Журкина Мария Ивановна
учитель математики (учитель-практикант)
МАОУ ЛМИ г. Саратова,
Саратов, 2018 год

План-конспект урока изучения нового материала по алгебре и началам математического анализа в 10 классе по теме Замена неизвестного $t=\sin x+\cos x$

Учитель: Журкина Мария Ивановна
Предмет: Алгебра и начала математического анализа
Авторы учебника: Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. – 8-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 430 с.
Тема урока: Замена неизвестного $t=\sin x+\cos x$
Тип урока: урок изучения нового материала

Цель урока: научится решать тригонометрические уравнения, неравенства при помощи замены неизвестного $t=\sin x+\cos x$.
Задачи урока:

1. **Образовательные:** закрепить навыки решения тригонометрических уравнений, неравенств, используя при этом метод замены неизвестного $t=\sin x+\cos x$, сформировать умение применять изученные методы к решению уравнений.
2. **Развивающие:** способствовать развитию интеллектуальных качеств личности учащегося: самостоятельность, гибкость, аналитическое и логическое мышление, способность обобщать, делать выводы и умозаключения.
3. **Воспитательные:** воспитывать у учащихся стремление к самосовершенствованию, удовлетворению познавательных способностей, воспитание коммуникативной культуры и культуры устной и письменной речи.

Ход урока

I. Организационный момент, постановка задачи (2 минуты)

Приветствие. Тема сегодняшнего урока – Замена неизвестного $t=\sin x+\cos x$. Сегодня мы рассмотрим специальный прием решения уравнений и неравенств, содержащих выражения $\sin x+\cos x$ (или $\sin x-\cos x$) и $\sin x\cos x$. Какие еще методы решения тригонометрических уравнений, неравенств вы знаете?

II. Изучение нового материала (15 минут)

Рассмотрим уравнения, неравенства в которые входят выражения, $\sin x+\cos x$ и $\sin 2x$. Их удобно решать при помощи замены неизвестного $\sin x+\cos x=t$, так как при этом $\sin 2x=2\sin x\cos x=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-1=(\sin x+\cos x)^2-1=t^2-1$.

Рассмотрим пример:

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$2\sin 2x+\sin x+\cos x=1. \qquad (1)$$

Введем новое неизвестное $\sin x+\cos x=t$, тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение с неизвестным t:

$$2t^2+t-3=0.$$

Так как корни этого уравнения $t_1=1$ и $t_2=-\frac{3}{2}$, то множество решений уравнения (1) есть объединение множеств решений двух уравнений:

$$\sin x+\cos x=1 \text{ и } \sin x+\cos x=-\frac{3}{2}.$$

Каждое из этих уравнений решаем введением вспомогательного угла. При этом первое уравнение преобразуется к виду

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad (2)$$

а второе — к виду

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{4}. \qquad (3)$$

Все решения уравнения (2) задаются формулами

$$x_n-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z};\quad x_k-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z},$$

откуда получаем, что уравнение (2) имеет две серии решений:

$$x_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z};\quad x_k=2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

Так как $\left|-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right|>1$, то уравнение (3) не имеет решений.

Итак, уравнение (1) имеет две серии решений:

$$x_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z};\quad x_k=2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

Если в уравнение входят выражения $\sin x-\cos x$ и $\sin 2x$, то делают замену неизвестного $\sin x-\cos x=t$. При этом $\sin 2x=1-t^2$.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$2\sin x\cos x + \sin x + \cos x < 1. \qquad (8)$$

Введем неизвестное $t = \sin x + \cos x$, тогда неравенство (8) превратится в квадратное неравенство с неизвестным t:

$$t^2 + t - 2 < 0. \qquad (9)$$

Все решения неравенства (9) есть все t из промежутка $-2 < t < 1$. Следовательно, множество всех решений неравенства (8) совпадает с множеством решений двойного неравенства

$$-2 < \sin x + \cos x < 1. \qquad (10)$$

Вводя вспомогательный угол, перепишем неравенство (10) в виде

$$-\sqrt{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (11)$$

Левое неравенство выполняется для любого действительного числа x. Следовательно, все решения неравенства (11) совпадают со всеми решениями неравенства

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (12)$$

Все решения неравенства (12) задаются условиями

$$2\pi n - \frac{5\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Отсюда получаем, что все решения неравенства (8) есть серия интервалов

$$\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}.$$

III. Первичное закрепление материала

Выполним задания из учебника у доски с комментированием: № 11.56 (а, б) – Ангелина, Полина; № 11.58 (а б) – Кирилл, Эдеми; № 11.59 (а, б) – Наталья, Игорь.

Решим следующие неравенства:

Решите неравенство (3—4).

3. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x > 1.$
4. $3\sin x - 3\cos x + 2\sin x\cos x > 3.$
5. Определите все a, при каждом из которых уравнение $5\sin x - 12\cos x = a + 1$ имеет хотя бы одно решение.

IV. Подведение итогов урока

1) Выставление оценок в журнал

2) Домашнее задание: Параграф 11, п. 11.9., выучить теорию, № 11.56 (в, г), № 11.59 (в, г),

Решите неравенство:

4. $\sin x + \cos x - 2\sin x \cos x > -1$.

5. Определите все a, при каждом из которых уравнение $5\sin x + 12\cos x = a - 2$ имеет хотя бы одно решение.