеристика имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, и ее называют *средним квадратическим отклонением случайной величины*: .

*Нормальный (Гауссовский) закон распределения*

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной СВ , плотность которого имеет вид где *а* − математическое ожидание; − среднее квадратическое отклонение случайной величины .

Вероятность того, что примет значение, принадлежащее интервалу , равна: , где − функция Лапласа.

Нормальный закон отличается тем, что наиболее вероятны появления средних значений случайной величины, и чем больше отклонения некоторого значения от среднего (математического ожидания), тем менее оно вероятно.

## Примеры решения задач

1. Зная математическое ожидание m = 11 и среднее квадратическое отклонение σ = 4 нормально распределенной случайной величины Х, найти вероятность того, что а) Х примет значение из интервала (13; 23), б) выполняется неравенство |X – m|< 6.

Решение.

а) Используем формулу , где Ф(х) – функция Лапласа.

Вероятность того, что Х примет значение из интервала (13; 23) равна

б) Используем формулу .

Вероятность того, что выполняется неравенство |X – m|< 6

*.*

2. Непрерывная случайная величина Х задана функцией распределения

Найти: .

Решение.

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной X имеет вид:

Найти:

1. значение константы C;
2. P (-13 ≤X ≤4);
3. математическое ожидание M(X);
4. дисперсию D(X) и среднеквадратичное отклонение σ (X);
5. функцию распределения F (x).

Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения.

Решение.

1)

Получаем плотность распределения непрерывной случайной величины Х

2)

3) Математическое ожидание

4) Дисперсия

Среднеквадратичное отклонение

5)

При

При

При .

Итак, функция распределения случайной величины Х

4. Случайная величины Х задана функцией распределения F(x). Найти: а) плотность распределения вероятностей; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Х; в) вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала .

Начертите графики f(x) и F(x).

Решение.

а) Плотность распределения:

б) Математическое ожидание

Дисперсия

в) Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала
.



5. Плотность распределения непрерывной случайной величины Х имеет вид:

Найти:

а) параметр а;

б) функцию распределения F(x);

в) вероятность попадания случайной величины Х в интервал (3,5; 5).

Решение.

а)

Получаем плотность распределения непрерывной случайной величины Х

б)

При

При

При .

Итак,

в) Вероятность попадания случайной величины Х в интервал (3,5; 5)

6. Случайная величина  задана интегральной функцией распределения

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Найдем функцию плотности вероятности распределения случайной величины

Математическое ожидание

Дисперсия

7. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно Мх = 45, среднее квадратическое отклонение равно σх = 5. Найти вероятность того, что в результате испытаний случайная величина примет значение в интервале [43; 48].

Решение.

Воспользуемся формулой .

Из условия а = Мх = 45, σ = σх = 5, [α, β] = [43; 48].

Тогда вероятность того, что в результате испытаний случайная величина примет значение в интервале [43; 48]

*.*

## Задачи для самостоятельного решения

1 Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей F(x).

Требуется: Найти функцию плотности распределения f(x). Найти M(X). Найти вероятность. Построить графики f(x) и F(x).

2. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами

Требуется: составить функцию плотности распределения и построить ее график; найти вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит .

# Список использованной литературы

1. Бычков А.Г. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и методам оптимизации: учеб. пособие. - М.: ФОРУМ, 2011.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник.-11-е изд., стер.-М.: КНОРУС, 2010.
3. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник.-3-е изд., перераб.и доп.- М.:КНОРУС, 2009.
4. Кочетков Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - 2-e изд., испр. и перераб. - М.: Форум: ИНФРА-М, 2014.
5. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: учеб .-справ. пособие /Н. Ш. Кремер; под общ.ред. Н.Ш. Кремера.-4-е изд., перераб.и доп.- М.: Юрайт, 2014.
6. Фадеева Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие.- М.: Рид Групп, 2011.
7. Чашкин Ю.Р. Математическая статистика. Анализ и обработка данных: учеб. пособие.- Изд. 2-е, перераб. и доп.- Ростов н/Д: Феникс, 2010.